УДК 539.374

Сушіння зерна в імпульсному режимі агента сушіння з урахуванням шаруватості структури зернини

Богдана Гайвась[1], Вероніка Дмитрук[2]

[1] д. т. н., с. н. с., Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: haj@cmm.lviv.ua
[2] к. т. н., Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дудаєва, 15, Львів, 79005; Національний університет «Львівська політехніка», вул. С. Бандери, 12, Львів, e-mail: dmytruk15@gmail.com

На основі принципу подібності процесів тепло- та масопереносу при імпульсному осушенні зернового шару побудовано розв'язок задачі про зміну концентрації вологи та температури в зернині в часі, в залежності від глибини розміщення її в шарі, неоднорідності її структури, швидкості продуву міжзернового середовища та керуючих функцій (пароповітряної суміші та температури) сушильного середовища. Це дає змогу досліджувати надалі напружено-деформований стан зернини з врахуванням міцності та вибирати оптимальні режимні параметри осушення.

Ключові слова: осцилюючий режим, ідеальне витіснення, структура зернини.

Вступ. Розглядається задача про осушення зернового шару товщини L, насичені вологою зернини якого мають форму сферичних кульок радіусом R [1-9], що відповідає еквівалентному об'єму зернини. Шар віднесений до прямокутної декартової системи координат: його вісь z є перпендикулярною до поверхонь шару. Шар однакових кульок (просо, кукурудза, пшениця та ін.) продувається з обох поверхонь сухим теплим повітрям зі швидкістю υ конвективного переносу в міжзерновому середовищі.

Для рівномірного нагріву всієї маси зерна необхідно забезпечити розділення зерен. Експериментально встановлено, що при правильно вибраному співвідношенні між кількістю зерна, проміжного теплоносія і величиною розходу повітря, що йде на псевдозрідження, зерно не тоне, а бере участь у загальному пульсаційному русі суміші. Отриманий шар дозволяє збільшити поверхні контактів з основним і проміжним теплоносіями.

В камерних сушарнях коридорного типу агент сушіння подають як в нижній, так і в верхній коридори. Електрична схема управління забезпечує контроль роботи вентилятора подачі агента сушіння, напряму його подачі, температури агента сушіння. Температуру повітря регулюють під'єднанням чи від'єднанням одного чи групи нагрівних елементів калорифера. Для того, щоб зерно знизу добре омивалось повітрям, встановлюють вентиляційні решітки.

Зерно — фізіологічна культура, яка складається з зародка, ендосперма (ядро-область 1) та оболонки (область 2) [1, 4]. Різниця в будові оболонки і ендосперма впливає не тільки на поглинання, або видалення вологи, але і на фізико-хімічні процеси, які змінюють об’єм зерна і структуру ендосперма. В зерні містяться білок, крохмал та жири [1,5]. Набухання білка позитивно впливає на проростання насіння. При температурі, вищій від допустимої, білок піддається денатурації, при якій знижується здатність до набухання.

Гранично допустимі температури зерна залежать від роду зерна, його цільового призначення, вихідної вологості і конструкції сушарень. Сприятливі умови взаємодії фаз досягаються в прямоточних сушарнях ідеального витіснення. Суть моделі ідеального витіснення основана на ідеалізації потоку і представленні руху газоподібного середовища у вигляді поршневого при повній відсутності перемішування вздовж потоку.

Основне співвідношення для моделі ідеального витіснення витікає з умови неперервного потоку $\upsilon = const$. Ця умова накладає обмеження на зміну швидкості на вході і виході зони ідеального витіснення. На вході допустиме збурення по концентрації і розходу. Ефективним є осцилюючий режим сушіння [6], при якому зберігаються корисні речовини, не руйнується оболонка, яка зберігає клітки ендосперма.

1. Формулювання задачі

Система рівнянь для зернини складається з рівнянь механодифузії та теплопровідності, які у сферичній системі координат для областей 1 і 2 (ядра і оболонки) мають вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 u_r^{(i)}\right)}{\partial r}\right] - \xi^{(i)}\beta^{(i)}\frac{\partial c^{(i)}}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial\left(rc^{(i)}\right)}{\partial \tau} = D^{(i)}\frac{\partial^2\left(rc^{(i)}\right)}{\partial r^2} - D_\varepsilon^{(i)}\frac{\partial^2\left(r\varepsilon^{(i)}\right)}{\partial r^2},$$

$$\frac{\partial\left(rT^{(i)}\right)}{\partial \tau} = a_T^{(i)}\Delta\left(rT^{(i)}\right) \ \left(i = 1;\, 2\right), \tag{1}$$

де $\xi^{(i)} = 3K^{(i)}/\left(3K^{(i)} + 4G^{(i)}\right)$, $\varepsilon^{(i)} = \partial u_r^{(i)}/\partial r + 2u_r^{(i)}/r$; $D^{(i)}$ — коефіцієнт дифузії; $D_\varepsilon^{(i)}$ — коефіцієнт впливу градієнта поля об'ємної деформації на масовий потік вологи за рахунок колоїдності матеріалу зерна; $K^{(i)}$ — модуль всестороннього об'ємного стиску; $G^{(i)}$ — модуль зсуву; $\beta^{(i)}$ — концентраційний коефіцієнт об'ємного розширення; $u_r^{(i)}$ — радіальні переміщення; $\varepsilon^{(i)}$ — об’ємна деформація, $a_T^{(i)}$ — коефіцієнт температуропровідності в i — ій області. Врахуємо, що в центросиметричній задачі за рахунок обдуву зернини виконуються такі співвідношення:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 u_r^{(i)}\right)}{\partial r}\right] = \frac{\partial \varepsilon^{(i)}}{\partial r}, \qquad \frac{\partial \varepsilon^{(i)}}{\partial r} = -\xi^{(i)}\left(\beta^{(i)}\frac{\partial \vartheta^{(i)}}{\partial r} + \alpha^{(i)}\frac{\partial t^{(i)}}{\partial r}\right), \tag{2}$$

де $\vartheta^{(i)}\left(r, \bar{z}, \tau\right) = c_r^{(i)}\left(r, \bar{z}, \tau\right) - c_{z0}\left(\bar{z}, 0\right)$, $c_{z0}\left(\bar{z}, 0\right)$ — початкова умова в міжзерновому середовищі шару. Система (1)-(2) зводиться до вигляду

$$\frac{\partial (r\vartheta)^{(i)}}{\partial \tau} = \widetilde{D}^{(i)} \frac{\partial^2 (r\vartheta)^{(i)}}{\partial r^2}, \tag{3}$$

де $\widetilde{D}^{(i)} = D^{(i)} - \xi^{(i)}\beta^{(i)}D_{\varepsilon}^{(i)}$ — ефективний (приведений) коефіцієнт дифузії .

Із рівності потоків пароповітряної суміші при випаровуванні $J_r^{(1)} = J_r^{(2)}$ на межі внутрішньої та зовнішньої областей $r = r_*$ зернини має місце рівність:

$$\left(D^{(1)} \frac{\partial \vartheta^{(1)}}{\partial r} + D_{\varepsilon}^{(1)} \frac{\partial \varepsilon^{(1)}}{\partial r} \right)_{r=r*} = \left(D^{(2)} \frac{\partial \vartheta^{(2)}}{\partial r} + D_{\varepsilon}^{(2)} \frac{\partial \varepsilon^{(2)}}{\partial r} \right)_{r=r*}. \tag{4}$$

Тут $\varepsilon = \varepsilon_{\cdot\alpha}^{\alpha\cdot}$ — перший інваріант тензора деформації. З виразу (4) випливає:

$$\widetilde{D}^{(1)} \frac{\partial \vartheta^{(1)}}{\partial r} = \widetilde{D}^{(2)} \frac{\partial \vartheta^{(2)}}{\partial r} \tag{5}$$

При осушенні шару зерна розрізняється тепломасоперенос в зернині і в середовищі, що її оточує. Рівняння дифузії в міжзерновому середовищі аналогічне рівнянню конвективної теплопровідності :

$$\frac{\partial c_z}{\partial \tau} + \upsilon_z \frac{\partial c_z}{\partial z} = D_z \frac{\partial^2 c_z}{\partial z^2} + J_r(r,z,\tau) \quad \frac{\partial T_z}{\partial \tau} + \upsilon_z \frac{\partial T_z}{\partial z} = a_{Tz} \frac{\partial^2 T_z}{\partial z^2} + J_{rT}(r,z,\tau) \tag{6}$$

де $a_{Tz} = \dfrac{\lambda_z}{c_P \rho}$ - температуропровідність міжзернового середовища [Вт/м^3]; λ_z — коефіцієнт теплопровідності в міжзерновому середовищі; c_P - теплоємність; ρ — густина; D_z — коефіцієнт дифузії пароповітряної суміші міжзернового середовища; υ_z — швидкість продуву повітрям шару зерна; $J_r(r,z,\tau)$, $J_{rT}(r,z,\tau)$ — інтенсивність локального джерела вологи та тепла в результаті випаровування з окремих зернин; τ - час; z - координата за товщиною шару. Для задовільнення граничних умов на поверхні зернини розв'язок для $\vartheta^{(2)}$ шукаємо у вигляді $\vartheta^{(2)} = \vartheta_1^{(2)} + c_2^{(2)}$, де $\vartheta_1^{(2)}$ задовольняє початковим та граничним умовам та на границі областей (1), (2), а $c_2^{(2)}$ вибирається так, щоб сумарно задовільнились умови конвективного нестаціонарного масообміну на поверхні зернини при імпульсному осушенні шару зерна.

Введемо безрозмірні змінні:

$$\bar{z} = \frac{z}{L}; \quad Fo_{zc} = \frac{D_z \tau}{L^2}; \; Pe_{zc} = \frac{\upsilon_z L}{D_z}; Fo_T = \frac{a_{Tz}\tau}{L^2}; \; Pe_{zT} = \frac{\upsilon_z L}{a_{Tz}} = \frac{\upsilon_z \rho c_P}{\lambda_z / L} \tag{7}$$

Задамо умови на границях шару імпульсними функціями:

$$T_z(0, Fo_{zT}) = A_{T1} \sin(\Omega_{1T}\,\tau) = A_{T1} \sin(\widetilde{\Omega}_{1T}\, Fo_{zT}),$$

$$T_z(1, \mathrm{Fo}_{z\mathrm{T}}) = A_{T2} \sin(\Omega_{2T}\,\tau) = A_{T2} \sin(\widetilde{\Omega}_{2T}\, \mathrm{Fo}_{z\mathrm{T}}); \tag{8}$$

$$c_z(0,Fo_{zc})=A_{c1}\sin(\Omega_{1c}\,\tau)=A_{c1}\sin(\widetilde{\Omega}_{1c}\,Fo_{zc}),$$
$$c_z(1,\mathrm{Fo}_{zc})=A_{c2}\sin(\Omega_{2c}\,\tau)=A_{c2}\sin(\widetilde{\Omega}_{2c}\,\mathrm{Fo}_{zc}) \qquad (9)$$

при початкових умовах: $c_z(z,0)=c_{z0}$, $T_z(z,0)=T_{z0}$.

Між процесами переносу вологи і переносу тепла існує аналогія, яка проявляється в спільності структури диференціальних рівнянь дифузії і теплопровідності, а також в тотожності форм задання граничних умов цих процесів. Різниця між ними зводиться до заміни теплових коефіцієнтів переносу дифузійними.

Вважаємо, що закон масообміну між вологістю на поверхні зернини і середовищем аналогічний закону Ньютона-Ріхмана; а потік концентрації вологи пропорційний різниці концентрацій пароповітряної суміші на поверхні зернини $c_R^{(2)}$ і міжзернового середовища c_z. На основі закону збереження енергії виконуються аналогічні до умови масообміну граничні умови на поверхні зернини:

$$-\widetilde{D}^{(2)}\frac{\partial c^{(2)}}{\partial r}\Big|_{П}=\alpha_d\left(c_z-c^{(2)}\big|_{П}\right),\ [\alpha_d]=\text{м/с};\quad -\lambda\frac{\partial T^{(2)}}{\partial r}\Big|_{П}=\alpha_T\left(T_z-T^{(2)}\big|_{П}\right), \qquad (10)$$

де α_d — коефіцієнт масопередачі вологи; α_T — коефіцієнт теплообміну при випаровуванні. Тут $T^{(2)}\big|_{\Pi}$ — температура вологи оболонки зернини на зовнішній поверхні; T_z — температура міжзернового середовища шару зерна. Представимо першу умову (10) у вигляді:

$$\left.\frac{\partial \vartheta^{(2)}}{\partial r}\right|_{r=R}+H_c\left[\vartheta^{(2)}\big|_R-(c_z-c_{z0})\right]=0;\quad \vartheta^{(1)}(0,\tau)\neq\infty,\quad \left.\frac{\partial \vartheta^{(1)}}{\partial r}\right|_{r=0}=0, \qquad (11)$$

де $\vartheta^{(2)}\big|_R(\tau)=c_r^{(2)}(R,\tau)-c_{z0}$, $H_c=\alpha_d/\widetilde{D}^{(2)}$.

Приймаємо, що в початковий момент часу $(\tau=0)$ переміщення нульові, а концентрації і температура сталі величини:

$$u_{r0}^{(i)}=0,\quad c_{r0}^{(i)}=const,\quad T_{r0}^{(i)}=const. \qquad (12)$$

В результаті отримано систему рівнянь (1), (3), (5), (6), яка допускає розділення змінних. Розв'язок даної системи рівнянь шукаємо у вигляді:

$$(r\vartheta)^{(i)}=\Theta^{(i)}(r)t^{(i)}(\tau). \qquad (13)$$

Шукані функції $\Theta^{(i)}$, $t^{(i)}$ задовольняють системі рівнянь:

$$t'^{(i)}(\tau)+\mu^2 t^{(i)}(\tau)=0,\quad \Theta''^{(i)}(r)+\frac{\mu^2}{\widetilde{D}^{(i)}}\Theta^{(i)}(r)=0, \qquad (14)$$

Розглянемо область $0\le r<r_*$, де r^* — межа розділу внутрішньої та зовнішньої областей (1), (2) зернини. На основі (13), (14)

$$\vartheta_1^{(1)}(r,\tau)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{r}\left(A_{1j}^{(1)}\cos\lambda_j^{(1)}r+B_{1j}^{(1)}\sin\lambda_j^{(1)}r\right)e^{-\mu_j^2\tau}.$$

Умова обмеженості розв'язку $\vartheta_1^{(1)}$ для $r=0$ виконується, якщо $A_{1j}^{(1)}=0$. Тоді

$$\vartheta_1^{(1)}(r,\tau)=\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{\infty}e^{-\mu_j^2\tau}B_{1j}^{(1)}\sin\lambda_R^{(1)}\bar{r}\,,\quad\left(\frac{\mu_j^2R^2}{\widetilde{D}^{(1)}}=\lambda_j^{(1)2}R^2=\lambda_{Rj}^{(1)2}\right).\tag{15}$$

Аналогічно в області $r_*\le r\le R$ отримуємо:

$$\vartheta_1^{(2)}(r,\tau)=\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{\infty}e^{-\mu_{jc}^2\tau}\left(A_{1j}^{(2)}\cos\lambda_j^{(2)}r+B_{1j}^{(2)}\sin\lambda_j^{(2)}r\right),\ \left(\frac{\mu_{jc}^2R}{\widetilde{D}^{(2)}}=\lambda_j^{(2)2}R=\lambda_{Rj}^{(2)2}\right).\tag{16}$$

$$\frac{\partial\vartheta_1^{(2)}(r,\tau)}{\partial r}=\sum_{j=1}^{n}e^{-\mu_{jc}^2\tau}\left[-A_{1j}^{(2)}\left(\frac{1}{r^2}\cos\lambda_j^{(2)}r+\frac{\lambda_2}{r}\sin_j^{(2)}r\right)+B_{1j}^{(2)}\left(-\frac{1}{r^2}\sin\lambda_j^{(2)}r+\frac{\lambda_j^{(2)}}{r}\cos\lambda_j^{(2)}r\right)\right].\tag{17}$$

Визначення коефіцієнтів $A_{1j}^{(i)}, B_{1j}^{(i)}$ проведено в роботі [11]. Характеристичне рівняння задачі масопереносу має вигляд:

$$tg\lambda_{Rj}^{(2)}(1-\bar{r}_*)=\lambda_{Rj}^{(2)}\frac{(1-\bar{r}_*)}{\left[a_{21}+\left(\lambda_{Rj}^{(2)}\right)^2\bar{r}_*\right]}.\tag{18}$$

де $\bar{r}_*=\dfrac{r_*}{R}$, $\dfrac{\mu R}{\sqrt{\widetilde{D}^{(2)}}}=\lambda_R^{(2)}$, $\dfrac{\mu r_*}{\sqrt{\widetilde{D}^{(2)}}}=\lambda_R^{(2)}\dfrac{r_*}{R}$, $\dfrac{\mu r_*}{\sqrt{\widetilde{D}^{(1)}}}=\lambda_R^{(2)}\dfrac{r_*}{R}\dfrac{\sqrt{\widetilde{D}^{(2)}}}{\sqrt{\widetilde{D}^{(1)}}}$, $\dfrac{\mu}{\sqrt{\widetilde{D}^{(1)}}}=\lambda_R^{(2)}\dfrac{1}{R}\dfrac{\sqrt{\widetilde{D}^{(2)}}}{\sqrt{\widetilde{D}^{(1)}}}$.

Для процесу теплопереносу маємо:

$$tg\lambda_{RjT}^{(2)}(1-\bar{r}_*)=\lambda_{RjT}^{(2)}\frac{(1-\bar{r}_*)}{\left[a_{21T}+\left(\lambda_{RjT}^{(2)}\right)^2\bar{r}_*\right]}\tag{19}$$

Третій індекс знизу T вказує на те, що формули (19) стосуються теплопереносу. Крім цього, μ замінено в них на μ_T та коефіцієнт приведеної дифузії $\widetilde{D}^{(i)}$ — на коефіцієнт температуропровідності $\widetilde{a}^{(i)}$, $a_{21}=\left(-1+\dfrac{\alpha_D R}{\widetilde{D}^{(2)}}\right)$ на

$a_{21T} = \left(-1 + \frac{\alpha_T R}{\tilde{a}_T^{(2)}}\right)$, $\tilde{a}_T^{(i)} = \frac{\lambda^{(i)}}{c_{pi}\rho^{(i)}}$, де індексом i означено величини, які входять в рівняння теплопровідності і стосуються i-ої області зернини. Ортогоналізуючи розв'язки в межах радіуса зернини, отримаємо для $\vartheta_1^{(i)}(r,z,0) = c^{(i)}(r,z,0) - c_{z0}(z,0) = cons$ ваговий коефіцієнт у вигляді:

$$M_j = \frac{\Delta_3\left[c_0^{(1)}(\bar{r},0) - c_{z0}(\bar{z},0)\right]\int_0^{\bar{r}_*}\bar{r}\sin\lambda_{Rj}^{(1)}\bar{r}d\bar{r} + \left[c_0^{(2)}(\bar{r},0) - c_{z0}(\bar{z},0)\right]\left[\Delta_1\int_{\bar{r}_*}^{1}\bar{r}cos\lambda_{Rj}^{(2)}\bar{r}d\bar{r} + \Delta_2\int_{\bar{r}_*}^{1}\bar{r}\sin\lambda_{Rj}^{(2)}\bar{r}d\bar{r}\right]}{\Delta_3^2\int_0^{\bar{r}_*}\sin^2\lambda_{Rj}^{(1)}d\bar{r} + \left[\Delta_1^2\int_{\bar{r}_*}^{1}cos^2\lambda_{Rj}^{(2)}d\bar{r} + \Delta_1\Delta_2\int_{\bar{r}_*}^{1}\sin 2\lambda_{Rj}^{(2)}\bar{r}d\bar{r} + \Delta_2^2\int_{\bar{r}_*}^{1}\sin^2\lambda_{Rj}^{(2)}d\bar{r}\right]^2}. \quad (20)$$

Сталі $A_{1j}^{(2)}$, $B_{1j}^{(2)}$, $B_{1j}^{(1)}$, які відповідають кореневі μ_j, зв'язані з алгебраїчними доповненнями співвідношеннями [11]:

$$A_{1j}^{(2)} = M_j\Delta_1(\mu_j),\ B_{1j}^{(2)} = M_j\Delta_2(\mu_j),\ B_{1j}^{(1)} = M_j\Delta_3(\mu_j); \quad (21)$$

для теплового процесу

$$A_{1jT}^{(2)} = M_{jT}\Delta_{1T}(\mu_{jT}),\ B_{1jT}^{(2)} = M_{jT}\Delta_{2T}(\mu_{jT}),\ B_{1jT}^{(1)} = M_{jT}\Delta_{3T}(\mu_{jT}). \quad (22)$$

де $\Delta_1(\mu_j,1,\bar{r}_*) = f\begin{vmatrix} p_{12} & 0 \\ p_{22} & p_{23}\end{vmatrix} = f\,p_{12}p_{23}$, $\Delta_2(\mu_j,1,\bar{r}_*) = -f\begin{vmatrix} p_{11} & 0 \\ p_{21} & p_{23}\end{vmatrix} = -f\,p_{11}p_{23}$,

$\Delta_3(\mu_j,1,\bar{r}_*) = f\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22}\end{vmatrix} = f\,(p_{11}p_{22} - p_{21}p_{12})$. Тут $f = \vartheta(0,z,0)$. Тут

$p_{11} = \left[a_{21}\cos\lambda_{Rj}^{(2)} + \lambda_{Rj}^{(2)}\sin\lambda_{Rj}^{(2)}\right]$, $p_{12} = \left[a_{21}\sin\lambda_{Rj}^{(2)} - \lambda_{Rj}^{(2)}\cos\lambda_{Rj}^{(2)}\right]$, $p_{21} = \left[\cos\left(\lambda_{Rj}^{(2)}\bar{r}_*\right) + \left(\lambda_{Rj}^{(2)}\bar{r}_*\right)\sin\left(\lambda_{Rj}^{(2)}\bar{r}_*\right)\right]$,
$p_{22} = \left[\sin\left(\lambda_{Rj}^{(2)}\bar{r}_*\right) - \left(\lambda_{Rj}^{(2)}\bar{r}_*\right)\cos\left(\lambda_{Rj}^{(2)}\bar{r}_*\right)\right]$, $p_{23} = -a_{11}\left[\sin\left(\lambda_{Rj}^{(1)}\bar{r}_*\right) - \left(\lambda_{Rj}^{(1)}\bar{r}_*\right)\cos\left(\lambda_{Rj}^{(1)}\bar{r}_*\right)\right]$, $p_{33} = \lambda_{Rj}^{(1)}/R$.

Константа M_{jT} для теплопереносу визначається аналогічно як для масопереносу, тільки замість концентрації вносимо відповідну температуру, замість коефіцієнта дифузії — коефіцієнт температуропровідності, а для визначення коренів характеристичного рівняння - корені рівняння (19). Позначимо:

$$\left(c_1^{(2)} - c_{z0}\right)_{r=R} = \frac{1}{R}\sum_{j=1}^{\infty}\tilde{B}_{1j}^{(2)}e^{-\mu_{jc}^2\tau},$$

$$\tilde{B}_{1j}^{(2)} = \left[A_{1j}^{(2)}\cos\left(\lambda_{Rj}^{(2)}\right) + B_{1j}^{(2)}\sin\left(\lambda_{Rj}^{(2)}\right)\right], \quad (23)$$

$$\frac{\partial c_{r1}^{(2)}(r,\tau)}{\partial r}\Big|_{r=R} = \frac{1}{R^2}\sum_{j=i}^{\infty} G_{11j}^{(2)} e^{-\mu_j^2 \tau},$$

$$G_{11j}^{(2)} = M_j\left[-\Delta_1\left(\cos\lambda_{Rj}^{(2)} + \lambda_{Rj}^{(2)}\sin\lambda_{Rj}^{(2)}\right) + \Delta_2\left(-\sin\lambda_{Rj}^{(2)} + \lambda_{Rj}^{(2)}\cos\lambda_{Rj}^{(2)}\right)\right]. \quad (24)$$

Тоді для першої складової температури:

$$\vartheta_{1T}^{(1)}(r,\tau) = T_{r1}^{(1)} - T_{z0} = \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{\infty} M_{jT}\Delta_3(\mu_{jT})\sin\left(\frac{\mu_{jT}}{\sqrt{a_T^{(1)}}} r\right) e^{-\mu_{jT}^2 \tau};$$

$$\vartheta_{1Y}^{(2)}(r,\tau) = T_{r1}^{(2)} - T_{z0} = \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{\infty} M_{jT}\left[\Delta_{1T}(\mu_{jT})\cos\left(\frac{\mu_{jT}}{\sqrt{a_T^{(2)}}} r\right) + \Delta_{2T}(\mu_{jT})\sin\left(\frac{\mu_{jT}}{\sqrt{a_T^{(2)}}} r\right)\right] e^{-\mu_{jT}^2 \tau}. \quad (25)$$

Аналогічно до (23), для температури, позначивши $\lambda_{RjT}^{(i)} = \dfrac{\mu_{jT} R}{\sqrt{a_T^{(i)}}}$, отримаємо

$$\left(T_{r1}^{(2)} - T_{z0}\right)\Big|_{\bar r=1} = \frac{1}{R}\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{B}_{1jT}^{(2)} e^{-\mu_{jT}^2 \tau}, \quad \tilde{B}_{1jT}^{(2)} = \left[A_{1jT}^{(2)}\cos\left(\lambda_{RjT}^{(2)}\right) + B_{1jT}^{(2)}\sin\left(\lambda_{RjT}^{(2)}\right)\right] \quad (26)$$

$$\frac{\partial T_1^{(2)}}{\partial r}\Big|_{\bar r=1} = \frac{1}{R^2}\sum_{j=1}^{\infty} G_{11jT}^{(2)} e^{-\mu_{jT}^2 \tau},$$

$$G_{11jT}^{(2)} = M_{jT}\left[-\Delta_{1T}\left(\cos\lambda_{RjT}^{(2)} + \lambda_{RjT}^{(2)}\sin\lambda_{RjT}^{(2)}\right) + \Delta_{2T}\left(-\sin\lambda_{RjT}^{(2)} + \lambda_{RjT}^{(2)}\cos\lambda_{RjT}^{(2)}\right)\right].$$

Тоді $c_2^{(2)}(r,\tau) = \dfrac{1}{r}\left\{\sum_{j=1}^{\infty} A_{2j}^{(2)}\cos\lambda_j^{(2)} r + B_{2j}^{(2)}\sin\lambda_j^{(2)} r\right\} e^{-\mu_j^2 \tau}$, а похідна

$$\frac{\partial c_2^{(2)}(r,\tau)}{\partial r} = \frac{1}{R^2 \bar r^2}\sum_{j=1}^{n} e^{-\mu_j^2 \tau}\left[-A_{2j}^{(2)}\left(\cos\lambda_{Rj}^{(2)}\bar r + \lambda_{Rj}^{(2)}\bar r\sin\lambda_{Rj}^{(2)}\bar r\right) + B_{2j}^{(2)}\left(-\sin\lambda_{Rj}^{(2)}\bar r + \lambda_{Rj}^{(2)}\bar r\cos\lambda_{Rj}^{(2)}\bar r\right)\right].$$

Задовольнивши умові симетрії ($\dfrac{\partial c_2^{(2)}}{\partial r}\Big|_{\bar r = r_*} = 0$) при $r = r_*$, отримаємо $A_{2j}^{(2)} = B_{2j}^{(2)} \cdot R_{1j}$, де $R_{1j} = \dfrac{\left(-\sin\lambda_{Rj}^{(2)}\bar r_* + \lambda_{Rj}^{(2)}\bar r_*\cos\lambda_{Rj}^{(2)}\bar r_*\right)}{\left(\cos\lambda_{Rj}^{(2)}\bar r_* + \lambda_{Rj}^{(2)}\bar r_*\sin\lambda_{Rj}^{(2)}\bar r_*\right)}$. Для температурної складової $A_{2jT}^{(2)} = B_{2jT}^{(2)} \cdot R_{1jT}$, де $R_{1jT} = \dfrac{\left(-\sin\lambda_{RjT}^{(2)}\bar r_* + \lambda_{RjT}^{(2)}\bar r_*\cos\lambda_{RjT}^{(2)}\bar r_*\right)}{\left(\cos\lambda_{RjT}^{(2)}\bar r_* + \lambda_{RjT}^{(2)}\bar r_*\sin\lambda_{RjT}^{(2)}\bar r_*\right)}$.

Тоді $c_2^{(2)}(r,\tau) == \dfrac{1}{R\bar{r}} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} B_{2j}^{(2)} \left[R_{1j} \cos\lambda_{Rj}^{(2)}\bar{r} + \sin\lambda_{Rj}^{(2)}\bar{r} \right] \right\} e^{-\mu_j^2\tau}$,

$$c_2^{(2)}\Big|_{\bar{r}=1} = \frac{1}{R}\sum_{j=1}^{\infty} B_{2j}^{(2)} G_{21j}^{(2)} e^{-\mu_j^2\tau} \ , \quad G_{21j}^{(2)} = \left[\frac{\sin\lambda_{Rj}^{(2)}(1-\bar{r}_*) + \lambda_{Rj}^{(2)}\bar{r}_* \cos\lambda_{Rj}^{(2)}(1-\bar{r}_*)}{\cos\lambda_{Rj}^{(2)}\bar{r}_* + \lambda_{Rj}^{(2)}\bar{r}_* \sin\lambda_{Rj}^{(2)}\bar{r}_*} \right]; \quad (27)$$

$$\frac{\partial c_2^{(2)}}{\partial\bar{r}}\Big|_{\bar{r}=1} = \frac{1}{R^2}\sum_{j-1}^{\infty} B_{2j}^{(2)} G_{22j}^{(2)} e^{-\mu_j^2\tau}, \ G_{22j}^{(2)} = \frac{\left[\lambda_{Rj}^{(2)}(1-\bar{r}_*)\cos\lambda_{Rj}^{(2)}(1-\bar{r}_*) - \left(1+\lambda_{Rj}^{(2)2}\bar{r}_*\right)\sin\lambda_{Rj}^{(2)}(1-\bar{r}_*)\right]}{\left(\cos\lambda_{Rj}^{(2)}\bar{r}_* + \lambda_{Rj}^{(2)}\bar{r}_* \sin\lambda_{Rj}^{(2)}\bar{r}_*\right)}. \ (28)$$

Прийнявши для температурної складавої: $\vartheta_T^{(2)} = \vartheta_{1T}^{(2)} + T_2^{(2)}$ Позначимо

$$T_2^{(2)}\Big|_{\bar{r}=1} == \frac{1}{R}\sum_{j=1}^{\infty} B_{2jT}^{(2)} G_{21jT}^{(2)} e^{-\mu_{jT}^2\tau} \ , G_{21jT}^{(2)} = \left[\frac{\sin\lambda_{RjT}^{(2)}(1-\bar{r}_*) + \lambda_{RjT}^{(2)}\bar{r}_* \cos\lambda_{Rj}^{(2)}(1-\bar{r}_*)}{\cos\lambda_{RjT}^{(2)}\bar{r}_* + \lambda_{RjT}^{(2)}\bar{r}_* \sin\lambda_{Rj}^{(2)}\bar{r}_*} \right]; \quad (29)$$

$$\frac{\partial T_2^{(2)}}{\partial\bar{r}}\Big|_{\bar{r}=1} = \frac{1}{R^2}\sum_{j-1}^{\infty} B_{2jT}^{(2)} G_{22jT}^{(2)} e^{-\mu_{jT}^2\tau}, \ G_{22jT}^{(2)} = \frac{\left[\lambda_{RjT}^{(2)}(1-\bar{r}_*)\cos\lambda_{RjT}^{(2)}(1-\bar{r}_*) - \left(1+\lambda_{RjT}^{(2)2}\bar{r}_*\right)\sin\lambda_{RjT}^{(2)}(1-\bar{r}_*)\right]}{\left(\cos\lambda_{RjT}^{(2)}\bar{r}_* + \lambda_{RjT}^{(2)}\bar{r}_* \sin\lambda_{RjT}^{(2)}\bar{r}_*\right)}, \quad (30)$$

$$\left(T_1^{(2)} + T_2^{(2)}\right)\Big|_{\bar{r}=1} - T_{z0} = \frac{1}{R}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\tilde{B}_{1jT}^{(2)} + B_{2jT}^{(2)} G_{21jT}^{(2)}\right) e^{-\mu_{jT}^2\tau} \ . \quad (31)$$

Величини $B_{2j}^{(2)}$, $B_{2jT}^{(2)}$ визначимо з граничних умов для $r = R$ конвективного тепломасообміну зернини з міжзерновим середовищем, в які входить концентрація та температура міжзернового середовища c_z, T_z. З розв'язку рівнянь (4) з граничними умовами на поверхнях шару (8), (9) знаходимо $c_z(z,\tau)$, $T_z(z,\tau)$ для міжзернового середовища шару зерна .

Потік тепла та вологи, що фігурує в рівняннях (6), визначається через характеристики зернини:

$$J_{rT} = \tilde{a}_T \frac{\tilde{\alpha}_T}{R}^{(2)} \frac{\partial T_r^{(2)}}{\partial\bar{r}}\Big|_{\bar{r}=1}, \quad J_r = \tilde{a}_r \frac{D_r^{(2)}}{R}\frac{\partial c_r^{(2)}}{\partial\bar{r}}\Big|_{\bar{r}=1} .$$

Введемо функції:

$$w_c(\bar{z}, Fo_{zc}) = \frac{c_z(\bar{z},\tau) - c_{z0}}{c_{z0}} e^{-\frac{Pe_{zc}\bar{z}}{2} + \frac{Pe_{zc}^2}{4}Fo_{zc}},$$

$$w_T(\bar{z}, Fo_T) = \frac{T_z(\bar{z},\tau) - T_{z0}}{T_{z0}} e^{-\frac{Pe_{zT}\bar{z}}{2} + \frac{Pe_{zT}^2}{4}Fo_{zT}}. \quad (32)$$

Тоді рівняння (6) для концентрації і температури в безрозмірних змінних з врахуванням виразів для потоків, викликаних випаровуванням з зернини, приводяться до канонічного вигляду:

$$\frac{\partial w_T(\bar{z},Fo_T)}{\partial Fo_T}=\frac{\partial^2 w_T(\bar{z},Fo_T)}{\partial \bar{z}^2}+\tilde{\tilde{\alpha}}_T\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{T_{z0}}(G^{(2)}_{11jT}+B^{(2)}_{2jT}G^{(2)}_{22jT})e^{-\frac{Pe_{zT}\bar{z}}{2}+\left(\frac{Pe^2_{zT}}{4}-\frac{\mu^2_{jT}L^2}{a_{Tz}}\right)Fo_{zT}},$$

$$\frac{\partial w_c(\bar{z},Fo_{zc})}{\partial Fo}=\frac{\partial^2 w_c(\bar{z},Fo_{zc})}{\partial \bar{z}^2}+\tilde{\tilde{\alpha}}_c\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{c_{z0}}\left(G^{(2)}_{11j}+B^{(2)}_{2j}G^{(2)}_{22j}\right)e^{-\frac{Pe_{zc}\bar{z}}{2}+\left(\frac{Pe^2_{zc}}{4}-\frac{\mu^2_{jc}L^2}{a_{cz}}\right)Fo_{zc}}, \qquad (33)$$

де $\tilde{\tilde{\alpha}}_T=-\tilde{\alpha}_T\,\frac{a_T^{(2)}}{a_{Tz}}\frac{L^2}{R^2}$, $\tilde{\tilde{\alpha}}_c=-\tilde{\alpha}_r\,\frac{\tilde{D}^{(2)}_c}{D_z}\frac{L^2}{R^2}$.

Початкова і граничні умови відповідно співвідношень (32) будуть такими:

$$w_c(\bar{z},0)=\frac{c_{z0}-c_{z0}}{c_{z0}}e^{-\frac{Pe_{zc}\bar{z}}{2}}=0,\quad w_T(\bar{z},0)=\frac{T_{z0}-T_{z0}}{T_{z0}}e^{-\frac{Pe_{zT}\bar{z}}{2}}=0; \qquad (34)$$

$$w_c(1,Fo_{z,c})=\frac{c_f(1,Fo_{cz})-c_{z0}}{c_{z0}}e^{-\frac{Pe_{zc}}{2}+\frac{Pe^2_{zc}}{4}Fo_{zc}};\quad w_T(1,Fo_{zT})=\frac{T_f(1,Fo_{zT})-T_{z0}}{T_{z0}}e^{-\frac{Pe_{zT}}{2}+\frac{Pe^2_{zT}}{4}Fo_{zT}}; \qquad (35)$$

$$w_c(0,Fo_m)=\frac{c_w(0,Fo_{zc})-c_{z0}}{c_{z0}}e^{\frac{Pe^2_{zc}}{4}Fo_{zc}},\ w_T(0,Fo_{zT})=\frac{T_w(0,Fo_{zT})-T_{z0}}{T_{z0}}e^{\frac{Pe^2_{zT}}{4}Fo_{zT}}. \qquad (36)$$

Враховуючи заміни (32), отримаємо вирази для T_z-T_{z0}, c_z-c_{z0}, які необхідні для визначення розподілів концентрації вологи, температури та потоків вологи і температури з зернини при випаровуванні.

Згідно принципу подібності вирази для c_z-c_{z0}, T_z-T_{z0} можна записати

$$c_z(\bar{z},Fo_{zc})-c_{z0}=\{\,A_{c2}f_{Ac2}(\bar{z},Fo_{zc},\tilde{\Omega}_{2c},)+A_{c1}f_{Ac1}(\bar{z},Fo_{zc},\tilde{\Omega}_{1c})+c_{z0}\left[f_{2c_0}(\bar{z},Fo_{zc})+f_{1c_0}(\bar{z},Fo_{zc})\right]+$$
$$+\tilde{\tilde{\alpha}}_c\sum_{j=1}^{n}(G^{(2)}_{11jc}+B^{(2)}_{2jc}G^{(2)}_{22jc})f^{(J)}_{3c}(Pe_{zc},\mu_j,Fo_{zc})\,\}e^{\frac{Pe_{zc}\bar{z}}{2}-\frac{Pe^2_{zc}}{4}Fo_{zc}}. \qquad (37)$$

$$T_z(\bar{z},Fo_{zc})-T_{z0}=\{\,A_{T2}f_{A2T}(\bar{z},Fo_{zT},\tilde{\Omega}_{2T})+A_{T1}f_{A1T}(\bar{z},Fo_{zT},\tilde{\Omega}_{1T})+T_{z0}\left[f_{2T_0}(\bar{z},Fo_{zT})+\right.$$
$$\left.+f_{1T_0}(\bar{z},Fo_{zT})\right]+\tilde{\tilde{\alpha}}_T\sum_{j=1}^{n}(G^{(2)}_{11jT}+B^{(2)}_{2jT}G^{(2)}_{22jT})f^{(J)}_{3T}(Pe_{zT},\mu_{jT},Fo_{zT})\,\}e^{\frac{Pe_{zT}\bar{z}}{2}-\frac{Pe^2_{TT}}{4}Fo_{zT}}, \qquad (38)$$

де $f_{A2l}(\bar{z},Fo_{zl},\Omega_{2l})=\sin(\tilde{\Omega}_{2l}Fo_{zl})\bar{z}+$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin(n\pi\bar{z})\frac{\left[-(n\pi)^2\tilde{\Omega}_{2l}\cos(\tilde{\Omega}_{2l}Fo_{zl})-\tilde{\Omega}^2_{2l}\sin(\tilde{\Omega}_{2l}Fo_{zl})+\tilde{\Omega}_{2l}(n\pi)^2e^{-(n\pi)^2Fo_{zl}}\right]}{(n\pi)\left((n\pi)^2+\tilde{\Omega}^2_{2l}\right)};$$

$$f_{2l_0}(\bar{z},Fo_{zl})=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(n\pi\bar{z})\exp\left(-(n\pi)^2Fo_{\tau l}\right)}{(n\pi)}-\bar{z},$$

$$f_{A1l}\left(\bar{z}, Fo_{zl}, \Omega_{1l}\right) = \sin\left(\widetilde{\Omega}_{1l} Fo_{zl}\right)\left(1-\bar{z}\right) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1}\frac{\sin\left(n\pi\left(1-\bar{z}\right)\right)}{\left(\left(n\pi\right)^4 + \widetilde{\Omega}_{1l}^2\right)}\times$$

$$\times\frac{\left[\tilde{\Omega}_{1l}\left(n\pi\right)^2 e^{-\left(n\pi\right)^2 Fo_{zl}} - \left(n\pi\right)^2\tilde{\Omega}_{1l}\cos\left(\tilde{\Omega}_{1l}Fo_{zl}\right) - \tilde{\Omega}_{1l}^2\sin\left(\tilde{\Omega}_{1l}Fo_{zl}\right)\right]}{\left(n\pi\right)},$$

$$f_{1l_0}\left(\bar{z}, Fo_{zl}\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1}\frac{\sin\left(n\pi\left(1-\bar{z}\right)\right)\exp\left(-\left(n\pi\right)^2 Fo_{zl}\right)}{n\pi} - \left(1-\bar{z}\right);$$

$$f_{3l}^{(J)}\left(\bar{z}, Pe_{zl}\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\pi\right)^2\left(-1\right)^n\left[\frac{e^{\left(\frac{Pe_{zl}^2}{4}-\frac{\mu_j^2 L^2}{a_{lz}}\right)Fo_{zc}} - e^{-\left(n\pi\right)_{nl}^2 Fo_{zl}}}{\left(\frac{Pe_{zl}^2}{4}-\frac{\mu_{jl}^2 L^2}{a_{lz}}+\left(n\pi\right)^2\right)\left(\frac{Pe_{zl}^2}{4}+\left(n\pi\right)^2\right)}\right]\left(\left(-1\right)^n - 1\right)\sin\left(n\pi\bar{z}\right)\right). \quad (39)$$

Тут, якщо $l = c$, формули відносяться до концентрації, а якщо $l = T$ — до температури.

Перші два члени цих виразів дають вклад зовнішнього навантаження, третій — вклад початкових умов, четвертий — вклад джерел за рахунок випаровування. Врахуємо формули (29) та (46),отримаємо

$$T^{(2)} - T_z = \frac{1}{R}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\widetilde{B}_{1jT}^{(2)} + B_{2jT}^{(2)}G_{21jT}^{(2)}\right)e^{-\mu_{jT}^2\tau} - \left\{A_{T2}f_{A2T}\left(\bar{z}, Fo_{zT}, \widetilde{\Omega}_{2T}\right) + A_{T1}f_{A1T}\left(\bar{z}, Fo_{zT}, \widetilde{\Omega}_{1T}\right) + \right.$$

$$\left. + T_{z0}f_{4tz0}\left(\bar{z}, Fo_{zT}\right) + \widetilde{\widetilde{\alpha}}_c\sum_{j=1}^{n}\left(G_{11jT}^{(2)} + B_{2jT}^{(2)}G_{22jT}^{(2)}\right)f_{3Tj}^{(J)}\left(Pe_{zT}, \mu_{jT}, Fo_{zT}\right)\right\}e^{\frac{Pe_{zT}\bar{z}}{2} - \frac{Pe_{TT}^2}{4}Fo_{zT}}, \quad (40)$$

де $f_{4Tz0}\left(\bar{z}, Fo_{zT}\right) = \left[f_{2T_{z0}}\left(\bar{z}, Fo_{zT}\right) + f_{1T_{z0}}\left(\bar{z}, Fo_{zT}\right)\right]$.

Так як теплові потоки мають визначальний вплив на масоперенос при випаровуванні, то визначимо $B_{2jT}^{(2)}$. Підставимо вирази для $\frac{\partial T_r^{(2)}}{\partial \bar{r}}\Big|_{\bar{r}=1}$, $T_r^{(2)}\Big|_{\bar{r}=1}$ і T_z.в крайову умову (11), отримаємо на основі рівняння теплообміну на границі зернини вираз:

$$\frac{1}{R^2}\sum_{j=1}^{n}e^{-\mu_{jT}^2\tau}\left(G_{11jT}^{(2)} + B_{2jT}^{(2)}G_{22jT}^{(2)}\right) = H_T^{(2)}\left\{\left\{\frac{1}{R}\sum_{j=1}^{\infty}\left[\widetilde{B}_{1jT}^{(2)} + B_{2jT}^{(2)}G_{21jT}^{(2)}\right]e^{-\mu_{jT}^2\tau} - \left\{A_{T2}f_{A2T}\left(\bar{z}, Fo_{zT}, \widetilde{\Omega}_{2T}\right) + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + A_{T1}f_{A1T}\left(\bar{z}, Fo_{zT}, \widetilde{\Omega}_{1T}\right) + T_{z0}f_{4Tz0}\left(\bar{z}, Fo_{zT}\right) + \widetilde{\widetilde{\alpha}}_c\sum_{j=1}^{n}\left(G_{11jT}^{(2)} + B_{2jT}^{(2)}G_{22jT}^{(2)}\right)e^{-\mu_{jT}^2\tau}f_{3Tj}^{(J)}\right\}e^{\frac{Pe_{zT}\bar{z}}{2} - \frac{Pe_{zT}^2}{4}Fo_{zT}}\right\}\right\}.$$

Прирівняємо вирази при однакових $e^{-\mu_{jT}^2\tau}$. Значенню $j = 1$ відповідає нульовий корінь характеристичного рівняння (18). Для $\mu_{1T} = 0$ отримаємо:

$$\frac{1}{R^2}(G^{(2)}_{111T}+B^{(2)}_{21T}G^{(2)}_{221T})=H^{(2)}_T\left\{\left\{\frac{1}{R}\left\lfloor B^{(2)}_{11T}+B^{(2)}_{21T}G^{(2)}_{211T}\right\rfloor-\left\{\ A_{T2}f_{A2T}\left(\bar z,Fo_{zT},\widetilde\Omega_{2T}\right)+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+A_{T1}f_{A1T}\left(\bar z,Fo_{zT},\widetilde\Omega_{1T}\right)+T_{z0}f_{4T_{z0}}\left(\bar z,Fo_{zT}\right)+\tilde{\tilde\alpha}_T(G^{(2)}_{111T}+B^{(2)}_{21T}G^{(2)}_{221T})f^{(J)}_{3T1}\right\}e^{\frac{Pe_{zT}\bar z}{2}-\frac{Pe^2_{zT}}{4}Fo_{zT}}\right\}\right\},$$

$$\text{де } f^{(J)}_{3T1}=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n\pi)^2\left[\left((-1)^n-1\right)\right]\left[e^{\left(\frac{Pe^2_{zT}}{4}\right)Fo_{zT}}-e^{-(n\pi)^2Fo_{zT}}\right]\sin n\pi\bar z\right\}/\left(\frac{Pe^2_{zT}}{4}+(n\pi)^2\right)^2.$$

Вираз $f^{(J)}_{3T1}$ визначає вклад температурного джерельного члена, що відповідає нульовому значенню характеристичного показника $\mu_{1T}=0$. Згрупуємо вирази при $B^{(2)}_{21T}$. Тоді

$$B^{(2)}_{21T}(\bar r,\bar z,\tau)=\frac{-\frac{1}{R^2}G^{(2)}_{111T}+H^{(2)}_T\left\{\frac{1}{R}\tilde B^{(2)}_{11T}-\left\langle A_{T1}f_{A1T}+A_{T2}f_{A2T}+T_{z0}f_{4Tz0}+\tilde{\tilde a}_TG^{(2)}_{111T})f^{(J)}_{3T1}\right\rangle e^{\left(\frac{Pe_{zT}}{2}\bar z-\frac{Pe^2_{zT}}{4}Fo_{zT}\right)}\right\}}{\left[\frac{1}{R^2}G^{(2)}_{221T}-H^{(2)}_T\left\{\frac{1}{R}G^{(2)}_{211T}-\left\langle\tilde{\tilde a}_TG^{(2)}_{221T})f^{(J)}_{3T1}\right\rangle e^{\left(\frac{Pe_{zT}}{2}\bar z-\frac{Pe^2_{zT}}{4}Fo_{zT}\right)}\right\}\right]}.$$

Для $j\neq 0$ згрупувавши вирази при $B^{(2)}_{2jT}$, отримаємо

$$B^{(2)}_{2jT}=\frac{\left\{-\frac{1}{R^2}G^{(2)}_{11jT}+H^{(2)}_T\left[\left[\frac{1}{R}\widetilde B^{(2)}_{1jT}-\tilde{\tilde a}_TG^{(2)}_{11jT}f^{(J)}_{3Tj}e^{\left(\frac{Pe_{zT}}{2}\bar z-\frac{Pe^2_{zT}}{4}Fo_{zT}\right)}\right]\right]\right\}}{\left\{\frac{1}{R^2}G^{(2)}_{22jT}-H^{(2)}_T\left[\left[\frac{1}{R}G^{(2)}_{21jT}-\tilde{\tilde a}_TG^{(2)}_{22jT}f^{(J)}_{3Tj}e^{\left(\frac{Pe_{zT}}{2}\bar z-\frac{Pe^2_{zT}}{4}Fo_{zT}\right)}\right]\right]\right\}},$$

$$\text{де } f^{(J)}_{3Tj}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n\pi)^2\left[\frac{e^{\left(\frac{Pe^2_{zT}}{4}-\frac{\mu^2_{jT}L^2}{a_{cT}}\right)Fo_{zT}}-e^{-(n\pi)^2Fo_{zT}}}{\left(\frac{Pe^2_{zT}}{4}-\frac{\mu^2_{jT}L^2}{a_{Tz}}+(n\pi)^2\right)\left(\frac{Pe^2_{zT}}{4}+(n\pi)^2\right)}\right]\left[\left((-1)^n-1\right)\right]\sin n\pi\bar z\ .(43)$$

Отримані формули дають явну залежність температури та потоку тепла за товщиною зернини від температурних збурень зовнішнього середовища в часі , швидкості продуву та від висоти розміщення зернини в шарі.

На основі проведених міркувань потік вологи на поверхні зернини, розміщеної на висоті $\bar{z}$ шару зерна, в довільний момент часу становить

$$\delta_T \, \widetilde{D}^{(2)} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial r}\Big|_{r=R} = \delta_T \, \widetilde{D}^{(2)} \sum_{j=1}^{n} e^{-\frac{\mu_{jT}^2 L^2}{a_{Tz}} Fo_{zT}} \left(G_{11jT}^{(2)} + B_{2jT}^{(2)} G_{22jT}^{(2)}\right),$$

де δ_T — термоградієнтний коефіцієнт. Підставимо даний вираз в крайову умову конвективного масообміну зернини з міжзерновим середовищем , враховуючи, що потік вологи, який фігурує в граничній умові, визначений на основі розв’язку температурної задачі, і має вигляд

$$J_r + \delta_T J_T = \frac{\widetilde{D}^{(2)}}{R^2} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ e^{-\frac{\mu_{jc}^2 L^2}{D_z} Fo_{zc}} \left[G_{11j}^{(2)} + B_{2j}^{(2)} G_{22j}^{(2)} \right] + \delta_T e^{-\frac{\mu_{jT}^2 L^2}{a_{zT}} Fo_{zT}} \left[G_{11jT}^{(2)} + B_{2jT}^{(2)} G_{22jT}^{(2)} \right] \right\}, \quad (44)$$

отримаємо з умови конвективного масообміну вираз для визначення $B_{2j}^{(2)}$.

Запишемо умову конвективного масообміну з врахуванням формули (45) у вигляді:

$$\frac{1}{R^2} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ e^{-\frac{\mu_j^2 L^2}{D_z} Fo_{zc}} \left[G_{11j}^{(2)} + B_{2j}^{(2)} G_{22j}^{(2)} \right] + \delta_T e^{-\frac{\mu_{jT}^2 L^2}{a_{zT}} \frac{Fo_{zT}}{Fo_{zc}} Fo_{zc}} \left[G_{11jT}^{(2)} + B_{2jT}^{(2)} G_{22jT}^{(2)} \right] \right\} =$$

$$= H_c^{(2)} \left\{ \left\{ \frac{1}{R} \sum_{j=1}^{\infty} (B_{1j} + B_{2j}^{(2)} G_{21j}) e^{-\mu_{jc}^2 \tau} - \left[A_{c2} f_{A2c}\left(\bar{z}, Fo_{zc}, \widetilde{\Omega}_{2c}\right) + A_{c1} f_{A1c}\left(\bar{z}, Fo_{zc}, \widetilde{\Omega}_{1c}\right) + c_{z0} f_{4cz0}\left(\bar{z}, Fo_{zc}\right) + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \widetilde{\widetilde{\alpha}}_c \sum_{j=1}^{n} (G_{11jc}^{(2)} + B_{2jc}^{(2)} G_{22jc}^{(2)}) f_{3cj}^{(J)}\left(Pe_{zc}, \mu_j, Fo_{zc}\right) e^{\left(\frac{Pe_{zc}}{2} \bar{z} - \frac{Pe_{zc}^2}{4} Fo_{zc}\right)} \right]\right\}\right\},$$

де $H_c^{(2)} = \dfrac{\widetilde{\alpha}^{(2)} R^2}{\widetilde{D}^{(2)}}$, $\widetilde{\alpha}^{(2)}$— коефіцієнт масообміну на поверхні зернини, $f_{4cz0}\left(\bar{z}, Fo_{zcT}\right) = \left[f_{2c_{z0}}\left(\bar{z}, Fo_{zc}\right) + f_{1c_{z0}}\left(\bar{z}, Fo_{zc}\right)\right]$.

Прирівнявши вирази для $e^{\mu_1 \tau}$ отримаємо

$B_{21}^{(2)} = \left(B_{211}^{(2)} + B_{212}^{(2)}\right) / B_{213}^{(2)}$;

$$B_{211}^{(2)} = -\frac{1}{R^2} \left[G_{111c}^{(2)} + \delta_T \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\mu_{jT}^2} \left(G_{11jT}^{(2)} + B_{21T}^{(2)} G_{22jT}^{(2)} \right) \right];$$

$$B_{212}^{(2)} = H_c^{(2)} \left\{ \frac{1}{R} B_{11}^{(2)} - \left\langle A_{c1} f_{A1c} + A_{c2} f_{A2c} + c_{z0} f_{4cz0}\left(\bar{z}, Fo_{zc}\right) + \tilde{\tilde{a}}_c G_{111}^{(2)}) f_{3c1}^{(J)} \right\rangle e^{\left(\frac{Pe_{zc}}{2}\bar{z} - \frac{Pe_{zc}^2}{4} Fo_{zc}\right)} \right\};$$

$$B_{213}^{(3)} = \left\{ \frac{1}{R^2} G_{221}^{(2)} - H_c^{(2)} \left[\frac{1}{R} G_{211}^{(2)} - \left(\tilde{\tilde{a}}_c G_{221}^{(2)} f_{3c1}^{(J)} \right) e^{\left(\frac{Pe_{zc}}{2}\bar{z} - \frac{Pe_{zc}^2}{4} Fo_{zc}\right)} \right] \right\}.$$

$$f_{3c1}^{(J)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n\pi)^2 \left[\frac{e^{\left(\frac{Pe_{zc}^2}{4}\right) Fo_{zc}} - e^{-(n\pi)^2 Fo_{zc}}}{\left(\frac{Pe_{zc}^2}{4} + (n\pi)^2 \right)^2} \right] \left[\left((-1)^n - 1 \right) \right] \sin n\pi\, \bar{z}$$

Для $j \neq 0$ отримаємо

$$B_{2j}^{(2)} = \left[\frac{ -\frac{1}{R^2}\left[G_{11j}^{(2)} \right] + H_c^{(2)} \left\{ \frac{1}{R} B_{1j}^{(2)} - \left\langle \tilde{\tilde{a}}_c G_{22j}^{(2)}) f_{3cj}^{(J)} \right\rangle e^{\left(\frac{Pe_{zc}}{2}\bar{z} - \frac{Pe_{zc}^2}{4} Fo_{zc}\right)} \right\} }{ \frac{1}{R^2} G_{22j}^{(2)} - H_c^{(2)} \left\{ \frac{1}{R} G_{21j}^{(2)} - \left\langle \tilde{\tilde{a}}_c G_{22j}^{(2)}) f_{3cj}^{(J)} \right\rangle e^{\left(\frac{Pe_{zc}}{2}\bar{z} - \frac{Pe_{zc}^2}{4} Fo_{zc}\right)} \right\} } \right], \qquad (45)$$

$$f_{3cj}^{(J)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n\pi)^2 \left[\frac{ e^{\left(\frac{Pe_{zc}^2}{4} - \frac{\mu_{jc}^2 L^2}{a_{cz}} \right) Fo_{zc}} - e^{-(n\pi)^2 Fo_{zc}} }{ \left(\frac{Pe_{zc}^2}{4} - \frac{\mu_{jc}^2 L^2}{a_{cz}} + (n\pi)^2 \right) \left(\frac{Pe_{zc}^2}{4} + (n\pi)^2 \right) } \right] \left[\left((-1)^n - 1 \right) \right] \sin n\pi \bar{z}$$

На основі отриманих формул розподіл концентрації вологи та температури і їх похідні в ядрі та оболонці зернини визначаються так

$$c^{(i)}(r) - c_{z0} = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\mu_{jc}{}^2 \tau} \left[\left(A_{1j}{}^{(i)} + A_{2j}{}^{(i)} \right) \cos \lambda_j^{(i)} r + \left(B_{1j}{}^{(i)} + B_{2j}^{(i)} \right) \sin \lambda_j^{(i)} r \right],$$

$$T^{(i)}(r) - T_{z0} = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\mu_{jT}{}^2 \tau} \left[\left(A_{1jT}{}^{(i)} + A_{2jT}{}^{(i)} \right) \cos \lambda_{jT}^{(i)} r + \left(B_{1jT}{}^{(i)} + B_{2jT}^{(i)} \right) \sin \lambda_{jT}^{(i)} r \right]$$

На основі отриманих формул визначимо переміщення, деформації та напруження в зернині в залежності від параметрів режиму осушення і характеристик зерна.

2. Результати числових досліджень

Дослідження впливу температури на сушіння з метою оптимізації режимів керування процесом проводилося для шару зерна товщиною L=1м, середній радіус зернини R=2.00086 10^{-3}м, межа неоднорідності r_*=0.9R. На основі праць [3-14] для такого матеріалу: коефіцієнт теплоємності c_p =0.5ккал/(кг °К), коефіцієнти теплопровідності λ_z=0.16 Вт/(м °К), $\lambda^{(2)}$=0.2 Вт/(м °К), температуропровідності a_{Tz}=4.64253 10^{-5} м^2/с, $\tilde{a}_T^{(2)}$=4.17827 10^{-5} м^2/с в міжзерновій області та в оболонці зернини відповідно. Температура та концентрація вологи у початковий момент часу t_{z0}=18°С, $t^{(i)}$=20°С, c_0=5 10^{-4} кг/м^3 , концентрація насиченої пари c_z^n=1.34 10^{-2} кг/м^3, швидкість продуву зерна υ=10^{-2}м/с, амплітуди збурень температури A_{T1}=5°С.

Для вказаних вхідних параметрів отримано результати, наведені в таблицях 1 і 2.

Таблиця 1

Розподіли зміни температури $T^{(i)} - T_{z0}$ за безрозмірним радіусом зернини $\bar{r}$ в часі τ для значення безрозмірної координати за товщиною шару $\bar{z}$=0.5. Значення τ=5, 6, 7, 8год. Відповідно. $\Omega_{iT} = 3\pi/\tau_n$, де τ_n=20год.

$\bar{r} \setminus \tau$	τ1	τ2	τ3	τ4
0.1	1.65085e-2	5.17707e-3	1.62353e-3	5.09142e-4
0.2	1.64260e-2	5.15121e-3	1.61542e-3	5.06598e-4
0.3	1.62891e-2	5.10827e-3	1.60196e-3	5.02376e-4
0.4	1.60986e-2	5.04853e-3	1.58322e-3	4.96500e-4
0.5	1.58556e-2	4.97232e-3	1.55933e-3	4.89006e-4
0.6	1.55616e-2	4.88012e-3	1.53041e-3	4.79938e-4
0.7	1.52183e-2	4.77247e-3	1.49665e-3	4.69351e-4
0.8	1.48278e-2	4.65000e-3	1.45824e-3	4.57307e-4
0.9	1.43923e-2	4.51345e-3	1.41542e-3	4.43878e-4

Таблиця 2

Розподіли зміни температури $T^{(i)} - T_{z0}$ за безрозмірним радіусом зернини $\bar{r}$ в часі τ для значення безрозмірної координати за товщиною шару $\bar{z}$=0.99 для збурень A_{T1}=-10. Значення $\bar{r}$=0.3, 0.89, 0.93, 0.95, 0.99 відповідно. $\Omega_{iT} = 3\pi/\tau_n$, де τ_n=20год.

$\tau \setminus \bar{r}$	$\bar{r}1$	$\bar{r}2$	$\bar{r}3$	$\bar{r}4$	$\bar{r}5$
1	-1.27792e0	-9.16302e0	-9.88644e0	-9.64530e0	-9.19226e0
2	-9.6691e-1	-1.28963e0	-2.01305e0	-1.93743e0	-1.79535e0
3	616825e-2	1.06736e-1	4.56051e-1	4.79766e-1	5.24321e-1
4	1.93437e-2	5.06886e-1	1.23036e0	1.23780e0	1.25177e0

5	6.06620e-3	6.49779e-1	1.47319e0	1.47552e0	1.47990e0
6	1.90237e-3	8.57293e-1	1.54934e0	1.55007e0	1.55145e0
7	5.96584e-4	8.48786e-1	1.57322e0	1.57345e0	1.57388e0
8	1.87089e-4	8.66879e-1	1.58071e0	1.58078e0	1.58092e0
9	5.86714e-5	8.59642e-1	1.58306e0	1.58308e0	1.58312e0
10	1.83994e-5	8.56431e-1	1.58379e0	1.58380e0	1.58381e0

Висновки. 1) Встановлено зміну температури та концентрації вологи в зернині в часі, їх залежність від висоти розміщення зернини в шарі та швидкості продуву. Як концентрація, так і температура зернини є функціями початкових значень, часу, збурюючих осцилюючих функцій концентрації та температури агента сушіння, швидкості продуву міжзернового середовища шару зерна та товщини шару.2) За відомими значеннями концентрації та температури в зерні, знаходимо сумарний потік вологи з зерна в процесі випаровування, який залежиить від термоградієнтного коефіцієнта. Загальний розв'язок для температури та концентрації в часі залежить також від неоднорідності будови зернини за товщиною, а саме, ядра і оболонки та дозволяє дослідити гідродинаміку потоку вологи в залежності від природи зернистого середовища. 3) За зміною концентрації та потоком вологи в зерні визначимо переміщення, деформації та напружений стан зернини в довільній точці по радіусу, в залежності від місця розміщення, часу та неоднорідності структурної будови.

Література

[1] *Егоров Г. А.* Технологические свойства зерна. — М.: Агропромиздат, 1985. — 334 с.

[2] *Беркутова Н. С., Казаков Е. Д.* О морфологическом строении оболочек и химическом составе зерна пшеницы целинного края // «Известия вузов . Пищевая технология». — 1964. — № 4. — С. 17-19.

[3] *Егоров Г. А.* Теплофизические свойства единичного зерна. — М.: Научно технические достижения и передовой опыт в области хлебопродуктов, 1996. — 68 с.

[4] *Єгоров Г. А., Казаков Е. Д., Любушкин В. Т., Широкова Ж. П.* Уточнение расчетных формул площади внешней поверхности и обьема единичного зерна // «Известия вузов. Пищевая технология». — 1969. — № 4. — С. 34-37.

[5] *Егоров Г. А.* О некоторых особенностях увлажнения и обезвоживания зерна // «Известия вузов . Пищевая технология». — 1964. — № 1. — С. 13-18.

[6] *Сажин Б. С.* Основы техники сушки. – М.: Химия, 1984. — 319 с.

[7] *Зимин Е. М., Крутов В. С.* Движение влаги в зерновке при сушке // «Механизация и электрификация сел.хоз-ва». — 2001. — № 4. — С. 11-13.

[8] *Муштаев В. И.* Основные теоретические положения конвективной сушки и уточненный метод расчета сушильных аппаратов. — М.: МИХМ, 1971. — 81 с.

[9] *Фролов В. Ф.* Моделирование сушки дисперсных материалов. — Ленинград: Химия. — 1987. — 206 с.

[10] *Гайвась Б. І., Чапля Є. Я., Логін Г.* Конвективне осушення шару зернистого матеріалу в усталеному режимі // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2013. — Вип. 18. — С. 51-60.

[11] *Гайвась Б. І., Чапля Є. Я.* Конвективне осушення зернистого матеріалу з врахуванням двошарової структури окремої зернини // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2014. — Вип. 20. — С. 69-80.
[12] *Шилов Г. Е.* Введение в теорию линейных пространств. — М.: Гостехиздат, 1956. — 386 с.
[13] *Положий Г. Н.* Уравнения математической физики. — М.: Высшая школа, 1964. — 559 с.
[14] *Голик М. Г. Делидович В. Н.* Научные основы обработки зерна в потоке. — М.: Колос, 1972. — 262 с.
[15] *Дехтяр Р. А.,Сиковский Д. Ф.* Теплообмен в зернистом слое и умеренных числах Рейнольдса // «ТВТ». — 2002. — Т. 10, № 5. — С. 748-755.
[16] *Кулініченко О. Р.* Визначення коефіцієнта опору тертя при турбулентному обтіканні зважених частинок // Харчова промисловість. — 2012. — № 12. — С. 68-71.
[17] *Гайвась Б. І., Чапля Є. Я., Чаплаєв Д. В.* Конвективно-теплове сушіння шару зерна // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2015. — Вип. 21. — С. 39-51.

Grain drying in pulsed regime of drying agent based on the layered structure of a single grain

Bogdana Gayvas, Veronika Dmytruk

In pulsed regime of grain layer drying, on the basis of similarity of processes of heat and mass transfer the solution of the problem on the change of the concentration of moisture and temperature in a single grain in time depending on the depth of its placement in a layer, the heterogeneity of its structure, the rate of blowing the grain layer, the control disturbing functions in the drying environment is constructed. This allows us to study the mode of deformation in view of the strength of grain in order to choose the optimal regime parameters of drying.

Сушка зерна в импульсном режиме агента сушки с учетом слоистости структуры единичного зерна

Богдана Гайвась, Вероника Дмитрук

На основании принципа подобия процессов тепло и массопереноса при импульсной сушке зернистого слоя, построено решение задачи об изменении концентрации влаги и температуры в единичном зерне во времени, в зависимости от глубины расположения его в слое, неоднородности его структуры, скорости продува слоя зерна, управляющих возмущающих функций в сушильной среде. Это дает возможность исследовать напряженно-деформированное состояние в зависимости от прочности зерна с целью выбора оптимальных режимных параметров сушки.

Отримано 12.11.15