УДК 539.3

Поширення хвиль Релея в неферомагнітних діелектриках

Ольга Грицина

Д. ф.-м. н., с. н. с., Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: gryt@cmm.lviv.ua

З використанням нелокальної теорії деформування неферомагнітних поляризовних твердих тіл вивчено закономірності поширення хвиль Релея в пружному півпросторі ідеального діелектрика. Для визначення швидкості цих хвиль отримано відповідне дисперсійне рівняння. Вивчено вплив локального зміщення маси на характеристики поширення хвиль Релея в п'єзоелектричних тілах. Показано, що результатом врахування локального зміщення маси є зменшення їх фазової швидкості в області високих частот, тобто хвилі Релея є дисперсійні. Ці хвилі спричинюють виникнення в околі поверхні тіла повільної електричної хвилі, тобто модель описує прямий п'єзоелектричний ефект.

Ключові слова: нелокальна теорія, діелектричні тіла, локальне зміщення маси, хвилі Релея, дисперсія, прямий п'єзоелектричний ефект.

Вступ. Поверхневі акустичні хвилі, у тому числі хвилі Релея, широко використовують для неруйнівного контролю механічних властивостей матеріалів, в акустоелектронних приладах (акустичних лініях затримки, мікромеханічних фільтрах, електроакустичних перетворювачах, генераторах тощо) [1-5]. У межах класичної теорії пружності поверхневі хвилі Релея характеризуються відсутністю дисперсії, тобто їх фазова швидкість поширення не залежить від частоти, включно до гіперзвукового діапазону [6]. Однак експериментально підтверджено, що в області високих частот фазова швидкість цих хвиль зменшується [7]. Також моделі класичної електропружності не описують виникнення в ізотропних тілах повільної електричної хвилі, спричиненої п'єзоелектричним ефектом. У межах континуального опису для подолання розбіжностей між класичною теорією та результатами експериментів для вивчення закономірностей хвильових процесів застосовують нелокального типу теорії [8-13]. У праці [14] на основі нелокальної моделі механіки зв'язаних полів вивчено вплив локального зміщення маси на параметри поширення хвиль Релея у пружному ізотропному півпросторі. Метою пропонованого дослідження є аналіз впливу локального зміщення маси на дисперсійні властивості хвиль Релея, що поширюються в ідеальних діелектриках із високим рівнем симетрії кристалічної ґратки, а також вивчення можливості опису п'єзоелектричного ефекту у таких тілах. При цьому ґрунтуватимемося на нелокальній теорії деформування твердих неферомагнітних діелектричних тіл, що враховує зв'язок електромеханічних полів із локальним зміщенням маси. Замкнену систему співвідношень згаданої теорії одержано в [15] та узагальнено в монографії [16].

1. Формулювання задачі. Розв'язувальна система рівнянь

Розглянемо пружний півпростір ідеального діелектрика, який у декартовій системі координат (x_1, x_2, x_3) займає область $x_1 \geq 0$, $-\infty < x_i < +\infty$, ($i = 2, 3$). Півпростір є неферомагнітним кубічно-симетричним кристалічним тілом, яке контактує з вакуумом. Його поверхня $x_1 = 0$ вільна від зовнішнього навантаження, а у напрямку осі x_2 із невідомою фазовою швидкістю поширюється монохроматична гармонічна поверхнева хвиля частоти ω. Фазова швидкість хвилі $c_R = \omega/k$ (k — невідоме хвильове число) паралельна до поверхні $x_1 = 0$ півпростору, де її амплітуда набуває максимального значення. Інтенсивність хвилі швидко спадає з віддаленням від поверхні тіла. Приймаємо, що масові сили відсутні, а зовнішня дія, що спричинила хвилю, не залежить від просторової координати x_3.

Запишемо лінеаризовану систему рівнянь нелокальної електромеханіки, що описує рух точок тіла у разі поширення у ньому поверхневої хвилі Релея. При цьому врахуємо, що за такої зовнішньої дії у тілі реалізується плоский деформований стан, за якого вектор переміщення $\mathbf{u}$ має лише дві компоненти $\mathbf{u} = (u_1, u_2, 0)$, $u_i = (x_1, x_2, t)$, $i = 1, 2$. Хвиля поширюється в діелектрику, з огляду на що в тілі додатково індукується повільна електромагнітна хвиля, спричинена п'єзоелектричним ефектом. При цьому вектори напруженості електричного поля $\mathbf{E}$ й індукції $\mathbf{D}$, а також питомої поляризації $\mathbf{p}$ мають такі компоненти: $\mathbf{E} = (E_1, E_2, 0)$, $\mathbf{D} = (D_1, D_2, 0)$ та $\mathbf{p} = (p_1, p_2, 0)$. Оскільки характерна віддаль збурення електричного поля у вакуумі перевищує характерний розмір кристалу, приймемо, що вектори $\mathbf{E}$ та $\mathbf{D}$ підпорядковані рівнянням Максвелла, записаними у наближенні квазіелектростатики [17], тобто

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \text{в області } x_1 > 0. \tag{1}$$

Окрім записаних вище рівнянь (1) замкнена система співвідношень моделі включає рівняння руху та балансу наведеної маси [16]

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \rho_m = -\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}_m, \tag{2}$$

лінійні рівняння стану

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\mathbf{c}}^{(4)} : \hat{\boldsymbol{e}} - \gamma_\rho \rho_m \hat{\mathbf{I}}, \tag{3}$$

$$\mu'_\pi = \mu_{\pi 0} + d_\rho \rho_m - \frac{\gamma_\rho}{\rho_0} e, \tag{4}$$

$$\mathbf{p} = \chi_E \mathbf{E} - \chi_{Em} \nabla \mu'_\pi, \quad \boldsymbol{\pi}_m = -\chi_m \nabla \mu'_\pi + \chi_{Em} \mathbf{E}, \tag{5}$$

визначальне співвідношення для вектора $\mathbf{D}$ індукції електричного поля

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \rho_0 \mathbf{p}, \tag{6}$$

а також геометричні співвідношення

$$\hat{e} = \frac{1}{2}\left[\nabla \mathbf{u} + \left(\nabla \mathbf{u}\right)^{\mathrm{T}}\right]. \tag{7}$$

Тут $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ — тензор напружень; ρ_0 — густина маси; $\boldsymbol{\pi}_m$ — питомий вектор локального зміщення маси [16]; ρ_m — питома густина наведеної маси [16]; $\mu'_\pi = \mu_\pi - \mu$; μ_π — міра зміни внутрішньої енергії системи, зумовленої локальним зміщенням маси [16]; μ — хімічний потенціал; $\mu_{\pi 0}$ — значення потенціалу μ'_π у природному стані безмежного однорідного середовища; ε_0 — електрична стала; $\hat{\mathbf{c}}^{(4)}$ — тензор пружних модулів; γ_ρ — коефіцієнт об'ємного розширення, спричиненого локальним зміщенням маси; χ_E — діелектрична сприйнятливість; χ_m і χ_{Em} — коефіцієнти, які характеризують відповідно локальне зміщення маси та поляризовність тіла, зумовлені градієнтом потенціалу μ'_π; d_ρ — ізохоричний коефіцієнт залежності потенціалу μ'_π від питомої густини наведеної маси; t — час; $\hat{\mathbf{I}}$ — одиничний тензор; ∇ — оператор Гамільтона. Для кубічно-симетричних кристалів: $c_{ijkl} = (c_{11} - c_{12} - 2c_{44})\delta_{ijkl} + c_{12}\delta_{ij}\delta_{kl} + c_{44}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$, де δ_{ij} — символи Кронеккера; δ_{ijkl} дорівнюють одиниці, якщо всі індекси однакові, та нулеві — в інших випадках.

Зазначимо, що для ідеального діелектрика рівняння квазіелектростатики формально співпадають із рівняннями електростатики [17].

Розв'язувальну систему рівнянь отримаємо, підставивши у рівняння (1), (2) визначальні та геометричні співвідношення (3)-(7). В одержаній таким чином системі рівнянь вектори переміщення $\mathbf{u}$ та напруженості $\mathbf{E}$ електричного поля подамо через скалярні φ_u і φ_e та векторний $\boldsymbol{\psi}_u = \left(0, 0, \psi_u\right)$ потенціали

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi_u + \nabla \times \boldsymbol{\psi}_u, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\psi}_u = 0, \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi_e.$$

У підсумку отримаємо таку лінеаризовану розв'язувальну систему рівнянь

$$\frac{\partial^2 \psi_u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial x_2^2} - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 \psi_u}{\partial t^2} = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_u}{\partial x_2^2} - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 \varphi_u}{\partial t^2} = \frac{\gamma_\rho}{\breve{K} d_\rho}\tilde{\mu}'_\pi, \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\mu}'_\pi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\mu}'_\pi}{\partial x_2^2} - \lambda_{\mu E}^2 \tilde{\mu}'_\pi = \lambda_{\mu E}^2 \frac{\gamma_\rho}{\rho_0}\left(\frac{\partial^2 \varphi_u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_u}{\partial x_2^2}\right), \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_e}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_e}{\partial x_2^2} = -\kappa_E\left(\frac{\partial^2 \tilde{\mu}'_\pi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\mu}'_\pi}{\partial x_2^2}\right) \text{ в області } x_1 > 0. \tag{11}$$

Тут

$$\kappa_E = \rho_0 \chi_{Em}/\varepsilon\,, \quad \varepsilon = \varepsilon_0 + \rho_0 \chi_E\,, \quad c_1 = \sqrt{\widehat{K}/\rho_0}\,, \quad c_2 = \sqrt{G/\rho_0}\,, \quad G = c_{44}\,,$$

$$K = \frac{1}{3}(c_{11} + 2c_{12})\,, \quad \widehat{K} = K + \frac{4}{3}G - \frac{\gamma_\rho^2}{\rho_0 d_\rho}\,, \quad \lambda_{\mu E}^2 = \frac{1}{d_\rho \chi_m}\left(1 - \kappa_E \frac{\chi_{Em}}{\chi_m}\right)^{-1}.$$

Для визначення електричного потенціалу φ_{ev} у вакуумі маємо рівняння

$$\frac{\partial^2 \varphi_{ev}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{ev}}{\partial x_2^2} = 0 \quad \text{в області } x_1 < 0\,. \tag{12}$$

Крайові умови, що відповідають відсутності на поверхні $x_1 = 0$ напружень та збурення потенціалу $\tilde{\mu}'_\pi$, запишемо так:

$$\sigma_{1j}\big|_{x_1=0} = 0,\ j = \overline{1,3}\,, \quad \tilde{\mu}'_\pi\big|_{x_1=0} = 0\,. \tag{13}$$

Формули (15) доповнюємо умовами неперервності на поверхні $x_1 = 0$ електричного потенціалу й нормальної компоненти вектора індукції електричного поля:

$$\varphi_e\big|_{x_1=0} = \varphi_{ev}\big|_{x_1=0}\,, \quad \varepsilon\left(\frac{\partial \varphi_e}{\partial x_1} + \kappa_E \frac{\partial \tilde{\mu}'_\pi}{\partial x_1}\right)\bigg|_{x_1=0} = \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_{ev}}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=0}\,. \tag{14}$$

Таким чином, задача про визначення закономірностей поширення хвиль Релея в ізотропному пружному півпросторі ідеального діелектрика зводиться до розв'язування системи рівнянь (8)-(11), (12) за крайових і контактних умов (13), (14), а також умов обмеженості поля переміщень й потенціалів у півпросторі та вакуумі, тобто: $|\mathbf{u}| \to 0$, $\varphi_e \to 0$, $\tilde{\mu}'_\pi \to 0$, якщо $x_1 \to +\infty$; $\varphi_{ev} \to 0$, якщо $x_1 \to -\infty$.

2. Розв'язок задачі та його аналіз

Сформульовану задачу розв'язуємо у два етапи. Функцію ψ_u визначаємо з рівняння (8), яке не пов'язане з рештою рівнянь цієї системи. Потенціали φ_u та $\tilde{\mu}'_\pi$ є розв'язками зв'язаних рівнянь (9) і (10). Однак функції ψ_u, φ_u та $\tilde{\mu}'_\pi$ пов'язані крайовими умовами (13). Електричний потенціал у тілі і вакуумі визначаємо на основі рівнянь (11), (12), контактних умов (14), де функція $\tilde{\mu}'_\pi$ вже буде відома.

Розв'язок $f = \{\psi_u, \varphi_u, \tilde{\mu}'_\pi\}$ системи рівнянь (8)-(10) шукаємо у вигляді $f(x_1, x_2, t) = f^*(x_1)e^{-i(\omega t - kx_2)}$. Тут $f^*(x_1) = \{\psi_u^*(x_1), \varphi_u^*(x_1), \tilde{\mu}'^*_\pi(x_1)\}$, а k — невідома величина, яку визначаємо з однорідних крайових умов (13). На основі (8)-(10) для знаходження функцій $f^*(x_1)$ маємо таку систему диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2 \psi_u^*}{\partial x_1^2} - \nu_2^2 \psi_u^* = 0, \tag{15}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_u^*}{\partial x_1^2} - \nu_1^2 \varphi_u^* = \frac{\gamma_\rho}{\breve{K} d_\rho} \tilde{\mu}_\pi'^*, \tag{16}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\mu}_\pi'^*}{\partial x_1^2} - \left(k^2 + \lambda_{\mu E}^2\right) \tilde{\mu}_\pi'^* = \lambda_{\mu E}^2 \frac{\gamma_\rho}{\rho_0} \left(\frac{d^2 \varphi_u^*}{d x_1^2} - k^2 \varphi_u^* \right). \tag{17}$$

Тут $\nu_j^2 = k^2 - \omega^2 / c_j^2$, $j = 1, 2$.

Із загальних розв'язків рівняння (15) виберемо той, який відповідає зменшенню амплітуди хвилі зі збільшенням координати x_1. Відтак, запишемо: $\psi_u^*(x_1) = a_3 e^{-\nu_2 x_1}$, де a_3 — невідома константа, а $\nu_2 > 0$. Розв'язки рівнянь (16), (17) шукаємо у вигляді: $\varphi_u^*(x_1) = a e^{\beta x_1}$, $\tilde{\mu}_\pi'^* = \tilde{a} e^{\beta x_1}$. Тут a та $\tilde{a}$ — невідомі величини. Тоді на основі (16), (17) для визначення β отримаємо співвідношення

$$\beta^4 - \left[2k^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2} + \lambda_{\mu E}^2 \left(1 + \mathfrak{M}\right) \right] \beta^2 + \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2} \right) \left(k^2 + \lambda_{\mu E}^2 \right) + \mathfrak{M} k^2 \lambda_{\mu E}^2 = 0. \tag{18}$$

Тут $\mathfrak{M} = \dfrac{\gamma_\rho^2}{\widehat{K} \rho_0 d_\rho}$ — параметр взаємозв'язку процесу деформування та локального зміщення маси [18]. Коренями цього біквадратного рівняння є

$$2\beta_{1,2}^2 = 2k^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2} + \lambda_{\mu E}^2 \left(1 + \mathfrak{M}\right) \mp \left[\frac{\omega^2}{c_1^2} + \lambda_{\mu E}^2 \left(1 + \mathfrak{M}\right) \right] \sqrt{1 - 2\delta'}, \tag{19}$$

де

$$\delta' = \frac{2 \mathfrak{M} \lambda_{\mu E}^2 \, \omega^2 / c_1^2}{\left[\omega^2 / c_1^2 + \lambda_{\mu E}^2 \left(1 + \mathfrak{M}\right) \right]^2} \equiv \frac{2 \mathfrak{M} \Omega'^2 \overline{\theta}}{\left(1 + \mathfrak{M} + \Omega'^2 \overline{\theta}\right)^2}, \quad \Omega' = \frac{\omega}{c_2 \lambda_{\mu E}}, \ \overline{\theta} = \frac{c_2^2}{c_1^2} < 1.$$

Оскільки $\mathfrak{M}$ — малий параметр, $\overline{\theta} < 1$, $\Omega' < 1$ (для кристалічних тіл $\lambda_{\mu E} = O(10^{10})$ м$^{-1}$) то й δ' — мала величина. Тому формули (19) запишемо так

$$\beta_1^2 \approx k^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2} \left(1 - \delta'\right) + \lambda_{\mu E}^2 \left(1 + \mathfrak{M}\right) \delta', \ \ \beta_2^2 \approx k^2 + \lambda_{\mu E}^2 \left(1 + \frac{\mathfrak{M}}{1 + \mathfrak{M} + \Omega'^2 \overline{\theta}} \right). \tag{20}$$

Із коренів (19) вибираємо ті, які відповідають зменшенню амплітуди хвилі з глибиною. Таким чином маємо

$$\varphi_u^*(x_1) = a_1 e^{-\beta_1 x_1} + a_2 e^{-\beta_2 x_1}, \qquad \tilde{\mu}_\pi'^* = \tilde{a}_1 e^{-\beta_1 x_1} + \tilde{a}_2 e^{-\beta_2 x_1}. \tag{21}$$

Тут $\beta_j > 0$ $\left(j = 1, 2\right)$; a_j та $\tilde{a}_j$ $\left(j = 1, 2\right)$ — сталі.

Підставивши формули (21) у рівняння (16), (17), одержимо

$$\tilde{a}_j = a_j \frac{\breve{K} d_\rho}{\gamma_\rho}\left(\beta_j^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{c_1^2}\right), \quad j = 1, 2 .$$

У підсумку для функцій ψ_u, φ_u та $\tilde{\mu}'_\pi$ отримаємо такі вирази

$$\psi_u\left(x_1, x_2, t\right) = a_3 e^{-\nu_2 x_1} e^{-i\left(\omega t - k x_2\right)}, \tag{22}$$

$$\varphi_u\left(x_1, x_2, t\right) = \left(a_1 e^{-\beta_1 x_1} + a_2 e^{-\beta_2 x_1}\right) e^{-i\left(\omega t - k x_2\right)}, \tag{23}$$

$$\tilde{\mu}'_\pi\left(x_1, x_2, t\right) = \frac{\breve{K} d_\rho}{\gamma_\rho}\left[a_1\left(\beta_1^2 - \nu_1^2\right) e^{-\beta_1 x_1} + a_2\left(\beta_2^2 - \nu_1^2\right) e^{-\beta_2 x_1}\right] e^{-i\left(\omega t - k x_2\right)}. \tag{24}$$

Амплітуди поздовжніх і поперечних коливань швидко зменшуються у міру віддалення від поверхні в глибину тіла згідно експоненціального закону з різними коефіцієнтами спадання. Локальне зміщення маси впливає на швидкість спадання амплітуди поздовжньої хвилі з глибиною, про що свідчить залежність параметрів β_1 та β_2 від $\lambda_{\mu E}$ та $\mathfrak{M}$. У безмежному середовищі поперечна хвиля не зазнає впливу локального зміщення маси [16]. Однак у півпросторі поперечна і поздовжня хвилі, а також потенціал $\tilde{\mu}'_\pi$ зв'язані між собою граничними умовами, завдяки чому поперечна хвиля також зазнаватиме впливу локального зміщення маси. Згідно формули (23) амплітуда потенціалу φ_u визначається двома доданками. Перший із них, пропорційний $e^{-\beta_1 x_1}$, співпадає з результатами класичної теорії пружності [6], якщо прийняти $\mathfrak{M} = 0$ (у такому наближенні $\beta_1 = \nu_1$). Наявність другого доданку, пропорційного $e^{-\beta_2 x_1}$, зумовлена врахуванням локального зміщення маси. Такий доданок відсутній у класичній теорії пружності.

Для частот $\omega \ll c_2 \lambda_{\mu E}$ (для хлориду натрію це відповідає $\omega \ll 10^9$ Гц) маємо такі наближені співвідношення для визначення β_1^2 та β_2^2:

$$\beta_1^2 \approx k^2\left(1 - \frac{\eta\bar{\theta}}{1 + \mathfrak{M}}\right) = k^2\left[1 - \eta\bar{\theta}\left(1 - \frac{\mathfrak{M}}{1 + \mathfrak{M}}\right)\right], \tag{25}$$

$$\beta_2^2 \approx \frac{k^2}{\Omega'^2}\left[\eta\left(1 + \mathfrak{M}\right) + \Omega'^2\left(1 - \eta\bar{\theta}\frac{\mathfrak{M}}{1 + \mathfrak{M}}\right)\right]. \tag{26}$$

Тут $\eta = c_R^2 / c_2^2$, $c_R = \omega / k$.

Оцінимо віддалі $x_1^{(1)}$ та $x_1^{(2)}$ на яких експоненти $e^{-\beta_1 x_1}$ та $e^{-\beta_2 x_1}$ загасають в e раз. Маємо

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{\beta_1} \approx \frac{1}{k}\sqrt{\frac{1 + \mathfrak{M}}{1 + \mathfrak{M} - \eta\bar{\theta}}}, \qquad x_1^{(2)} = \frac{1}{\beta_2} \approx \frac{\Omega'}{k\sqrt{\eta\left(1 + \mathfrak{M}\right)}} .$$

Звідси $\dfrac{x_1^{(2)}}{x_1^{(1)}} \approx \dfrac{\omega}{\lambda_{\mu E}}\sqrt{\dfrac{1}{c_R^2}-\dfrac{1}{c_1^2}}$, також $\eta < \left(1+\mathfrak{M}\right)/\overline{\theta}$, а відтак $c_R < \sqrt{1+\mathfrak{M}}\,c_1$. Фазова швидкість хвилі Релея менша від фазової швидкості поздовжньої хвилі. Тут параметр $\lambda_{\mu E}$ набуває дуже великих значень. Для низьких частот $\Omega' \ll 1$ і $\beta_1 \ll \beta_2$, а тому $x_1^{(2)} \ll x_1^{(1)}$. Отож $e^{-\beta_2 x_1}$ спадає значно швидше, аніж $e^{-\beta_1 x_1}$, тобто вплив складника, пов'язаного з β_2, вагомий лише у вузькій приповерхневій області $0 \le x_1 \ll x_1^{(2)}$. Збільшення частоти призводить до збільшення віддалі $x_1^{(2)}$.

Для частот $\omega \gg c_2\lambda_{\mu E}$ на основі формул (19) отримаємо

$$\beta_1^2 \approx k^2\left(1-\eta\overline{\theta}+\frac{\eta\mathfrak{M}}{\Omega'^2}\right), \qquad \beta_2^2 \approx k^2\left(1+\frac{\eta}{\Omega'^2}\right). \tag{27}$$

Для кристалів NaCl такі частоти відповідають значенням $\omega \gg 10^9$ Гц. За таких частот довжина хвилі сумірна міжмолекулярним відстаням. У цьому випадку β_1 та β_2 теж стають сумірними величинами, а відтак, у цьому частотному діапазоні впливом локального зміщення маси на поширення поверхневих хвиль Релея не можна нехтувати.

Підставивши формули (22)-(24) у граничні умови, для визначення невідомих величин a_j, $j=\overline{1,3}$, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь, яка буде мати нетривіальний розв'язок, якщо її визначник дорівнюватиме нулеві, тобто

$$4k^2\nu_2\left(\beta_1\beta_2+k^2-\frac{\omega^2}{c_1^2}\right)=\left(2k^2-\frac{\omega^2}{c_2^2}\right)^2\left(\beta_1+\beta_2\right). \tag{28}$$

Зазначимо, що у межах вибраного математичного опису для визначення хвильового числа k ми одержали рівняння, значно складніше, порівняно з його аналогом [6, с. 682] у лінійній теорії пружності.

Якщо праву і ліву частини співвідношення (28) двічі піднести до квадрата і врахувати формули (19), то дістанемо таке рівняння для визначення параметра η:

$$\begin{aligned}&\left\{\left(1-\frac{1}{2}\eta\right)^4\left[2-\overline{\theta}\eta+\frac{\eta}{\Omega'^2}\left(1+\mathfrak{M}\right)\right]-\right.\\ &\left.-\left(1-\eta\right)\left[1-\overline{\theta}\eta+\frac{\eta}{\Omega'^2}\left(1+\mathfrak{M}-\overline{\theta}\eta\right)+\left(1-\overline{\theta}\eta\right)^2\right]\right\}^2=\\ &=4\left[1-\overline{\theta}\eta+\frac{\eta}{\Omega'^2}\left(1+\mathfrak{M}-\overline{\theta}\eta\right)\right]\left[\left(1-\eta\right)\left(1-\overline{\theta}\eta\right)-\left(1-\frac{1}{2}\eta\right)^4\right]^2.\end{aligned} \tag{29}$$

За відомих значень параметрів $\overline{\theta}$, Ω' та $\mathfrak{M}$ корені цього рівняння можна знайти числовими методами. Із знайдених дійсних коренів слід вибрати ті, які задовольнятимуть умови: $\nu_2 > 0$ та $\beta_j > 0$, $j=1,2$. Бачимо, що рівняння (29) містить безрозмірний параметр Ω', який пропорційний частоті ω. Тому, за врахування локального зміщення маси, швидкість хвилі Релея залежатиме від частоти, тобто ця хвиля є дисперсійна. У випадку нестисливого середовища, для якого $c_1^2 = \infty$, $\overline{\theta} = 0$, на основі (29) одержимо рівняння, яке співпадає з результатами монографії [6, с. 684], де закономірності поширення хвиль Релея вивчено на основі співвідношень класичної теорії пружності.

За врахування крайових умов і формул (22)-(24) для функцій ψ_u, φ_u та $\tilde{\mu}'_\pi$ одержимо вирази, що визначають потенціали з точністю до сталої величини a_1, яку можна визначити, сконкретизувавши причину виникнення поверхневої хвилі:

$$\psi_u\left(x_1, x_2, t\right) = -2ika_1 \frac{\left(\beta_1\beta_2 + \nu_1^2\right)\left(\beta_2 - \beta_1\right)}{\left(\beta_2^2 - \nu_1^2\right)\left(k^2 + \nu_2^2\right)} e^{-\nu_2 x_1} e^{-i\left(\omega\, t - kx_2\right)}, \tag{30}$$

$$\varphi_u\left(x_1, x_2, t\right) = a_1 \left(e^{-\beta_1 x_1} - \frac{\beta_1^2 - \nu_1^2}{\beta_2^2 - \nu_1^2} e^{-\beta_2 x_1} \right) e^{-i\left(\omega t - kx_2\right)}, \tag{31}$$

$$\tilde{\mu}'_\pi\left(x_1, x_2, t\right) = a_1 \left(\beta_1^2 - \nu_1^2\right) \frac{\breve{K} d_\rho}{\gamma_\rho} \left(e^{-\beta_1 x_1} - e^{-\beta_2 x_1} \right) e^{-i\left(\omega t - kx_2\right)}. \tag{32}$$

У разі поширення поверхневої механічної хвилі у твердому діелектричному тілі виникає електричне поле. На наступному етапі можемо визначити збурення електричного поля, зумовлене п’єзоелектричним ефектом. Для векторів напруженості електричного поля та поляризації у півпросторі отримаємо

$$E_i\left(x_1, x_2, t\right) = \kappa_E \frac{\partial \tilde{\mu}'_\pi}{\partial x_i}, \quad p_i\left(x_1, x_2, t\right) = -\chi_{Em} \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{\mu}'_\pi}{\partial x_i}, \quad i = 1,2\,.$$

Звідси, з огляду на формулу (32), запишемо

$$E_1\left(x_1, x_2, t\right) = -\kappa_E a_1 \left(\beta_1^2 - \nu_1^2\right) \breve{K} d_\rho \gamma_\rho^{-1} \left(\beta_1 e^{-\beta_1 x_1} - \beta_2 e^{-\beta_2 x_1} \right) e^{-i\left(\omega t - kx_2\right)}, \tag{33}$$

$$E_2\left(x_1, x_2, t\right) = ik\kappa_E a_1 \left(\beta_1^2 - \nu_1^2\right) \breve{K} d_\rho \gamma_\rho^{-1} \left(e^{-\beta_1 x_1} - e^{-\beta_2 x_1} \right) e^{-i\left(\omega t - kx_2\right)}, \tag{34}$$

$$\rho_0 p_1\left(x_1, x_2, t\right) = \kappa_E a_1 \varepsilon_0 \left(\beta_1^2 - \nu_1^2\right) \breve{K} d_\rho \gamma_\rho^{-1} \left(\beta_1 e^{-\beta_1 x_1} - \beta_2 e^{-\beta_2 x_1} \right) e^{-i\left(\omega t - kx_2\right)}, \tag{35}$$

$$\rho_0 p_2\left(x_1, x_2, t\right) = -ik\kappa_E a_1 \varepsilon_0 \left(\beta_1^2 - \nu_1^2\right) \breve{K} d_\rho \gamma_\rho^{-1} \left(e^{-\beta_1 x_1} - e^{-\beta_2 x_1} \right) e^{-i\left(\omega t - kx_2\right)}. \tag{36}$$

Бачимо, що $\rho_0 p_i\left(x_1, x_2, t\right) = -\varepsilon_0 E_i\left(x_1, x_2, t\right)$, а тому вектор індукції електричного поля дорівнює нулеві не лише на поверхні, а й у всьому тілі: **D** = 0. На поверхні $x_1 = 0$ маємо: $E_2\big|_{x_1=0} = 0$, $p_2\big|_{x_1=0} = 0$, тоді як

$$E_1\big|_{x_1=0}\left(x_1, x_2, t\right) = -\kappa_E a_1 \left(\beta_1^2 - \nu_1^2\right)\left(\beta_1 - \beta_2\right) \breve{K} d_\rho \gamma_\rho^{-1} e^{-i\left(\omega t - kx_2\right)},$$

$$p_1\big|_{x_1=0} = \chi_{Em} a_1 \left(\beta_1^2 - \nu_1^2\right)\left(\beta_1 - \beta_2\right) \frac{\breve{K} d_\rho}{\gamma_\rho} \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} e^{-i\left(\omega t - kx_2\right)}.$$

Таким чином, хвиля Релея, яка поширюється в неферомагнітному півпросторі ідеального діелектрика з високим рівнем симетрії кристалічної ґратки, індукує повільну поверхневу електричну хвилю, підпорядковану співвідношенням (33), (34), а також спричинює поляризацію поверхні й приповерхневих областей тіла. Амплітуди величин, означених формулами (33)-(36), пропорційні різниці $\beta_1^2 - \nu_1^2$. З огляду на формули (25) та (27) отримаємо, що для $\omega \ll c_2 \lambda_{\mu E}$: $\beta_1^2 - \nu_1^2 \approx k^2 \eta \bar{\theta} \dfrac{\mathfrak{M}}{1+\mathfrak{M}} \approx \mathfrak{M} \dfrac{\omega^2}{c_1^2} \ll \mathfrak{M} \lambda_{\mu E}^2 \dfrac{c_2^2}{c_1^2}$, тоді як для $\omega \gg c_2 \lambda_{\mu E}$: $\beta_1^2 - \nu_1^2 \approx$ $\approx k^2 \dfrac{\eta \mathfrak{M}}{\Omega'^2} \approx \mathfrak{M} \lambda_{\mu E}^2$. Звідси можемо зробити висновок, що в області високих частот зі збільшенням частоти амплітуди згаданих хвиль (напруженості електричного поля та поляризації) теж збільшуються. Амплітуди напруженості електричного поля й поляризації пропорційні параметрам $\mathfrak{M}$ і κ_E — параметрам зв'язаності локального зміщення маси з процесом деформування та електричним полем. Чим більшими будуть параметри $\mathfrak{M}$ та κ_E — тим суттєвішим буде прояв п'єзоелектричного ефекту.

Висновки. Лінеаризовані співвідношення нелокальної теорії деформування неферомагнітних діелектриків дозволяють вивчати дисперсійні властивості поверхневих хвиль Релея й описувати прямий п'єзоелектричний ефект у діелектричних тілах з високим рівнем симетрії кристалічної ґратки. У граничному випадку нестисливого середовища дисперсія поздовжньої пружної хвилі відсутня й одержаний результат співпадає з результатами класичної теорії.

Література

[1] *Викторов И. А.* Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. — Москва: Наука, 1966. — 169 с.

[2] *Фарнелл Дж.* Поверхностные акустические волны, в кн.: Фильтры на поверхностных акустических волнах. Расчет, технология и применение, под ред. *Г. Мэттьюза.* — Москва: Радио и связь, 1981. — 472с.

[3] *Дьелесан Э., Руайе Д.* Упругие волны в твердых телах. Применения для обработки сигналов. — Москва: Наука, 1982. — 424 с.

[4] *Morgan D. P.* A history of surface acoustic wave devices // Int. J. of High Speed Electronics and Systems. — 2000. — Vol. 10, No 3. — P. 553-602.

[5] *Александров К. С., Сорокин Б. П., Бурков С. И.* Эффективные пьезоэлектрические кристаллы для акустоэлектроники, пьезотехники и сенсоров. В 2-х т. — Т. 1. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2007. — 501 с.

[6] *Новацкий В.* Теория упругости. — Москва: Мир, 1975. — 872 с.

[7] http://kino-ap.eng.hokudai.ac.jp/ripples.html

[8] *Billy M. De, Quentin G., Baron E.* Attenuation measurements of an ultrasonic Rayleigh wave propagating along rough surfaces // J Appl Phys., 1987. — Vol. 61, Issue 6. — P. 2140.

[9] *Jagnoux P., Vincent A.* Ultrasonic imaging by leaky Rayleigh waves // NDT International. — 1989. — Vol. 22, Issue 6. — P. 339-346.

[10] *Кулеш М. А., Матвеенко В. П., Шардаков И. Н.* Дисперсия и поляризация поверхностных волн Рэлея для среды Коссера // Изв. РАН. МТТ. — 2007. — № 4. — С. 100-113.

[11] *Yerofeyev V. I., Sheshenina O. A.* Waves in a gradient-elastic medium with surface energy // J. Appl. Math. and Mech. — 2005. — Vol. 69, Issue 1. — P. 57-69.
[12] *Yang Z., Yang J.* Effect of electric field gradient on the propagation of short piezoelectric interface waves // Int. J. Appl. Electromagn. Mech. — 2009. — Vol. 29, No 2. — P. 101-108.
[13] *Новацкий В.* Электромагнитные эффекты в твердых телах. — Москва: Мир, 1984. — 159 с.
[14] *Грицина О.* Вплив локального зміщення маси на поверхневі хвилі Релея // — Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2012. — Вип. 15. — С. 31-41.
[15] *Бурак Я. Й., Кондрат В. Ф., Грицина О. Р.* Приповерхневі механоелектромагнетні явища у термопружних поляризовних тілах з врахуванням локального зміщення маси // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 2007. — № 4. — С. 5-17.
[16] *Бурак Я., Кондрат В., Грицина О.* Основи локально градієнтної теорії діелектриків. — Ужгород: Поліграфцентр «Ліра», 2011. — 208 с.
[17] *Можен Ж.* Механика электромагнитных сплошных сред. — Москва: Мир, 1991. — 560 с.
[18] *Кондрат В. Ф., Грицина О. Р.* Механоелектромагнітна взаємодія в ізотропних діелектриках з урахуванням локального зміщення маси // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2009. — Т. 52, № 1. — С. 150-158.

The propagation of Rayleigh waves in non-ferromagnetic dielectrics

Olha Hrytsyna

Using the nonlocal theory of deformation of non-ferromagnetic polarized solids, the regularities of Rayleigh wave propagation in elastic half-space of the ideal dielectric are studied. The corresponding dispersion equation that determines the velocity of these waves is obtained. The effect of local mass displacement on the Rayleigh wave propagation in piezoelectric solids is investigated. It is shown that Rayleigh wave becomes dispersive and its phase velocity is decreased in a region of high frequency when the local mass displacement is considered. It is shown also that the slow electromagnetic wave occurrence is the result of the Rayleigh wave propagation in a dielectric body. Therefore this model describes the direct piezoelectric effect.

Распространение волн Релея в неферромагнитных диэлектриках

Ольга Грицина

С использованием нелокальной теории деформирования неферромагнитных поляризующихся тел изучены закономерности распространения волн Релея в упругом полупространстве идеального диэлектрика. Для определения скорости этих волн получено соответствующее дисперсионное уравнение. Исследовано влияние локального смещения массы на характеристики распространения волн Релея в пьезоэлектрических телах. Показано, что в области высоких частот фазовая скорость распространения этих волн уменьшается — волны Релея являются дисперсионными. Эти волны приводят к возникновению в приповерхностных областях медленной электрической волны, то есть модель описывает прямой пьезоэлектрический эффект.

Отримано 13.11.15