

Математична модель взаємодії пружних хвиль L - та Sv -поляризації із неоднорідно деформованим шаром

Василь Чекурін¹, Оксана Кравчишин²

¹ д. ф.-м. н., професор, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, e-mail: chekurin@iapmm.lviv.ua

² к. ф.-м. н., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, e-mail: oxana_kravchyshyt@meta.ua

У рамках розробленої раніше математичної моделі динаміки малих пружних збурень у неоднорідно деформованому пружному континуумі сформульовано стаціонарну задачу взаємодії ультразвукової хвилі L - або Sv -поляризації з полем неоднорідної плоскої деформації у шарі, який розділяє два ізотропних півпростори. Побудовано ітераційну процедуру для її розв'язування. У нульовому наближенні записано трансцендентні рівняння для визначення кутів відбивання/заломлення на границях напруженого шару. Досліджено вплив параметрів плоскої деформації на зміну напрямків поширення L - або Sv -хвиль у системі «пружний півпростір – шар – пружний півпростір».

Ключові слова: пружні хвилі в неоднорідно деформованих середовищах, процеси відбивання/заломлення хвиль, ітераційний метод.

Вступ. Поширення малих пружних збурень у неоднорідно-деформованих твердих тілах описується системою диференціальних рівнянь гіперболічного типу зі змінними коефіцієнтами [1]. Аналітичний розв'язок цієї задачі для загального випадку не вдається отримати. Базуючись на малості акустичних анізотропії та неоднорідності, індукованих збуренням, було розроблено ітераційну процедуру її розв'язування. Це дозволило подати хвильове поле в анізотропному середовищі у вигляді взаємопов'язаних квазіпоздовжньої та двох квазіпоперечних хвиль [1]. У випадку плоскої деформації можна розглядати незалежну Sh -хвилю, яка поляризована нормально до площини плоскої симетрії, та взаємозв'язані квазіпоздовжню (L) і квазіпоперечну (Sv) хвилі, які поляризовані у площині плоскої симетрії.

Задачу про поширення хвилі Sh -поляризації у системі «ізотропний півпростір – неоднорідно деформований шар – ізотропний півпростір» було детально описано у роботах [2, 3].

У цій статті розглядається математична модель взаємодії поздовжньої L та поперечної Sv хвиль із неоднорідно деформованим плоским шаром, який перебуває у стані плоскої деформації. Розглядається випадок плоских хвиль, поляризованих у площині плоскої деформації, які падають на поверхню шару з ізотропного пружного півпростору. У рамках моделі досліджено вплив неоднорідності початкового напружено-деформованого стану на зміну кутів відбивання та заломлення.

1. Формулювання задачі

Розглядається ізотропний однорідний пружний шар $\mathcal{S}: 0 < x_2 < h$, що розділяє два ізотропних півпростори $\mathcal{S}^{(1)}: -\infty < x_2 < 0$ та $\mathcal{S}^{(2)}: h < x_2 < \infty$ із густинами маси $\rho^{(n)}$ і модулями зсуву $\lambda^{(n)}, \mu^{(n)}$ ($n=1,2$) відповідно. Шар перебуває у стані плоскої деформації, внаслідок якої стає акустично неоднорідним та анізотропним. За заданих густини маси ρ , коефіцієнтів Ляме λ, μ та Мурнагана a, b, c акустичні властивості шару у його актуальному стані визначаються компонентами тензора деформації $e_{ij} = e_{ij}(x_1, x_2)$ ($i, j = 1, 2$).

Нехай у півпросторі $\mathcal{S}^{(1)}$ уздовж напрямку, що утворює кут α із віссю Ox_2 , поширюється ультразвуковий пучок L - або Sv -поляризації, який збуджує коливання в деякій області простору $\mathcal{V}^{(1)} \subset \mathcal{S}^{(1)}$ із поперечним розміром d , значно більшим за довжину хвилі $\lambda^{(1)} = 2\pi C^{(1)}/\omega$, де $C^{(1)}$ приймає значення $C_L^{(1)} = \sqrt{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})/\rho^{(1)}}$, $C_S^{(1)} = \sqrt{\mu^{(1)}/\rho^{(1)}}$ для падаючих L - або Sv -хвиль відповідно, ω — частота. У цьому разі коливний процес в області $\mathcal{V}^{(1)}$ описується плоскою гармонічною у часі хвилею з комплексною амплітудою $W_{I(L)}^{(1)}$ або $W_{I(S)}^{(1)}$ та хвильовим числом $K_L^{(1)} = \omega/C_L^{(1)}$ або $K_S^{(1)} = \omega/C_S^{(1)}$.

Відбиті та заломлені межами $x_2 = 0$ та $x_2 = h$ хвилі також будуть гармонічними у часі. Відбиті в півпростір $\mathcal{S}^{(1)}$ із комплексними амплітудами $W_{R(\eta l)}^{(1)}$, $W_{R(\eta s)}^{(1)}$ і заломлені в середовище $\mathcal{S}^{(2)}$ з амплітудами $W_{I(\eta l)}^{(2)}$, $W_{I(\eta s)}^{(2)}$ хвилі, утворені падаючою хвилею $\eta = L, Sv$ -поляризації також будуть плоскими. Позначимо $K_L^{(2)} = \omega/C_L^{(2)}$, $K_S^{(2)} = \omega/C_S^{(2)}$ хвильові числа, а через $C_L^{(2)} = \sqrt{(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})/\rho^{(2)}}$, $C_S^{(2)} = \sqrt{\mu^{(2)}/\rho^{(2)}}$ — фазові швидкості у просторі $\mathcal{S}^{(2)}$.

Із закону Снелліуса слідує, що кути напрямів поширення відбитих у середовище $\mathcal{S}^{(1)}$ поздовжньої та поперечної хвиль, мають відповідно вигляд

$$\alpha_l = \arcsin\left[\left(C_L^{(1)}/C^{(1)}\right)\sin\alpha\right], \quad \alpha_s = \arcsin\left[\left(C_S^{(1)}/C^{(1)}\right)\sin\alpha\right],$$

а кути поширення заломлених у середовище $\mathcal{S}^{(2)}$ визначаються як

$$\gamma_l = \arcsin\left[\left(C_L^{(2)}/C\right)\sin\varphi\right], \quad \gamma_s = \arcsin\left[\left(C_S^{(2)}/C^{(1)}\right)\sin\varphi\right],$$

де C та φ поки що невідомі фазова швидкість і кут напрямку поширення хвилі у шарі \mathcal{S} .

Тут і надалі використовуватимемо такі позначення: нижнім індексом I позначатимемо хвилі у додатному напрямі осі $0x_2$, індексом R — у від'ємному. Нижній індекс у дужках вказує на тип хвилі — L, S для L або Sv падаючих хвиль відповідно. Якщо нижній індекс у дужках складається із двох букв, то перша, велика, визначає тип падаючої хвилі, а друга, маленька — тип породженої нею (відбитої/заломленої) хвилі (l, s — L - або Sv -хвилю). Верхній індекс у дужках (1, 2) використовуватимемо для позначення характеристик півпросторів $\mathfrak{S}^{(1)}$ та $\mathfrak{S}^{(2)}$. Параметри для неоднорідно деформованого шару \mathfrak{S} записуємо без верхнього індексу.

За достатньо малих амплітуд для опису хвильового поля у шарі \mathfrak{S} можна застосувати розроблену авторами раніше математичну модель динаміки малих пружних збурень у неоднорідно деформованому континуумі [4] стосовно компонент вектора переміщення $\mathbf{W} = \{W_1, W_2\}$ у вигляді

$$\begin{aligned} & \partial \left(B_{11} \partial W_1 / \partial x_1 + B_{12} \{ \partial W_1 / \partial x_2 + \partial W_2 / \partial x_1 \} + B_{11}^{(2)} \partial W_2 / \partial x_2 \right) / \partial x_1 + \\ & + \partial \left[B_{22}^{(1)} (\partial W_1 / \partial x_2 + \partial W_2 / \partial x_1) + B_{12} \{ \partial W_1 / \partial x_1 + \partial W_2 / \partial x_2 \} \right] / \partial x_2 + \rho \omega^2 W_1 = 0, \\ & \partial \left[B_{22}^{(1)} (\partial W_1 / \partial x_2 + \partial W_2 / \partial x_1) + B_{12} \{ \partial W_1 / \partial x_1 + \partial W_2 / \partial x_2 \} \right] / \partial x_1 + \\ & + \partial \left[B_{11}^{(2)} \partial W_1 / \partial x_1 + B_{12} (\partial W_1 / \partial x_2 + \partial W_2 / \partial x_1) + B_{22} \partial W_2 / \partial x_2 \right] / \partial x_2 + \rho \omega^2 W_2 = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

де

$$\begin{aligned} B_{11}^{(2)}(x_1, x_2) &= \lambda + (a + b)e_1, \quad B_{22}^{(1)}(x_1, x_2) = \mu + (2b + c)e_1, \\ B_{11}(x_1, x_2) &= \lambda + 2\mu + (2b + c)e_{11} + (a + b)e_1, \quad B_{12}(x_1, x_2) = 0,5(2b + c)e_{12}, \\ B_{22}(x_1, x_2) &= \lambda + 2\mu + (a + b)e_1 + (2b + c)e_{22}(x_1, x_2), \quad e_1 = e_{11} + e_{22}. \end{aligned} \quad (4)$$

На поверхнях розділу середовищ $x_2 = 0$ та $x_2 = h$ виконуються умови ідеального механічного контакту для пружних збурень. На кожній границі — це умови рівності двох компонент вектора переміщення у різних середовищах і двох компонент тензора напружень σ_{12}, σ_{22} , які пов'язують амплітуди падаючої, відбитих і заломлених хвиль. Обмежимося випадком достатньо великих кутів падіння, за яких відбита на межі $x_2 = h$ хвиля не інтерферує на поверхні $x_2 = 0$ із хвилею, що падає [2].

За такого припущення на межі $x_2 = 0$ отримаємо чотири співвідношення

$$\begin{aligned} & \dot{W}_{I(\eta)}^{(1)} f_{I(\eta)}(\alpha) E_{\eta}(x_1) + W_{R(\eta l)}^{(1)} \sin \alpha_l E_{\eta L}(x_1) + W_{R(\eta s)}^{(1)} \cos \alpha_s E_{\eta S}(x_1) = W_1(x_1, 0), \\ & \dot{W}_{I(\eta)}^{(1)} f_{2(\eta)}(\alpha) E_{\eta}(x_1) - W_{R(\eta l)}^{(1)} \cos \alpha_l E_{\eta L}(x_1) + W_{R(\eta s)}^{(1)} \sin \alpha_s E_{\eta S}(x_1) = W_2(x_1, 0), \\ & i\mu^{(1)} \left[K_{\eta}^{(1)} W_{I(\eta)}^{(1)} f_{3(\eta)}(\alpha) E_{\eta}(x_1) - K_L^{(1)} W_{R(\eta l)}^{(1)} \sin 2\alpha_l E_{\eta L}(x_1) \right] - \\ & - i\mu^{(1)} K_S^{(1)} W_{R(\eta s)}^{(1)} \cos 2\alpha_s E_{\eta S}(x_1) = s_{12}(x_1, 0), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \mu^{(1)} \left[K_{\eta}^{(1)} W_{I(\eta)}^{(1)} E_{\eta} (x_1) f_{4(\eta)} - K_S^{(1)} W_{R(\eta_S)}^{(1)} \sin 2\alpha_s E_{\eta_S} (x_1) + 2K_L^{(1)} W_{R(\eta_L)}^{(1)} \cos^2 \alpha_l E_{\eta_L} (x_1) \right] - \\ & - \lambda^{(1)} \left[K_{\eta}^{(1)} W_{I(\eta)}^{(1)} E_{\eta} (x_1) \Psi_{(\eta)} + K_L^{(1)} W_{R(\eta_L)}^{(1)} E_{\eta_L} (x_1) \right] = i s_{22} (x_1, 0), \end{aligned}$$

а на межі $x_2 = h$ — такі рівняння

$$\begin{aligned} W_1(x_1, h) &= W_{I(\eta_L)}^{(2)} \sin \gamma_l G_{\eta_L} (x_1) + W_{I(\eta_S)}^{(2)} \cos \gamma_s G_{\eta_S} (x_1), \\ W_2(x_1, h) &= W_{I(\eta_L)}^{(2)} \cos \gamma_l G_{\eta_L} (x_1) - W_{I(\eta_S)}^{(2)} \sin \gamma_s G_{\eta_S} (x_1), \\ i \mu^{(2)} \left[K_L^{(2)} W_{R(\eta_L)}^{(2)} \sin 2\gamma_l G_{\eta_L} (x_1) + K_S^{(2)} W_{R(\eta_S)}^{(2)} \cos 2\gamma_s G_{\eta_S} (x_1) \right] &= s_{12} (x_1, h), \\ \mu^{(2)} \left[K_S^{(2)} W_{I(\eta_S)}^{(2)} \sin 2\gamma_s G_{\eta_S} (x_1) - 2K_L^{(2)} W_{I(\eta_L)}^{(2)} \cos^2 \gamma_l G_{\eta_L} (x_1) \right] - \\ - \lambda^{(2)} K_L^{(2)} W_{I(\eta_L)}^{(2)} G_{\eta_L} (x_1) &= i s_{22} (x_1, h). \end{aligned} \quad (6)$$

Тут $E_{\eta} (x_1) = \exp(i K_{\eta}^{(1)} x_1 \sin \alpha)$, $E_{\eta_L} (x_1) = \exp(i K_L^{(1)} x_1 \sin \alpha_l)$,
 $E_{\eta_S} (x_1) = \exp(i K_S^{(1)} x_1 \sin \alpha_s)$, $G_{\eta_L} (x_1) = \exp[i K_L^{(2)} (x_1 \sin \gamma_l + h \cos \gamma_l)]$,
 $G_{\eta_S} (x_1) = \exp[i K_S^{(2)} (x_1 \sin \gamma_s + h \cos \gamma_s)]$;

$$\begin{aligned} f_{1(\eta)}(\alpha) &= \begin{cases} f_{1(L)} \\ f_{1(S)} \end{cases} = \begin{cases} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{cases}, & f_{2(\eta)}(\alpha) &= \begin{cases} f_{2(L)} \\ f_{2(S)} \end{cases} = \begin{cases} \cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{cases}, & \Psi_{(\eta)} &= \begin{cases} \Psi_{(L)} \\ \Psi_{(S)} \end{cases} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}, \\ f_{3(\eta)}(\alpha) &= \begin{cases} f_{3(L)} \\ f_{3(S)} \end{cases} = \begin{cases} \sin 2\alpha \\ \cos 2\alpha \end{cases}, & f_{4(\eta)}(\alpha) &= \begin{cases} f_{4(L)} \\ f_{4(S)} \end{cases} = \begin{cases} 2 \cos^2 \alpha \\ -\sin 2\alpha \end{cases}, \\ s_{12}(x_1, x_2) &= B_{22}^{(1)} (\partial W_1 / \partial x_2 + \partial W_2 / \partial x_1) + B_{12} (\partial W_1 / \partial x_1 + \partial W_2 / \partial x_2), \\ s_{22}(x_1, x_2) &= B_{11}^{(2)} \partial W_1 / \partial x_1 + B_{12} (\partial W_1 / \partial x_2 + \partial W_2 / \partial x_1) + B_{22} \partial W_2 / \partial x_2. \end{aligned}$$

2. Ітераційний метод розв'язування задачі

Хвильове поле у шарі \mathcal{S} у розглядуваному випадку є суперпозицією заломлених поверхнею $x_2 = 0$ і відбитих у нього поверхнею $x_2 = h$ квазіпоздовжніх та квазі-поперечних хвиль. Позначимо через $\beta_{I(\eta_L)}, \beta_{I(\eta_S)}$ кути, які визначають напрям поширення заломлених, а через $\beta_{R(\eta_L)}, \beta_{R(\eta_S)}$ — відбитих падаючою η -хвилею L - та S_V -хвиль відповідно; $\theta_{I(\eta_L)}, \theta_{I(\eta_S)}$ і $\theta_{R(\eta_L)}, \theta_{R(\eta_S)}$ — кути для визначення напрямків поляризації відповідних хвиль, які у випадку взаємодії збурення з неоднорідно деформованим середовищем не співпадають із напрямками поширення. Ці кути поки що не відомі.

Для розв'язування системи рівнянь (3), що описує хвильове поле у неоднорідно деформованому шарі, використаємо ітераційний метод, розроблений раніше [1]. Із цією метою перепишемо рівняння для заломлених поверхнею $x_2 = 0$ хвиль у новій системі координат $\{x, y, x_3\}$, отриманій із вихідної системи поворотом у площині x_1Ox_2 на кут $\beta_{I(\eta\kappa)}$ і трансляції початку відліку на вектор $(\xi_{I(\eta\kappa)}, 0)$, та у якій вісь Ox співпадає з напрямком поширення збурення. Для відбитих межею $x_2 = h$ хвиль перепишемо систему рівнянь (3) стосовно системи координат, отриманої з вихідної системи поворотом у площині x_1Ox_2 на кут $(\pi - \beta_{R(\eta\kappa)})$ та трансляції початку відліку на вектор $(\xi_{R(\eta\kappa)}, h)$, де $\xi_{R(\eta\kappa)} = \xi_{I(\eta\kappa)} + h \operatorname{tg} \beta_{I(\eta\kappa)}$. Функції компонент тензора початкової деформації $e_{ij}(x_1, x_2)$ запишемо у новій системі координат у вигляді $e_{ij}(x_1, x_2) = \varepsilon_{ij}(x(\beta_{\vartheta(\eta\kappa)}), y(\beta_{\vartheta(\eta\kappa)})) = \varepsilon_{ij}(x, y)$ та подамо їх як суму середньоінтегральних значень на напрямках $\mathbf{n}_{I(\eta\kappa)} = \{\sin \beta_{I(\eta\kappa)}, \cos \beta_{I(\eta\kappa)}, 0\}$; $\mathbf{n}_{R(\eta\kappa)} = \{\sin \beta_{R(\eta\kappa)}, -\cos \beta_{R(\eta\kappa)}, 0\}$ ($\eta = L, S$; $\kappa = l, s$), утворених введеними кутами,

$$\bar{\varepsilon}_{ij}(\beta_{\vartheta(\eta\kappa)}) = \frac{\cos \beta_{\vartheta(\eta\kappa)}}{h} \int_0^{h/\cos \beta_{\vartheta(\eta\kappa)}} \varepsilon_{ij}(s, 0) ds, \quad (8)$$

і відхилень від цих значень

$$\varepsilon_{ij}(x, y) = \bar{\varepsilon}_{ij}(\beta_{\vartheta(\eta\kappa)}) + \tilde{\varepsilon}_{ij}(x(\beta_{\vartheta(\eta\kappa)}), y(\beta_{\vartheta(\eta\kappa)})) \quad (\vartheta = I, R). \quad (9)$$

Підставляючи подання (9) у співвідношення (4), отримаємо

$$\begin{aligned} B_{11}(x, y) &= \bar{B}_{11} + (a + 3b + c)\tilde{\varepsilon}_{11}(x, y) + (a + b)\tilde{\varepsilon}_{22}(x, y) = \bar{B}_{11} + \tilde{B}_{11}(x, y), \\ B_{12}(x, y) &= \bar{B}_{12} + (2b + c)\tilde{\varepsilon}_{12}(x, y) = \bar{B}_{12} + \tilde{B}_{12}(x, y), \\ B_{11}^{(2)}(x, y) &= \bar{B}_{11}^{(2)} + (a + b)(\tilde{\varepsilon}_{11}(x, y) + \tilde{\varepsilon}_{22}(x, y)) = \bar{B}_{11}^{(2)} + \tilde{B}_{11}^{(2)}(x, y), \\ B_{22}^{(1)}(x, y) &= \bar{B}_{22}^{(1)} + (2b + c)(\tilde{\varepsilon}_{11}(x, y) + \tilde{\varepsilon}_{22}(x, y)) = \bar{B}_{22}^{(1)} + \tilde{B}_{22}^{(1)}(x, y), \\ B_{22}(x, y) &= \bar{B}_{22} + (a + b)\tilde{\varepsilon}_{11}(x, y) + (a + 3b + c)\tilde{\varepsilon}_{22}(x, y) = \bar{B}_{22} + \tilde{B}_{22}(x, y). \end{aligned}$$

У результаті систему рівнянь (3) для хвилі, напрям поширення якої визначається одним із кутів $\varphi = \{\beta_{I(\eta l)}, \beta_{I(\eta s)}, \beta_{R(\eta l)}, \beta_{R(\eta s)}\}$, перепишемо у такому вигляді

$$(\bar{b}_{11} \partial^2 / \partial x^2 + \rho \omega^2) \tilde{W}_1^{[p+1]} + \bar{b}_{12} \partial^2 \tilde{W}_2^{[p+1]} / \partial x^2 = -(T_{11} + N_{11}) \tilde{W}_1^{[p]} - (T_{12} + N_{12}) \tilde{W}_2^{[p]},$$

$$\begin{aligned} & \bar{b}_{12} \partial^2 \dot{W}_1^{[p+1]} / \partial x^2 + (\bar{b}_{22} \partial^2 / \partial x^2 + \rho \omega^2) \dot{W}_2^{[p+1]} = \\ & = -(T_{12} + N_{12}) \dot{W}_1^{[p]} - (T_{22} + N_{22}) \dot{W}_2^{[p]}. \end{aligned} \quad (10)$$

Тут $\bar{b}_{11} = \bar{B}_{11} \sin^2 \varphi + \bar{B}_{12} \sin(2\varphi) + \bar{B}_{22}^{(1)} \cos^2 \varphi$, $\bar{b}_{12} = \bar{B}_{12} + 0,5(\bar{B}_{11}^{(2)} + \bar{B}_{22}^{(1)}) \sin(2\varphi)$,

$$\bar{b}_{22} = \bar{B}_{22}^{(1)} \sin^2 \varphi + \bar{B}_{12} \sin(2\varphi) + \bar{B}_{22} \cos^2 \varphi,$$

$$T_{11}(x, y) = \partial \left[(\tilde{B}_{11} \sin^2 \varphi + \tilde{B}_{12} \sin(2\varphi) + \tilde{B}_{22}^{(1)} \cos^2 \varphi) \partial / \partial x \right] / \partial x,$$

$$T_{12}(x, y) = \partial \left[(\tilde{B}_{12} + 0,5(\tilde{B}_{11}^{(2)} + \tilde{B}_{22}^{(1)}) \sin(2\varphi)) \partial / \partial x \right] / \partial x,$$

$$T_{22}(x, y) = \partial \left[(\tilde{B}_{22}^{(1)} \sin^2 \varphi + \tilde{B}_{12} \sin(2\varphi) + \tilde{B}_{22} \cos^2 \varphi) \partial / \partial x \right] / \partial x,$$

$$N_{11}(x, y) = D_1 [(B_{12} \sin \varphi - B_{11} \cos \varphi) \partial / \partial y] + D_2 [(B_{22}^{(1)} \sin \varphi - B_{12} \cos \varphi) \partial / \partial y],$$

$$N_{12}(x, y) = D_1 [(B_{22}^{(1)} \sin \varphi - B_{12} \cos \varphi) \partial / \partial y] + D_2 [(B_{12} \sin \varphi - B_{22}^{(1)} \cos \varphi) \partial / \partial y],$$

$$N_{22}(x, y) = D_1 [(B_{12} \sin \varphi - B_{22}^{(1)} \cos \varphi) \partial / \partial y] + D_2 [(B_{22} \sin \varphi - B_{12} \cos \varphi) \partial / \partial y],$$

де $D_1 = \sin \varphi \partial / \partial x - \cos \varphi \partial / \partial y$, $D_2 = \cos \varphi \partial / \partial x + \sin \varphi \partial / \partial y$.

3. Хвильове поле у нульовому наближенні

За нульове наближення ітераційної процедури (10) беремо розв'язок системи рівнянь

$$\begin{aligned} & (\bar{b}_{11} \partial^2 / \partial x^2 + \rho \omega^2) W_1 + \bar{b}_{12} \partial^2 W_2 / \partial x^2 = 0, \\ & \bar{b}_{12} \partial^2 W_1 / \partial x^2 + (\bar{b}_{22} \partial^2 / \partial x^2 + \rho \omega^2) W_2 = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Верхній індекс [0] для нульової ітерації тут і надалі опускаємо.

Як відомо, розв'язками цієї системи рівнянь будуть по дві взаємозв'язані квазіпоздовжня та квазіпоперечна плоскі хвилі ($\eta = L, Sv$), заломлені поверхнею $x_2 = 0$, (для них $x = x_1 \sin \beta_{I(\eta\kappa)} + x_2 \cos \beta_{I(\eta\kappa)}$ ($\kappa = l, s$)) і відбиті межею $x_2 = h$ (тут $x = x_1 \sin \beta_{R(\eta\kappa)} - x_2 \cos \beta_{R(\eta\kappa)}$ ($\kappa = l, s$)).

Їхні фазові швидкості пов'язані із власними значеннями акустичного тензора $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \bar{b}_{11} & \bar{b}_{12} \\ \bar{b}_{12} & \bar{b}_{22} \end{pmatrix}$ та визначаються для кожного кута φ вигляді [1]:

$$\begin{aligned} 2\rho \bar{C}_{(L)}^2 &= \bar{b}_{11} + \bar{b}_{22} + \sqrt{(\bar{b}_{11} - \bar{b}_{22})^2 + 4\bar{b}_{12}^2}, \\ 2\rho \bar{C}_{(Sv)}^2 &= \bar{b}_{11} + \bar{b}_{22} - \sqrt{(\bar{b}_{11} - \bar{b}_{22})^2 + 4\bar{b}_{12}^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Вектори поляризації визначимо як власні вектори акустичного тензора.

Отримані співвідношення (12) є функціями від невідомих кутів відбитих і заломлених у шарі хвиль $\varphi = \{\beta_{I(\eta l)}, \beta_{I(\eta s)}, \beta_{R(\eta l)}, \beta_{R(\eta s)}\}$. У середньоінтегральному наближенні моделі згідно закону Снеліуса про рівність дотичних до поверхні розділу середовищ компонент хвильових векторів, отримаємо такі трансцендентні рівняння для визначення кутів відбивання/заломлення на поверхнях розділу середовищ

$$\begin{aligned} \bar{C}_{I(\eta\kappa)} \sin \alpha - C^{(1)} \sin \beta_{I(\eta\kappa)} &= 0; & \bar{C}_{I(\eta\kappa)} \sin \beta_{R(\eta\kappa)} - \bar{C}_{R(\eta\kappa)} \sin \beta_{I(\eta\kappa)} &= 0, \\ \bar{C}_{I(\eta\kappa)} \sin \gamma - C^{(2)} \sin \beta_{I(\eta\kappa)} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Пропонується ітераційна процедура розв'язування трансцендентних рівнянь (13), для якої шукані кути $\beta_{I(\eta\kappa)}, \beta_{R(\eta\kappa)}$ подамо у вигляді

$$\begin{aligned} \beta_{I(\eta\kappa)} &= \arcsin(C_{\kappa}/C^{(1)} \sin \alpha) + \Delta_{I(\eta\kappa)} = \beta_{\kappa} + \Delta_{I(\eta\kappa)}, \\ \beta_{R(\eta\kappa)} &= \arcsin(C_{\kappa}/C^{(1)} \sin \alpha) + \Delta_{I(\eta\kappa)} = \beta_{\kappa} + \Delta_{R(\eta\kappa)} \end{aligned} \quad (14)$$

Подання (14) підставимо у рівняння (13), розкладаючи усі функції, залежні від шуканих кутів у ряд Тейлора в околі β_{κ} . Оскільки акустична неоднорідність шару є слабкою, то і шукані уточнення для кутів $\Delta_{I(\eta\kappa)}, \Delta_{R(\eta\kappa)}$ є малими порівняно із β_{κ} . Тому обмежимося лінійними доданками розкладу у ряд Тейлора. У результаті трансцендентні рівняння (13) перетворяться у лінійні співвідношення стосовно уточнень $\Delta_{I(\eta\kappa)}, \Delta_{R(\eta\kappa)}$. Визначивши уточнення для кутів відбивання/заломлення, обчислимо середньоінтегральні вздовж цих напрямків фазові швидкості, проводячи ітераційну процедуру до того часу, поки рівняння (13) не будуть виконуватися із заданою точністю.

4. Вплив неоднорідності напружено-деформованого стану на кути відбивання та заломлення хвиль шаром

За однорідного напружено-деформованого стану кути відбивання та заломлення шаром плоских хвиль L та Sv поляризації не залежать від кута падіння та визначаються законом Снелліуса [4]. Коли ж початковий напружений стан є неоднорідний, розподіли компонент деформації змінюються зі зміною напрямку поширення хвиль у тілі. Тому навіть у середньоінтегральному наближенні спостерігатиметься залежність кутів відбивання та заломлення від кута падіння хвилі.

Дослідимо це явище на прикладі шару із залишковими напруженнями, зумовленими стрибками переміщення, неперервно розподіленими вздовж відрізка, нормального до його поверхні [5].

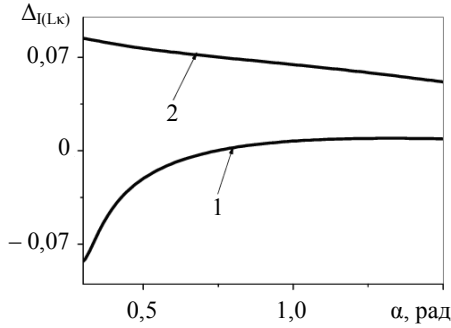


Рис. 1

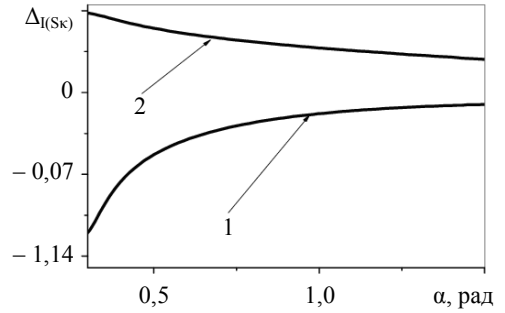


Рис. 2

Вважатимемо, що пружні властивості півпросторів $\mathcal{S}^{(1)}$, $\mathcal{S}^{(2)}$ та ненапруженого шару \mathcal{S} є однакові, для них $\rho^{(1)} = \rho = \rho^{(2)} = 2,77 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\lambda^{(1)} = \lambda = \lambda^{(2)} = 4,22 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$, $\mu^{(1)} = \mu = \mu^{(2)} = 2,74 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$. За таких умов поверхні розділу є прозорі для падаючої хвилі. Для деформованого шару \mathcal{S} задамося пружними сталими третього порядку $a = 6,08 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$; $b = -4,802 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$; $c = -3,361 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$.

На рис. 1, 2 подано зміни кутів заломлених верхньою межею поздовжньої та поперечної хвиль порівняно з кутами заломлення у шар без напружень. Зокрема, на рис. 1 ці параметри задані для випадку падіння поздовжньої хвилі, а на рис. 2 — поперечної. Цифри 1, 2 на обох рисунках позначають відбиті поперечно та поздовжню хвилі.

Найсуттєвіший вплив початкових деформацій спостерігається для малих кутів падіння, оскільки у цьому випадку заломлені хвилі взаємодіють з областю дії деформацій. При зростанні кута падіння хвиля проходить крізь шар без деформацій, тому кут не змінюється.

Висновки. У статті у рамках розробленої раніше математичної моделі динаміки пружних збурень у неоднорідно деформованому просторі побудовано теоретичні засади для опису процесів відбивання/заломлення пружної хвилі при проходженні крізь шар у стані плоскої неоднорідної деформації, що розділяє два пружних півпростори. Отримано систему двох диференціальних рівнянь другого порядку зі змінними коефіцієнтами, які є функціями компонент тензора початкової деформації. Разом із граничними умовами ідеального механічного контакту на межах розділу середовищ вони утворюють замкнену систему для визначення хвильового поля у шарі та відбитих і заломлених хвиль на межі розділу середовищ. Записано ітераційну схему розв'язування отриманої крайової задачі. У середньоінтегральному наближенні поля початкових деформацій виявлено залежність кутів відбивання/заломлення напрямку падаючої хвилі. Тому виміряні кути відбивання/заломлення від шару, що перебуває у стані неоднорідної плоскої деформації можуть служити інформативними параметрами формулювання прямих та обернених задач акустичної томографії напружень.

Література

- [1] Чекурін В. Ф., Кравчишин О. З. Пружні збурення в неоднорідно деформованих твердих тілах. — Львів: СПОЛОМ, 2008. — 152 с.
- [2] Кравчишин О. З., Чекурін В. Ф. Взаємодія ультразвукової хвилі SH -поляризації з двовимірним полем деформації у плоскому шарі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2013. — Т. 56, № 2. — С. 203-211.
- [3] Кравчишин О. З., Чекурін В. Ф. Проходження ультразвукової хвилі SH -поляризації крізь неоднорідно деформований пружний шар // Прикл. проблеми мех. і мат. — 2014. — Вип. 12. — С. 97-103.
- [4] Гринченко В. Т., Вовк І. В., Мацьгура В. Т. Основы акустики. — Київ: Наукова думка, 2007. — 640 с.
- [5] Чекурін В. Ф. Варіаційний метод розв'язування задач томографії напруженого стану твердих тіл // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 1999. — Т. 35, № 5. — С. 23-32.

Mathematical model of interaction of elastic L - and S_V -polarization waves with inhomogeneously deformed layer

Vasyl Chekurin, Oksana Kravchyshyn

Within the framework of previously developed mathematical model of small elastic perturbations propagation in homogeneously strained elastic continuum, a stationary problem for interaction of a narrow ultrasonic beam of ultrasonic L - S_V -polarization wave with an elastic layer under plane deformation, which separates two elastic half-spaces, has been formulated. The iterative procedure for its solving has been constructed. The influence of the plane deformation parameters on the change of directions of L - S_V wave's propagation in the "elastic half-space – a layer – elastic half-space" system has been studied.

Математическая модель взаимодействия упругих волн L - и S_V -поляризации с неоднородно деформированным слоем

Василь Чекурин, Оксана Кравчишин

С использованием разработанной ранее математической модели динамики малых упругих возмущений в неоднородно деформированном упругом континууме сформулирована стационарная задача взаимодействия ультразвуковой волны L - или S_V -поляризации с упругим слоем в состоянии неоднородной плоской деформации, который разделяет два упругих полупространства. Построена итерационная процедура для ее решения. В нулевом приближении записаны трансцендентные уравнения для определения углов отражения/преломления на границах напряженного слоя. Исследовано влияние параметров плоской деформации на изменение направлений распространения L - или S_V -волны в системе «упругое полупространство – слой – упругое полупространство».

Отримано 02.06.15