

Математичне моделювання взаємодії поляризованого світла зі структурою, що містить фотопружний шар

Василь Чекурін¹, Наталія Васьо²

¹ д. ф.-м. н., професор, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова 3б, Львів, e-mail: chekurin@iapmm.lviv.ua

² Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова 3б, Львів, e-mail: vaso.iapmm@gmail.com

Розглянуто модель взаємодії поляризованого світла з деформованою шаруватою структурою «діелектричний півпростір – діелектричний фотопружний шар – діелектричний півпростір». Ця структура моделює об'єкт із встановленим на його поверхні фотопружним покритвом. Для визначення напружено-деформованого стану об'єкта використано метод фотопружних покриттів. Отримано точні нелінійні співвідношення фотопружності, що враховують відмінності у діелектричних властивостях об'єкта, покритву та зовнішнього середовища.

Ключові слова: поляризоване світло, метод фотопружних покриттів, співвідношення фотопружності.

Вступ. Метод фотопружних покриттів широко використовують для визначення напружено-деформованого стану твердих тіл [1-3]. Його реалізують, встановлюючи на поверхню об'єкта тонкий діелектричний покритв, який, деформуючись разом із об'єктом, змінює свої діелектричні властивості внаслідок ефекту фотопружності. Ці зміни ресструють, освітлюючи об'єкт зі сторони покритву поляризованим світлом та аналізуючи стан поляризації відбитого світла. Для отримання даних про деформацію об'єкта використовують співвідношення фотопружності [4], яке можна подати у вигляді

$$\delta \cong 2\pi \frac{h}{\lambda} C_e (e_{\perp} - e_{\parallel}). \quad (1)$$

Тут δ — різниця фаз, набута відбитим світлом, e_{\perp} та e_{\parallel} — значення головних компонент деформації на поверхні тіла, h — товщина покритву, C_e — деформаційний коефіцієнт фотопружності.

Співвідношення (1) отримано на основі елементарних міркувань про взаємодію поляризованого світла з діелектричним континуумом, який перебуває в однорідному напруженому стані [5]. Проте, за реалізації методу фотопружних покриттів світло взаємодіє із шаруватою структурою, утвореною зовнішнім середовищем, фотопружним покритвом та об'єктом, на якому він встановлений. Тому лінійна залежність між різницею фаз набутою поляризованим світлом на шляху h та різницею головних деформацій $\Delta e = e_{\perp} - e_{\parallel}$ виконується лише наближено.

Похибка цього наближення залежить від товщини покриття, властивостей зовнішнього середовища, покриття й об'єкта, деформації об'єкта тощо.

Точні співвідношення фотопружності можна отримати, використовуючи модель взаємодії поляризованого світла із структурою «зовнішнє середовище – фотопружний покрив – об'єкт» і розв'язуючи відповідну задачу електродинаміки.

Метою цієї статті є: а) математичне моделювання взаємодії поляризованого світла зі шаруватою структурою що складається із двох ізотропних діелектричних півпросторів, розділених фотопружним діелектричним шаром, яка моделює діелектричне тіло зі встановленим на його поверхні тонким фотопружним покритвом за умов реалізації методу фотопружних покриттів; б) встановлення на цій основі точних співвідношень фотопружності методу фотопружних покриттів для діелектричних об'єктів.

1. Постановка задачі

Розглянемо тришарову діелектричну структуру, яка складається із трьох шарів: діелектричного півпростору $\mathcal{B}_1: (-\infty < x_1 < \infty, -\infty < x_2 < \infty, -\infty < x_3 < 0)$, фотопружного шару $\mathcal{B}: (-\infty < x_1 < \infty, -\infty < x_2 < \infty, 0 < x_3 < h)$ і діелектричного півпростору $\mathcal{B}_2: (-\infty < x_1 < \infty, -\infty < x_2 < \infty, h < x_3 < +\infty)$. Півпростір \mathcal{B}_1 у цій структурі відповідає зовнішньому середовищу, шар \mathcal{B} — фотопружному покриттю. Півпростір \mathcal{B}_2 відповідає об'єкту вимірювання.

Вважатимемо, що деформація об'єкта істотно не впливає на його діелектричну проникливість, і розглядатимемо перший та другий півпростори як ізотропні діелектричні середовища із заданими відносними діелектричними $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ та магнітними μ_1, μ_2 проникливостями.

Шар \mathcal{B} за відсутності деформації має товщину h_0 і характеризується скалярними відносними діелектричною ε і магнітною μ проникливостями. Під дією деформації він змінює свою діелектричну проникливість, яка стає анізотропною. За теорією Поккельса [6] зв'язок між діелектричними властивостями та напружено-деформованим станом шару \mathcal{B} в лінійному наближенні виражається співвідношенням

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon \delta_{ij} + \Delta \varepsilon_{ij}, \quad \Delta \varepsilon_{ij} / \varepsilon^2 = -D_{ijkl} e_{kl}. \quad (2)$$

Тут δ_{ij} — символи Кронеккера, $\Delta \varepsilon_{ij}$ — зміна відносної діелектричної проникливості матеріалу, зумовлена деформацією, D_{ijkl} — компоненти матеріального тензора четвертого рангу, e_{kl} — компоненти тензора деформації. Для ізотропних матеріалів тензор D_{ijkl} визначають дві незалежні компоненти. Тож у цьому випадку маємо

$$\Delta \varepsilon_{ij} / \varepsilon^2 = -2p e_{ij} - p_0 e_{kk} \delta_{ij}, \quad (3)$$

де p, p_0 — безрозмірні константи матеріалу.

Обмежимося тут випадком деформацій, за яких поверхня об'єкта $x_3 = h$, на яку нанесено покрив, залишається пласкою, тобто компонента переміщення u_3 поверхні об'єкта не залежить від координат x_1, x_2 .

Зовнішня поверхня $x_3 = 0$ шару \mathcal{B} ненавантажена: $\sigma_{i3}|_{x_3=0} = \sigma_{3i}|_{x_3=0} = 0$, а його товщина мала, тому він перебуває у плоскому напруженому стані. При цьому в усьому об'ємі покриву з достатньою точністю виконуються співвідношення [7]

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0, \quad e_{33} = -\frac{\nu}{1-\nu}(e_{11} + e_{22}), \quad e_{13} = e_{23} = 0 \quad (4)$$

і ненульові компоненти тензорів напружень і деформації не залежать від координати x_3 .

На межі $x_3 = h$ розділу середовищ «фотопружний покрив – об'єкт» виконуються умови ідеального механічного контакту:

$$[u_i]|_{x_3=h} = 0, \quad [\sigma_{i3}]|_{x_3=h} = [\sigma_{3i}]|_{x_3=h} = 0. \quad (5)$$

Тут u_i, σ_{ij} — компоненти вектора переміщення та тензора напружень у базі декартової системи координат (x_1, x_2, x_3) , $i = \overline{1,3}$. Квадратні дужки [...] вказують на стрибки відповідних параметрів при переході через поверхню $x_3 = h$.

З урахуванням цього із першого співвідношення (4) випливає, що планарні компоненти деформації в покриві $e_{11} = \partial u_1 / \partial x_1$, $e_{22} = \partial u_2 / \partial x_2$, $e_{12} = (\partial u_1 / \partial x_2 + \partial u_2 / \partial x_1) / 2$ дорівнюють відповідним компонентам деформації поверхні об'єкта. Тож, визначаючи за допомогою методів фотопружності компоненти деформації e_{11}, e_{22}, e_{12} , отримуємо апостеріорну інформацію щодо значень відповідних компонент деформацій на поверхні об'єкта.

Якщо зондувати об'єкт світлом, що падає нормально до поверхні розділу $x_3 = h$, то вздовж світлових променів параметри напружено-деформованого стану в об'ємі покриву будуть незмінні.

Нехай із першого півпростору нормально на поверхню $x_3 = 0$ падає монохроматичне поляризоване світло, яке характеризується комплексною амплітудою вектора напруженості електричного поля $\dot{\mathbf{E}}^{(i)} = (\dot{E}_1^{(i)}, \dot{E}_2^{(i)})$. Тут $\dot{E}_k^{(i)} = E_k^{(i)} \exp i\varphi_k^{(i)}$, $k = 1, 2$ — її компоненти в базі декартової системи координат (x_1, x_2, x_3) , $E_k^{(i)} = \text{mod}(\dot{E}_k^{(i)})$, $\varphi_k^{(i)} = \text{arg}(\dot{E}_k^{(i)})$.

Комплексні амплітуди вектора напруженості електричного поля світлової хвилі, що відбивається у півпростір \mathcal{B}_1 , поширюється у шарі \mathcal{B} та заломлюється в півпростір \mathcal{B}_2 , позначатимемо як $\dot{\mathbf{E}}^{(r)} = (\dot{E}_1^{(r)}, \dot{E}_2^{(r)})$, $\dot{\mathbf{E}} = (\dot{E}_1, \dot{E}_2)$ та $\dot{\mathbf{E}}^{(t)} = (\dot{E}_1^{(t)}, \dot{E}_2^{(t)})$ відповідно. Декартові компоненти $\dot{E}_k^{(r)}, \dot{E}_k, \dot{E}_k^{(t)}$ ($k = 1, 2$) цих векторів у об'ємі складових $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}, \mathcal{B}_2$ задовольняють рівняння

$$\begin{aligned}
 \dot{E}_k^{(i)} \Big|_{x_3=0} + \dot{E}_k^{(r)} \Big|_{x_3=0} - \dot{E}_k \Big|_{x_3=0} &= 0, & \frac{d\dot{E}_k^{(i)}}{dx_3} \Big|_{x_3=0} + \frac{d\dot{E}_k^{(r)}}{dx_3} \Big|_{x_3=0} - \frac{d\dot{E}_k}{dx_3} \Big|_{x_3=0} &= 0, \\
 \varepsilon \dot{E}_3^{(i)} \Big|_{x_3=0} + \varepsilon \dot{E}_3^{(r)} \Big|_{x_3=0} - \varepsilon_{33} \dot{E}_3 \Big|_{x_3=0} &= 0, \\
 \frac{d^2 \dot{E}_k^{(i)}(x_3)}{dx_3^2} + (2\pi/\lambda_0)^2 \mu_1 \varepsilon_1 \dot{E}_k^{(i)}(x_3) &= 0, \\
 \frac{d^2 \dot{E}_k(x_3)}{dx_3^2} + (2\pi/\lambda_0)^2 \mu \varepsilon_{kl} \dot{E}_l(x_3) &= 0 \quad (k, l = 1, 2), \\
 \frac{d^2 \dot{E}_k^{(t)}(x_3)}{dx_3^2} + (2\pi/\lambda_0)^2 \mu_2 \varepsilon_2 \dot{E}_k^{(t)}(x_3) &= 0,
 \end{aligned} \tag{6}$$

а на межах розділу середовищ — умови

$$\dot{E}_k \Big|_{x_3=h} - \dot{E}_k^{(t)} \Big|_{x_3=h} = 0, \quad \frac{d\dot{E}_k}{dx_3} \Big|_{x_3=h} - \frac{d\dot{E}_k^{(t)}}{dx_3} \Big|_{x_3=h} = 0, \quad \varepsilon_{33} \dot{E}_3 \Big|_{x_3=h} - \varepsilon \dot{E}_3^{(t)} \Big|_{x_3=h} = 0, \tag{7}$$

які впливають із рівнянь електродинаміки суцільних середовищ [8] (λ_0 — довжина зондувальної світлової хвилі у вакуумі).

2. Розв'язок задачі

Інтегруючи лінійну систему (6) і підпорядковуючи її розв'язок умовам (7) та беручи до уваги умови випромінювання Зоммерфельда [9]. отримуємо лінійні співвідношення, які виражають комплексні амплітуди відбитої хвилі через амплітуду зондувальної хвилі

$$\dot{E}_k^{(r)} = \dot{D}_{kl}^{(r)} \dot{E}_l^{(i)}. \tag{8}$$

Тут $\dot{D}_{kl}^{(r)}$ — елементи матриці Джонса [...] $\dot{\mathcal{D}}^{(r)} = \left[\dot{D}_{kl}^{(r)} \right]$ — відбитої у \mathcal{B}_1 хвилі.

У випадку, коли координатні осі x_1, x_2 орієнтовані вздовж головних осей тензора деформації, відмінні від нуля лише діагональні компоненти цієї матриці $\dot{\mathcal{D}}^{(r)} = \text{diag}(\dot{D}_I^{(r)}, \dot{D}_{II}^{(r)})$, які виражаються через діелектричні властивості тришарової структури формулами

$$\dot{D}_K^{(r)} = \frac{e^{(2i\pi\bar{n}_K h/\lambda)} (\bar{n}_K - \bar{n}_1)(\bar{n}_K + \bar{n}_2) - e^{(-2i\pi\bar{n}_K h/\lambda)} (\bar{n}_K - \bar{n}_2)(\bar{n}_K + \bar{n}_1)}{e^{(-2i\pi\bar{n}_K h/\lambda)} (\bar{n}_K - \bar{n}_1)(\bar{n}_K - \bar{n}_2) - e^{(2i\pi\bar{n}_K h/\lambda)} (\bar{n}_K + \bar{n}_1)(\bar{n}_K + \bar{n}_2)}, \quad K = I, II. \tag{9}$$

У цій формулі $n = \sqrt{\mu\varepsilon}$ — показник заломлення матеріалу шару у недеформованому стані, $\lambda = \lambda_0/n$, $\bar{n}_1 = \sqrt{\mu_1\varepsilon_1}/n$, $\bar{n}_2 = \sqrt{\mu_2\varepsilon_2}/n$,

$$\bar{n}_K = \sqrt{\mu\varepsilon_K}/n = \sqrt{1 + \Delta\varepsilon_K/n^2}, \tag{10}$$

де ε_K , $K = I, II$ — головні компоненти тензора відносної діелектричної проникливості деформованого шару \mathcal{B} , $\Delta\varepsilon_K$ — їхні прирости, зумовлені деформацією, які визначаються за формулою (3).

Товщину h шару у деформованому стані визначає трансверсальна компонента деформації e_{III} : $h = h_0(1 + e_{III})$. З урахуванням формули (4)₂, маємо

$$h = h_0 \left[1 - \nu(e_I + e_{II}) / (1 - \nu) \right]. \quad (11)$$

Формулу (9) можна подати у вигляді

$$\dot{D}_K^{(r)} = d_K^{(r)} \exp(i\delta_K^{(r)}), \quad (12)$$

де

$$d_K^{(r)} = \left[2 \cos(4\pi\bar{h}\bar{n}_K) (\bar{n}_K^2 - \bar{n}_1^2) (\bar{n}_K^2 - \bar{n}_2^2) - (\bar{n}_K - \bar{n}_1)^2 (\bar{n}_K + \bar{n}_2)^2 - (\bar{n}_K + \bar{n}_1)^2 (\bar{n}_K - \bar{n}_2)^2 \right]^{1/2} \left[2 \cos(4\pi\bar{h}\bar{n}_K) (\bar{n}_K^2 - \bar{n}_1^2) (\bar{n}_K^2 - \bar{n}_2^2) - (\bar{n}_K - \bar{n}_1)^2 (\bar{n}_K - \bar{n}_2)^2 - (\bar{n}_K + \bar{n}_1)^2 (\bar{n}_K + \bar{n}_2)^2 \right]^{-1/2}, \quad (13)$$

$$\tan(\delta_K^{(r)}) = \frac{-\bar{n}_1\bar{n}_K(\bar{n}_K^2 - \bar{n}_2^2)\sin(4\pi\bar{h}\bar{n}_K)}{(\bar{n}_K^2 - \bar{n}_2^2)(\bar{n}_K^2 + \bar{n}_1^2)\cos^2(4\pi\bar{h}\bar{n}_K) - (\bar{n}_K^4 - \bar{n}_1^2\bar{n}_2^2)}. \quad (14)$$

Тут $\bar{h} \equiv h/\lambda$, $\delta_K^{(r)} \equiv (\varphi_K^{(r)} - \varphi_K^{(i)})$, $\varphi_K^{(r)}$ — абсолютна фаза K -компоненти відбитої та заломленої хвиль.

Інформативним параметром у методах фотопружності є різниця фаз $\delta^{(r)} = \varphi_{II}^{(r)} - \varphi_I^{(r)}$ [6]. Із формули (14) для відбитої хвилі отримуємо

$$\delta^{(r)} = \delta_{II}^{(r)} - \delta_I^{(r)} + \delta^{(i)}. \quad (15)$$

З урахуванням (2), (10), (11) формули (13)-(15) встановлюють співвідношення фотопружності для методу фотопружних покривів стосовно діелектричних об'єктів. Вони визначають зміну параметрів стану поляризації світлового променя, відбитого об'єктом, залежно від компонент деформації фотопружного покриття та його товщини, діелектричних властивостей середовища, покриття й об'єкта і стану поляризації зондувального світла. Із цих формул випливає, зокрема, що різниця фаз відбитого $\delta^{(r)}$ променя нелінійно залежить від компонент деформації та товщини покриття.

3. Числові дослідження

Базуючись на отриманому розв'язку, проаналізуємо залежність різниці фаз $\delta^{(r)}$ досліджуваної світлової хвилі від прикладеного напруження та товщини фотопружного покриття.

Дослідження проводилися для випадку одновісного напруженого стану, коли $\sigma_1 = \sigma \neq 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, а компоненти тензора деформації визначаються як

$$e_1 \equiv e = \sigma/E, \quad e_2 = e_3 = -\nu e.$$

Тут E та ν — модуль Юнга та коефіцієнт Пуасона фотопружного шару.

На рис. 1 зображено залежність різниці фаз відбитої світлової хвилі від деформації для різних значень товщини фотопружного покриття та різних значень показника заломлення діелектричного півпростору \mathcal{B}_1 : $n_1 = 0,99$ (рис. 1а, б), $n_1 = 1$ (рис. 1в, г) та $n_1 = 1,01$ (рис. 1д, е). Криві 1-3 відповідають різним значенням нормованої товщини покриття $\bar{h} = 100, 200$ та 500 відповідно.

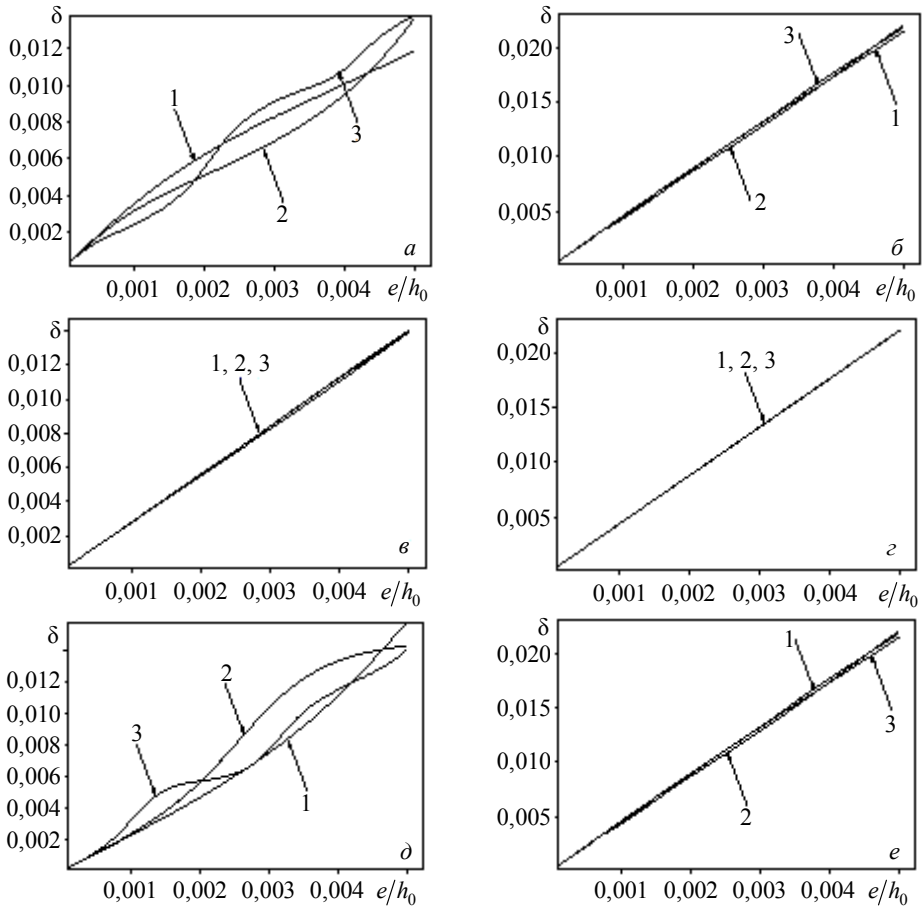


Рис. 1. Залежність різниці фаз відбитого світла від напруження об'єкта за умов одновісного напруженого стану за різних значень показника заломлення зовнішнього середовища й об'єкта

Розрахунок проведено для фотопружного покриття з показником заломлення $n = 1,519$ (поліуритановий каучук). Графіки на рисунках отримані для різних значень показника заломлення об'єкта: $n_2 = 1,458$ (SiO_2) — рис. 1а, в, д та $n_2 = 1,904$ (SiO) — рис. 1б, з, є.

Висновки. Отримані точні співвідношення фотопружності, які пов'язують різницю фаз відбитого структурою «діелектричний півпростір – діелектричний покриття» світла від компонент деформації та напружень на поверхні об'єкта, поляризації падаючого світла, діелектричних властивостей середовища, пружних властивостей покриття і матеріалу об'єкта.

Показано, що деформаційна залежність цих параметрів може істотно відрізнятися від класичного лінійного співвідношення фотопружності. Відхилення цього закону зростають зі збільшенням різниці значень показників заломлення зовнішнього середовища і фотопружного шару та зменшенням цієї різниці для фотопружного шару й об'єкта.

Отримані співвідношення можна використовувати для створення уточнених методів визначення напружено-деформованого стану діелектричних об'єктів, що базуються на методі фотопружних покриттів.

Подальші дослідження слід проводити у напрямку формулювання та розв'язання обернених задач визначення напружено-деформованого стану діелектричних об'єктів методом фотопружних покриттів із використанням отриманих точних співвідношень фотопружності.

Література

- [1] Касаткин Б. С., Кудрин А. Б., Лобанов Л. М. и др. Экспериментальные методы исследования деформаций и напряжений: справочное пособие / под ред. Б. С. Касаткина. — Киев: Наукова думка, 1981. — 412 с.
- [2] Атлури С., Кобаяси А., Дэлли Д., Райли У. и др. Экспериментальная механика // Книга I (пер. с англ.) / под ред. А. Кобаяси. — Москва: Мир, 1990. — 616 с.
- [3] Dally J. W., Riley W. F. Experimental Stress Analysis, 3rd edition, McGraw-Hill Inc., 1991.
- [4] James F. Doyle, James W. Phillips. Society of Experimental Stress Analysis, 1989 — 171 p.
- [5] Александров А. Я., Ахметзянов М. Х. Поляризационно-оптические методы механики тела, что деформируется. — Москва: Наука, 1973. — 576 с.
- [6] Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. — Москва: Наука, 1982. — 425 с.
- [7] Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости / под ред. М. И. Рейтмана. — Москва: Наука, 1975. — 576 с.
- [8] Аззам Р., Башара Н. Эллипсометрия и поляризованный свет. — Москва: Мир, 1981. — 583 с.
- [9] Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — Москва: Наука, 1981. — 512 с.

Mathematical modeling of the interaction of polarized light with a structure containing a photoelastic layer

Vasyl Chekurin, Nataliya Vaso

A model for interaction of polarized light with deformed layered "dielectric half-space – dielectric photoelastic layer – dielectric half-space" structure has been considered in the paper. This structure models an object with photoelastic covering, which is installed on its surface, when the method of photoelastic coverings is using to determine the object's stress-strained state. The exact nonlinear relations of photoelasticity accounting distinctions in dielectric properties of the object, the covering, and the ambient environment have been obtained.

Математическое моделирование взаимодействия поляризованного света со структурой, содержащей фотоупругий слой

Василь Чекурин, Наталия Васьо

Рассмотрена модель взаимодействия поляризованного света с деформированной слоистой структурой «диэлектрическое полупространство – диэлектрический фотоупругий слой – диэлектрическое полупространство». Эта структура моделирует объект с установленным на его поверхности фотоупругим покровом. Для определения напряженно-деформированного состояния объекта использовался метод фотоупругих покровов. Получены точные нелинейные соотношения фотоупругости, учитывающие различия в диэлектрических свойствах объекта, покрова и внешней среды.

Отримано 28.09.15