

## Залежність поведінки усередненого потоку маси у багат шаровому тілі від похибки вхідних даних

Анастасія Давидок<sup>1</sup>, Ярослав П'янило<sup>2</sup>, Ольга Чернуха<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060; Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: davydoka@gmail.com

<sup>2</sup> д. т. н., с. н. с., Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: rjanylo@cmm.lviv.ua

<sup>3</sup> д. т. н., професор, Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: cher@cmm.lviv.ua

*Для крайової задачі дифузії домішкової речовини у двофазному багат шаровому тілі з рівномірним розподілом фаз досліджено вплив похибок на поведінку потоку маси. Проаналізовано вплив похибок вхідних даних, методу та заокруглення на усереднений дифузійний потік. Проведено ряд числових експериментів і показано, що наявність відхилень у вимірах початкової концентрації та характерної товщини включень має найбільший вплив на збурення потоку, а збурення приведенного коефіцієнта дифузії впливають на потік маси найменше.*

**Ключові слова:** математична модель, дифузійний потік, похибка, випадкова шарувата структура.

**Вступ.** Моделювання є одним з основних методів дослідження складних систем [1]. Його складовими етапами є створення концептуальної моделі об'єкта дослідження, її формалізація та перетворення у математичну або комп'ютерну модель, перевірка адекватності й подальше дослідження отриманої моделі за допомогою аналітичних або чисельних методів. Важливою характеристикою результатів моделювання є похибка одержуваних результатів. У загальному випадку похибки, що виникають під час розв'язування задачі, можна поділити на такі типи [2, 3]: похибка математичної моделі; неусувна похибка (зокрема, похибка вхідних даних); похибка методу; обчислювальна похибка. Оцінку повної похибки результату шукають як суму всіх типів похибок.

Під час розв'язування прикладних задач, зазвичай, найбільший вклад у неточність кінцевого результату привносить похибка вхідних даних, пов'язана з обмеженою точністю вхідної інформації [4]. Окрім того, ця похибка є визначальною при дослідженні стійкості розв'язку.

Практична значимість будь-якого вимірювання визначається похибкою одержаного результату, тобто відхиленням від істинного значення вимірюваної величини [5]. Традиційний аналітичний підхід до визначення похибок полягає в їх поділі на складові, кожна з яких зумовлена певними факторами. До таких факторів можна віднести методи вимірювань, технічні засоби, суб'єктивні

фактори (що є складовою систематичної похибки вимірювань), серед яких індивідуальні особливості оператора; зовнішнє середовище, та самі фізичні величини, можливі межі невизначеності значення випадкової величини та інші [6]. Також можуть виникати методичні похибки вимірювань, зумовлені недосконалістю прийнятого методу вимірювання, та похибки взаємодії засобу вимірювань з об'єктом вимірювань [6]. Розбиття на складові дозволяє досліджувати джерела компонент похибки, визначати їх властивості й оцінювати вклад кожної з них із необхідною точністю. Знаючи властивості й оцінки складових, можна коректно врахувати їх при оцінці повної похибки, а також за необхідності ввести поправку в результат вимірювання й (або) організувати вимірювальний експеримент так, щоб звести окремі складові, а отже і повну похибку до допустимого значення [5].

У цій роботі на основі числових експериментів досліджено вплив різного типу похибок на розв'язок крайової задачі дифузії для функції потоку домішкової речовини у двофазному випадково неоднорідному багатшаровому тілі, усередненого за ансамблем конфігурацій фаз із рівномірною функцією розподілу.

### 1. Крайова задача дифузії на потік у випадковому шаруватому середовищі

Розглянемо дифузію домішкової речовини у смузі товщини  $z_0$ , яка складається з  $n_0$  підшарів фази  $j = 0$  (матриця) та  $n_1$  підшарів фази  $j = 1$  (включення). Координати розташування підшарів є невідомі, проте приймаємо, що фази у тілі розташовані за рівномірним законом розподілу. Вважаємо, що об'ємна частка матриці  $v_0$  превалює над об'ємною часткою включення  $v_1$ , а коефіцієнти дифузії мігруючих частинок є сталі у межах кожної з фаз.

Дифузійні процеси належать до повільних фізичних процесів. Часи їх протікання (в секундах) є великі в числовому вимірі, а характерні довжини при цьому вимірюються в метрах. Тому доцільно вводити безрозмірні змінні, які дозволяють, зокрема, нівелювати проблему малості коефіцієнтів дифузії [7]:

$$\zeta = z/z_0, \quad \tau = D_0 t / z_0^2, \quad (1)$$

де  $z$  і  $t$  — просторова і часова координати,  $D_0$  — коефіцієнт дифузії в матриці.

Рівняння дифузії домішкової речовини для функції потоку у випадково неоднорідному шаруватому середовищі в безрозмірних змінних (1) є таким [8]

$$\frac{\partial J(\zeta, \tau)}{\partial \tau} = D(\zeta) \frac{\partial^2 J(\zeta, \tau)}{\partial \zeta^2}. \quad (2)$$

Тут  $J(\zeta, \tau)$  — випадковий потік маси,  $D(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta \in \Omega_0, \\ d = D_1/D_0, & \zeta \in \Omega_1, \end{cases}$  — випадковий

безрозмірний коефіцієнт дифузії,  $D_1$  — коефіцієнт дифузії частинок у включеннях,  $\Omega_j$  — область, яку займає фаза  $j$  ( $j = 0; 1$ ).

Вважаємо, що у початковий момент часу відсутній дифузійний потік у тілі, на границі  $\zeta = 0$  підтримується стале значення потоку, а на границі  $\zeta = 1$  — концентрація домішкової речовини  $c(\zeta, \tau)$  є нульова. При цьому значення потоку на цій межі дорівнює деякій функції  $F(\tau)$ , яку потрібно визначити додатково:

$$J(\zeta, \tau)|_{\tau=0} = 0; \quad (3)$$

$$J(\zeta, \tau)|_{\zeta=0} = J_* \equiv const, \quad J(\zeta, \tau)|_{\zeta=1} = F(\tau). \quad (4)$$

Зазначимо, початкова умова (3) означає, що в нульовий момент часу задано сталий розподіл концентрації в тілі:  $c(\zeta, \tau)|_{\tau=0} = c_* \equiv const$ .

Розглядаємо неоднорідність структури тіла як внутрішні джерела та зводимо крайову задачу (2)-(4) до еквівалентного інтегро-диференціального рівняння з випадковим ядром [9]. Отримане рівняння розв'язуємо методом послідовних наближень і стохастичний дифузійний потік отримуємо у вигляді збіжного інтегрального ряду Неймана. Обмежуємося двома першими членами цього ряду й усереднюємо отриманий вираз за ансамблем конфігурацій фаз із рівномірною функцією розподілу. Оцінки суми залишкових членів ряду та третього доданка ряду Неймана наведено в роботі [10]. У результаті отримуємо розрахункову формулу для усередненого дифузійного потоку

$$\frac{\langle J(\zeta, \tau) \rangle_{conf}}{J_*} = \frac{J_0(\zeta, \tau)}{J_*} + 2\nu_1(d-1) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n A_{kn}}{y_k^2 - \xi_n^2} \left( 1 + (-1)^n \frac{c_*}{J_*} \xi_n \right) \times \\ \times \left( e^{-\xi_n^2 \tau} - e^{-y_k^2 \tau} \right) \sin(y_k \zeta), \quad (5)$$

де

$$J_0(\zeta, \tau) = J_* - 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\xi_n^2 \tau} \left( \frac{J_*}{\xi_n} + (-1)^n c_* \right) \sin(\xi_n \zeta) \quad (6)$$

— потік дифундуючої речовини в однорідному шарі;  $\xi_n = \pi(2n-1)/2$ ,  $y_k = k\pi$ ;

$$A_{kn} = \frac{\cos[(y_k - \xi_n)h_1]}{h_1(y_k - \xi_n)^2} - \frac{\cos[(y_k + \xi_n)h_1]}{h_1(y_k + \xi_n)^2} - \frac{4y_k \xi_n}{h_1(y_k^2 - \xi_n^2)^2} + \frac{(-1)^{k+n} 2y_k}{y_k^2 - \xi_n^2}, \quad h_1 = \frac{\tilde{h}_1}{z_0} -$$

безрозмірна товщина включень,  $\tilde{h}_1$  — характерна (середня) товщина прошарків [м].

## 2. Похибка вхідних даних

Вхідні параметри для задачі (значення початкової концентрації домішки у тілі, об'ємної частки включень, коефіцієнтів дифузії тощо), можуть задаватись із деякою похибкою (збуренням), зокрема:

$$\tilde{C}_* = C_* \pm \Delta C_*, \quad \tilde{\nu}_1 = \nu_1 \pm \Delta \nu_1, \quad \tilde{d} = d \pm \Delta d, \quad \tilde{h}_1 = h_1 \pm \Delta h_1,$$

де  $\Delta C_*$  ( $C_* = c_*/J_*$ ),  $\Delta \nu_1$ ,  $\Delta d$ ,  $\Delta h_1$  — похибки відповідних вхідних параметрів.

Зазначимо, що для коефіцієнтів дифузії у включеннях і матриці може бути відома похибка їх відношення  $\Delta d$  або похибки кожного з коефіцієнтів  $\Delta D_1$  і  $\Delta D_0$ . Зазнавати збурення може як кожен із параметрів зокрема, так і декілька одночасно.

За означенням збурені потоки — усереднений  $\langle \tilde{J}(\varsigma, \tau) \rangle$  і в однорідному середовищі,  $\tilde{J}_0(\varsigma, \tau)$  визначаються

$$\langle \tilde{J}(\varsigma, \tau) \rangle = (\varsigma, \tau) \langle J(\varsigma, \tau) \rangle / J_* + \Delta \langle J \rangle; \quad \tilde{J}_0(\varsigma, \tau) = J_0(\varsigma, \tau) / J_* + \Delta J_0.$$

Тут  $\Delta \langle J \rangle$  і  $\Delta J_0$  — їх відповідні збурення.

Нехай спочатку з похибкою задається тільки один із параметрів. Якщо початкову концентрацію домішки в тілі  $C_*$  виміряно з похибкою  $\Delta C_*$ , то збурення усередненого потоку набуде вигляду

$$\Delta \langle J \rangle = \mp 2 \Delta C_* \left[ \Sigma_1(\varsigma, \tau) - \nu_1 (d-1) \Sigma_2(\varsigma, \tau; h_1) \right], \quad (7)$$

а збурення потоку в однорідному середовищі є

$$\Delta J_0 = \mp 2 \Delta C_* \Sigma_1(\varsigma, \tau), \quad (8)$$

де

$$\Sigma_1(\varsigma, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-\xi_n^2 \tau} \sin(\xi_n \varsigma), \quad \Sigma_2(\varsigma, \tau; h_1) = \frac{\xi_n A_{kn}}{y_k^2 - \xi_n^2} \left( e^{-\xi_n^2 \tau} - e^{-y_k^2 \tau} \right) \sin(y_k \varsigma).$$

У випадку, якщо збурення зазнає параметр  $d$  або  $\nu_1$ , то для збурення усередненого потоку відповідно маємо

$$\Delta \langle J \rangle = \pm 2 \left\{ \frac{\Delta d \nu_1}{\Delta \nu_1 (d-1)} \right\} \left[ C_* \Sigma_2(\varsigma, \tau; h_1) + \Sigma_3(\varsigma, \tau; h_1) \right]. \quad (9)$$

Тут  $\Sigma_3(\varsigma, \tau; h_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} S_{n,k}(\varsigma, \tau; h_1)$ .

Для вимірювання товщини включень із похибкою  $\Delta h_1$  отримаємо

$$\Delta \langle J \rangle = \pm 2 \nu_1 (d-1) \left[ C_* \Sigma_2(\varsigma, \tau; h_1 \pm \Delta h_1) + \Sigma_3(\varsigma, \tau; h_1 \pm \Delta h_1) \right]. \quad (10)$$

Зазначимо, що на збурення потоку в однорідному тілі впливає лише збурення початкової концентрації домішки, віднесеної до значення сталого потоку на верхній границі шару. Відповідно до співвідношень (7)-(9), збурення потоків  $\Delta \langle J \rangle$  і  $\Delta J_0$  є прямо пропорційні до відхилень  $\Delta C_*$ , об'ємної частки включень  $\Delta \nu_1$  і приведенного коефіцієнта дифузії  $\Delta d$ . У той же час за формулою (10) збурення характерної товщини прошарків  $\Delta h_1$  нелінійно впливає на поведінку функції  $\Delta \langle J \rangle$ .

Оскільки  $|\Delta C_*|, |\Delta \nu_1|, |\Delta h_1| < 1$  і  $|\Delta d| < 1$  за умови  $\left| \frac{D_1 + \Delta D_1}{D_0 + \Delta D_0} - \frac{D_1}{D_0} \right| < 1$ , то добутки  $\Delta \nu_1 \Delta C_* \Delta d$  і  $\Delta \nu_1 \Delta C_* \Delta d \Delta h_1$  мають вищий порядок малості, ніж  $\Delta \nu_1$ ,

$\Delta C_*$ ,  $\Delta d$ ,  $\Delta h_1$ . Тоді збурення усередненого потоку достатньо визначати як суму збурень потоку за одним параметром.

Зокрема, при заданні із похибкою параметрів  $C_*$  та  $v_1$

$$\Delta \langle J \rangle = \mp 2 \Delta C_* \left[ \Sigma_1(\zeta, \tau) - v_1(d-1) \Sigma_2(\zeta, \tau; h_1) \right] \pm 2 \Delta v_1 (d-1) \times \\ \times \left[ C_* \Sigma_2(\zeta, \tau; h_1) + \Sigma_3(\zeta, \tau; h_1) \right];$$

у разі задання з похибкою параметрів  $v_1$  та  $d$

$$\Delta \langle J \rangle = \pm 2 (\Delta v_1 (d-1) + \Delta d v_1) \left[ C_* \Sigma_2(\zeta, \tau; h_1) + \Sigma_3(\zeta, \tau; h_1) \right];$$

у разі задання з похибкою параметрів  $h_1$  та  $d$

$$\Delta \langle J \rangle = \pm 2 v_1 (d-1) \left[ C_* \Sigma_2(\zeta, \tau; h_1 \pm \Delta h_1) + \Sigma_3(\zeta, \tau; h_1 \pm \Delta h_1) \right] \pm 2 \Delta d v_1 \times \\ \times \left[ C_* \Sigma_2(\zeta, \tau; h_1) + \Sigma_3(\zeta, \tau; h_1) \right]$$

і т. п.

### 3. Числовий експеримент для визначення впливу похибки вхідних даних на збурення дифузійних потоків

Для встановлення кількісного та якісного впливу похибок вхідних параметрів на усереднений потік проведемо числовий експеримент, де за базові параметри прийнято такі значення:  $\tau = 0,1$ ;  $C_* = 0,1$ ;  $v_1 = 0,2$ ;  $h_1 = 0,01$ ;  $d_1 = 0,01$  або  $d_1 = 2$ , точність обчислення рядів  $\varepsilon = 10^{-9}$ .

У табл. 1 наведено розрахункові дані для усередненого потоку  $\langle \tilde{J}(\zeta, \tau) \rangle$ , збуреного похибкою вхідних параметрів  $C_*$  та  $d$ . Обчислення проведені за формулами (7) і (9) для відхилень  $\Delta C_* = \pm 0,001$  і  $\Delta d = \pm 0,001$  на різних безрозмірних глибинах  $\zeta$ . Тут сірим кольором замарковано значення потоків, для яких абсолютні значення збурення усередненого потоку  $|\Delta \langle J \rangle|$  є максимальні.

Числові дані максимального відхилення значень потоку, збуреного похибкою вимірювання товщини включень, від величини усередненого дифузійного потоку для різної кількості включень у неоднорідній смузі наведено у табл. 2, при цьому усереднений потік обчислено для базових параметрів, де  $h_1 = 0,005$ .

Зауважимо, що у разі збурення вхідних даних значення збуреного потоку різняться від усередненого у 4 і подальших значимих цифрах (табл. 1).

Таблиця 1

Розрахункові дані для збуреного усередненого потоку похибкою  $\Delta C^*$  та похибкою  $\Delta d$

$\zeta$	$\frac{J_0(\zeta, \tau)}{J^*}$	$\frac{\langle J(\zeta, \tau) \rangle}{J^*}$	$\langle \tilde{J}(\zeta, \tau) \rangle_{\Delta C^*}$		$\langle \tilde{J}(\zeta, \tau) \rangle_{\Delta d}$	
			$\Delta C^* = 0,001$	$\Delta C^* = -0,001$	$\Delta d = 0,001$	$\Delta d = -0,001$
0	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
0,0323	0,894818	0,940157	0,940160	0,940153	0,880768	0,880765
0,0968	0,792382	0,822281	0,822292	0,822271	0,765130	0,765125
0,1613	0,695255	0,709716	0,709734	0,709698	0,656425	0,656417
0,2258	0,605649	0,605582	0,605609	0,605555	0,557499	0,557489
0,2903	0,525291	0,512406	0,512444	0,512369	0,470522	0,470511
0,3548	0,455334	0,431972	0,432022	0,431922	0,396870	0,396858
0,4194	0,396312	0,365233	0,365297	0,365169	0,337073	0,337061
0,4839	0,348158	0,312308	0,312388	0,312228	0,290857	0,290845
0,5484	0,310267	0,272552	0,272649	0,272456	0,257238	0,257227
0,6129	0,281603	0,244688	0,244802	0,244574	0,234696	0,234686
0,6774	0,260844	0,227002	0,227132	0,226871	0,221379	0,221371
0,7419	0,246541	0,217565	0,217711	0,217419	0,215341	0,215335
0,8065	0,237287	0,214473	0,214633	0,214314	0,214776	0,214772
0,8710	0,231865	0,216072	0,216241	0,215902	0,218233	0,218230
0,9355	0,229389	0,221153	0,221329	0,220976	0,221154	0,221152
1	0,229091	0,229091	0,229269	0,228912	0,229091	0,229091

У випадку вхідної похибки параметра  $C^*$ , як для однорідного, так і неоднорідного тіла, максимальні збурення усередненого потоку спостерігаються біля нижньої межі шару  $\zeta = 1$  (табл. 1). Причому значення  $|\Delta \langle J \rangle|$  для неоднорідної смуги та  $|\Delta J_0|$  для смуги без прошарків відрізняються незначно.

Якщо з похибкою задасться одна з характеристик смуги: об'ємна частка включень, характерна товщина прошарків або приведений коефіцієнт дифузії, то максимальні відхилення збуреного усередненого потоку досягаються біля середини тіла. Так, у випадку збурення параметра  $d$ ,  $\Delta \langle J \rangle$  набуває максимального значення у точці  $\zeta = 0,4194$  (табл. 1).

Зазначимо, що чим більша кількість прошарків за їх сталої товщини, тобто зростає значення об'ємної частки включень, тим більшого значення набуває збурений усереднений дифузійний потік (табл. 2).

Таблиця 2

Залежність максимального значення  $\Delta \langle J \rangle$  від кількості включень

$h_1 = 0,0051$		$\max \Delta \langle J \rangle$
$n_1$	$v_1 = n_1 h_1$	
20	0,102	0,00059
40	0,204	0,00118
60	0,306	0,00177

Проведені обчислення для вказаних базових параметрів задачі показали, що у випадку збурень третьої значимої цифри характеристик  $C_*$  або  $h_1$  на одиницю, змінюється 3-я значима цифра усередненого потоку. Зміна у третьому знакові після коми параметра  $\nu_1$  відповідає зміні 4-ої значимої цифри усередненого потоку. Зміна у цьому ж знакові параметра  $d$  викликає збурення 5-ої значимої цифри усередненого потоку. При цьому, якщо зменшувати на порядок розряд, у якому відбувається збурення цих параметрів, то на порядок зменшується і розряд, у якому збурюється усереднений дифузійний потік.

Також зазначимо, зі збільшенням часу протікання процесу  $\tau$  у разі збурення всіх параметрів задачі збільшується кількість точних значимих цифр, тобто зменшується вплив похибки вхідних даних на усереднений потік маси.

#### 4. Числовий аналіз збурення потоків маси

На рис. 1-3 наведені характерні розподіли збурень усередненого потоку за товщиною смуги за варіювання похибок вхідних параметрів крайової задачі (2)-(4). Рис. 1 ілюструє збурення дифузійних потоків залежно від точності вимірювання початкової концентрації домішки в тілі. На рис. 1а показані розподіли функції  $\Delta\langle J \rangle$  для різних значень похибки  $\Delta C_*$  у такі моменти безрозмірного часу:  $\tau = 0,03$  (криві  $a$ , суцільні лінії),  $\tau = 0,1$  (криві  $b$ , штрихові лінії),  $\tau = 0,5$  (криві  $v$ , штрих-пунктирні лінії). На рис. 1б проілюстровано порівняльні розподіли збурень дифузійних потоків у шаруватій смугі  $\Delta\langle J \rangle$  (штрихові лінії) і в однорідному шарі  $\Delta J_0$  (суцільні лінії) залежно від значень  $\Delta C_*$  для  $\tau = 0,03$  (криві  $a$ ) і  $\tau = 0,1$  (криві  $b$ ). Тут криві  $1^\pm$  побудовані для значень  $C_* \pm \Delta C_* = 0,1 \pm 0,01$ ; криві  $2^\pm$  — для  $C_* \pm \Delta C_* = 0,1 \pm 0,02$ ; криві  $3^\pm$  — для  $C_* \pm \Delta C_* = 0,1 \pm 0,03$ .

На рис. 2 показано вплив точності вхідних значень приведенного коефіцієнта дифузії  $d$  (рис. 2а) та характерної товщини включень  $h_1$  (рис. 2б) на поведінку функції збурення усередненого потоку  $\Delta\langle J \rangle$  для моментів часу  $\tau = 0,01; 0,1; 0,5$

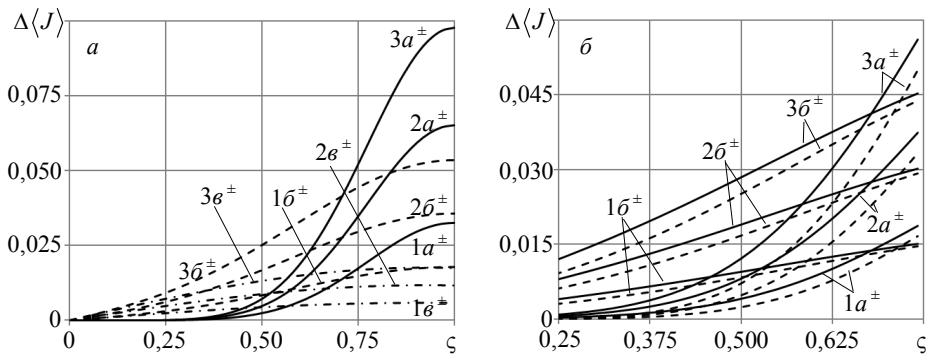


Рис. 1. Розподіли збурень усередненого потоку (а) та порівняльні розподіли потоків в однорідному та неоднорідному тілі (б) за похибки параметра  $C_*$

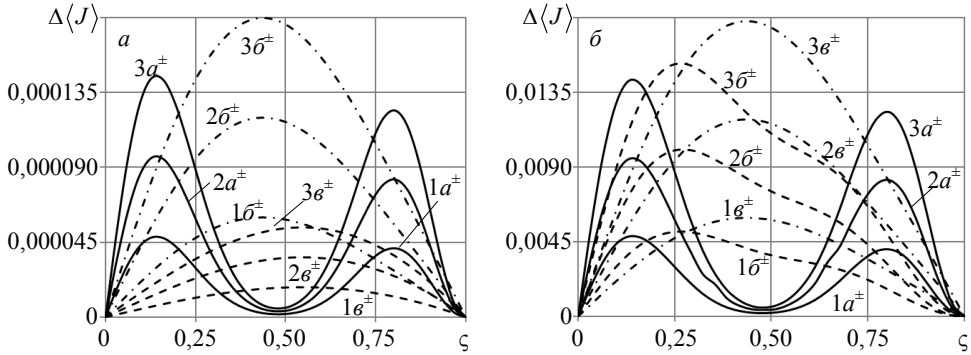


Рис. 2. Розподіли збурень усередненого потоку для похибки параметра  $d$  (а) та  $h_1$  (б)

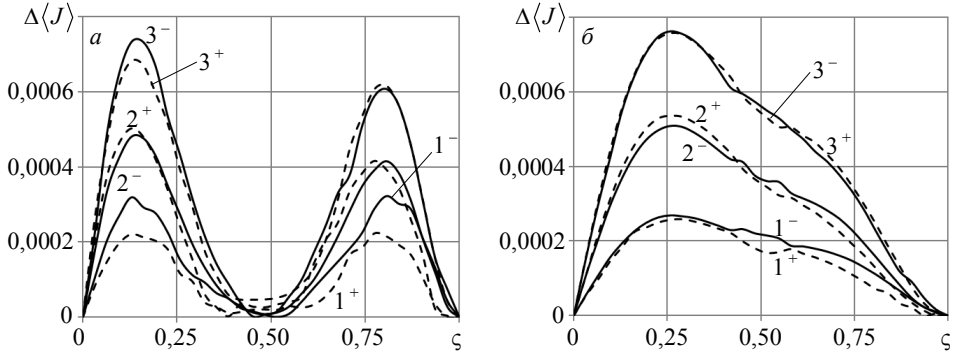


Рис. 3. Збурення усередненого потоку для похибки параметра  $\nu_1$  за  $\tau = 0,01$  (а) та  $\tau = 0,03$  (б)

(криві  $a$ - $v$ , рис. 2а) та  $\tau = 0,03$ ; 0,1; 0,5 (криві  $a$ - $v$ , рис. 2б). Тут криві  $1^\pm$ - $3^\pm$  відповідають значенням похибки  $\Delta = \pm 0,001; \pm 0,002; \pm 0,003$ .

На рис. 3 наведені розподіли збурень усередненого потоку залежно від похибки  $\Delta \nu_1 = \pm 0,01; \pm 0,02; \pm 0,03$  (криві  $1^\pm$ - $3^\pm$ ) для  $\tau = 0,01$  (рис. 3а) і  $\tau = 0,03$  (рис. 3б). Зазначимо, що при збуренні параметрів  $\nu_1$  і  $h_1$  проводився перерахунок іншого коефіцієнта за формулами  $\nu_1 \pm \Delta \nu_1 = n_1 h_1^{nep} / z_0$  або  $h_1 \pm \Delta h_1 = \nu_1^{nep} z_0 / n_1$ , оскільки повинна виконуватись умова:  $n_1 \in \mathbf{N}$ .

У випадку, коли з похибкою задається значення концентрації домішкової речовини у початковий момент часу  $C_*$ , збурення усередненого потоку та потоку в однорідному тілі є монотонно зростаючими функціями (рис. 1) і досягають своїх максимальних значень біля нижньої межі прошарку  $\zeta = 1$  (рис. 1а, табл. 1). Окрім того, збільшення вдвічі величини  $\Delta C_*$  викликає збільшення збурення  $\Delta \langle J \rangle$  до 50 % (криві  $1^\pm, 2^\pm$ , рис. 1а). Чим менший час протікання процесу дифузії, тим більших збурень зазнає усереднений потік за зміни однієї і тієї ж значимої цифри  $C_*$  (криві  $a$ , рис. 1а). Причому максимальні значення  $\Delta \langle J \rangle$  для неоднорідної



смуги та  $\Delta J_0$  для смуги без прошарків є практично однакові. Зазначимо, що найбільша різниця між збуренням потоків в однорідному та неоднорідному тілі досягається в середині смуги, зокрема, на відріжку  $\zeta \in [0, 25; 0, 75]$  відхилення між  $\Delta \langle J \rangle$  і  $\Delta J_0$  можуть становити до 30 % (рис. 1б).

За зміни однієї і тієї ж значимої цифри у зазначених параметрах збурення потоку похибкою у значенні  $d$  є на порядок меншим, ніж похибкою у об'ємній частці включень, і на два порядки меншими, ніж рази збурення  $h_1$ . У випадку збурення одного з параметрів  $d$ ,  $v_1$  або  $h_1$  для малих часів  $\tau$  спостерігається утворення двох максимумів функції  $\Delta \langle J(\zeta) \rangle$  біля поверхонь смуги (рис. 3а, криві  $a$  на рис. 2). Причому максимум цієї функції біля нижньої границі завжди є менший, і його величина сягає 86 % глобального максимуму біля верхньої поверхні шару (рис. 2). Із збільшенням часу протікання процесу максимум біля границі  $\zeta = 1$  зменшується (рис. 3б і криві  $b$  на рис. 2б), значення функції  $\Delta \langle J(\zeta) \rangle$  в середині тіла суттєво зростають, натомість максимум біля верхньої границі прошарку зсувається до середини смуги (криві  $b$  на рис. 2а, криві  $b$  на рис. 2б), в подальшому зі зростанням часу протікання процесу дифузії його значення поступово зменшуються (криві  $b$ , рис. 2а).

Для випадків, якщо коефіцієнт дифузії у включеннях більший, ніж у матриці, збурення вхідних параметрів впливають так само на збурення усередненого потоку, як і для випадку менших значень коефіцієнта дифузії мігруючих частинок у включеннях.

Зазначимо, що у формулах (7)-(10) знак відхилення початкової концентрації, приведенного коефіцієнта дифузії та товщини прошарків практично не впливає на величину збурення потоків (рис. 1-2, табл. 1). Лише для зміни об'ємної частки включень для малих часів спостерігається різниця у значеннях функції  $\Delta \langle J \rangle$  для  $\tilde{v}_1 = v_1 + \Delta v_1$  і  $\tilde{v}_1 = v_1 - \Delta v_1$ , наприклад, ця різниця складає до 35 % для  $\tau = 0,01$  і до 22% для  $\tau = 0,03$  (рис. 3).

## 5. Похибка методу обчислень усередненого потоку

Для поставленої задачі похибка методу виникає в процесі підсумовування нескінченних рядів. Дослідимо її вплив на величину збурення усередненого потоку маси. Для цього збурюватимемо один із вхідних параметрів крайової задачі (2)-(4) зі зміною точності сумування тригонометричних рядів, у вигляді яких отримані розв'язки задач дифузії у двофазній випадково неоднорідній смугі.

На рис. 4 наведено розподіли збурення усередненого потоку маси  $\Delta \langle J \rangle$  за похибок у вимірах початкової концентрації домішкових частинок у тілі (рис. 4а) та приведенного коефіцієнта дифузії (рис. 4б) для різних точностей обчислення суми рядів у формулах (7) і (9) для тих самих базових значень коефіцієнтів задачі. Криві  $a$ - $b$  побудовані для  $\varepsilon = 10^{-7}$ ,  $10^{-9}$ ,  $10^{-11}$  відповідно; криві  $1^+3^+$  — для значень похибки  $\Delta C_*$ ,  $\Delta d = 0,001$ ;  $0,002$ ;  $0,003$ ; криві  $1^-3^-$  — для  $\Delta C_*$ ,  $\Delta d = -0,001$ ;  $-0,002$ ;  $-0,003$ .

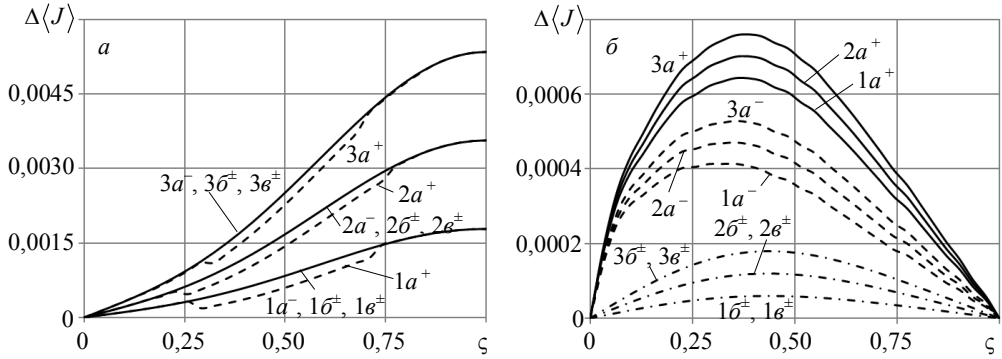


Рис. 4. Розподіли збурень усередненого потоку залежно для похибки параметра  $C^*$  (а) та  $d$  (б) залежно від точності підсумовування рядів

У випадку, якщо показники вимірювання початкової концентрації є більшими за її фактичне значення, то зменшення точності підсумовування рядів у розрахункових формулах призводить до зменшення збурень усередненого потоку на відрізку  $\zeta \in [0,25; 0,75]$  до 10% (криві  $1a^+ - 3a^+$ , рис. 4а). Зростання точності  $\varepsilon$  від  $10^{-9}$ , а також у випадку менших значень збуреного параметра  $C^*$ , ніж його дійсної величини для точності  $10^{-7}$ , практично не впливає на поведінку та значення збурення потоку (криві  $1a^- - 3a^-$ ,  $1b^\pm - 3b^\pm$ ,  $1c^\pm - 3c^\pm$ , рис. 4а), а саме різниця між  $\langle J(\zeta, \tau) \rangle / J_*$  і  $\langle \tilde{J}(\zeta, \tau) \rangle / J_*$  спостерігається у 5-7-ому знаках після коми.

Зменшення точності підсумовування рядів  $\varepsilon$  у випадку збурення параметра  $d$  призводить до значної різниці між розподілами, побудованими для значень  $d + \Delta d$  і  $d - \Delta d$  (криві  $1a^+ - 3a^+$  та  $1a^- - 3a^-$ , рис. 4б). У цьому випадку функція  $\Delta\langle J \rangle$  від границі  $\zeta = 0$  різко зростає, причому майже однаково для всіх значень  $d$ , і набуває максимального значення в околі середини смуги (криві  $a$ , рис. 4б). Якщо точність підсумовування тригонометричних рядів у розрахункових формулах збільшувати від  $10^{-9}$ , то поведінка збурення усередненого потоку не змінюється (криві  $1b^\pm - 3b^\pm$ ,  $1c^\pm - 3c^\pm$ , рис. 4б), а відповідні значення  $\Delta\langle J \rangle$  різняться не більше, ніж у 5-ій значимій цифрі.

Зазначимо, що зміна точності обчислень за наявності похибок у вимірюваннях значень параметрів  $h_1$  і  $v_1$  мають однаковий характер впливу на поведінку збурення потоку, що і похибка у значенні вимірювань  $d$ , проте значення  $\Delta\langle J \rangle$  у випадку збурення характерної товщини прошарку й об'ємної частки включень на порядок більші, ніж для збурення приведенного коефіцієнта дифузії.

Проведені розрахунки функцій  $\Delta\langle J \rangle$  і  $\Delta J_0$  для точності обчислення рядів  $\varepsilon = 10^{-13}$  та  $\varepsilon = 10^{-15}$  призвели до зміни їх значень у 8 значимій цифрі величини збурення потоків.

Окрім похибки методу на загальну похибку обчислень впливає і похибка накопичення (похибка заокруглення), пов'язана з кінцевою розрядністю процесора

під час роботи з дійсними числами [11, 12]. Під час підсумовування ряду у процесі зростання кількості просумованих членів  $n$ , з одного боку, зменшується похибка методу, і водночас зростає похибка накопичення. Тому під час виконання обчислень потрібно враховувати обидва фактори. Зауважимо, що за зростання  $\varepsilon$  до  $10^{-15}$  накопичення похибки заокруглення не спостерігалось.

**Висновки.** Таким чином досліджено вплив різних типів похибок на розв'язки крайових задач дифузії домішкової речовини в однорідній і випадково неоднорідній шаруватій смугах, сформульованих для функції потоку.

Встановлено, що потік у смузі без прошарків може збурювати лише похибка вимірювання концентрації домішки у початковий момент часу, причому поведінка та значення функції збурення потоку в однорідному тілі практично не відрізняються від функції збурення усередненого потоку в неоднорідній смузі.

За наявності відхилень вимірів початкової концентрації від її істинного значення максимальні значення збуреного потоку досягаються в околі нижньої границі тіла. А збурення величини приведенного коефіцієнта дифузії, об'ємної частки включень або товщини прошарків призводить до опуклих вгору розподілів збурення потоків з максимальними значеннями біля середини смуги. Чим більший час протікання процесу дифузії, тим до менших збурень потоку призводить збурення вхідних параметрів задачі.

Проведені числові експерименти виявили найбільшу чутливість усередненого дифузійного потоку від збурень значень початкової концентрації та характерної товщини включень, у той же час відхилення приведенного коефіцієнта дифузії найменше впливають на функцію потоку маси. Показано, що підсумовування рядів в одержаних розрахункових формулах для потоків маси як в однорідній, так і у випадково неоднорідній структурах із точністю  $10^{-9}$  є достатньою, при цьому не відбувається накопичення похибки заокруглення.

## Література

- [1] Бахрушин В. Є. Математичні основи моделювання систем: Навчальний посібник для студентів. — Запоріжжя: Класичний приватний університет, 2009. — 224 с.
- [2] Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 1. — Москва: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1962. — 464 с.
- [3] Кушнір Р., П'янило Я., П'янило А. Особливості застосування числового методу скінченних різниць при моделюванні фізичних процесів // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2005. — Вип. 2. — С. 58-69.
- [4] Лопух Н. Вплив неусувної похибки на розрахунок газодинамічних параметрів руху газу в трубопроводі // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2010. — Вип. 11. — С. 97-104.
- [5] Метрологія, стандартизація та управління якістю // Л. П. Клименко, Л. В. Пізінцалі, Н. І. Александровська, В. Д. Свдокимов. — Миколаїв: Вид-во ЧДУ ім. Петра Могили, 2011. — 243 с.
- [6] Метрологія, стандартизація та управління якістю в системах зв'язку // Л. В. Коломієць, П. П. Воробієнко, М. Т. Козаченко та ін. — Одеса: ТОВ «ВМВ», 2009. — 376 с.
- [7] Лыков А. В. Теория теплопроводности. — Москва: Высшая школа, 1978. — 480 с.
- [8] Чапля С. Я., Чернуха О. Ю., Давидок А. Є. Математичне моделювання дифузійних потоків у випадково неоднорідній шаруватій смузі // Доповіді НАН України. — 2012. — № 11. — С. 40-46.

- [9] Чапля Є. Я., Чернуха О. Ю. Математичне моделювання дифузійних процесів у випадкових і регулярних структурах. — Київ: Наукова думка, 2009. — 302 с.
- [10] Давидок А. Є. Моделювання парного взаємовпливу шаруватих включень на потік маси у випадково неоднорідній смузі за бета-розподілу // Прикладні проблеми механіки і математики. — 2014. — Вип. 12. — С. 146-153.
- [11] Момот А. І., Оліх О. Я. Математичне моделювання: метод. вказівки до практ. робіт. — Київ: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2011. — 72 с.
- [12] Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок. — Москва: «Мир», 1985. — 272 с.

## **Dependence of the averaged mass flow behaviour in a multilayered body on the input data error**

Anastasiia Davydok, Yaroslav Pjanylo, Olha Chernukha

*For the initial-boundary value problem of admixture diffusion in a two-phase multilayered body with the uniform distribution of phases the influence of errors on behaviour of the mass flow is investigated. The effect of input data errors, method and rounding errors on the averaged diffusion flow is analyzed. A series of numerical experiments are carried out. It is shown that the presence of measurement departures in the initial concentration and characteristic thickness of inclusions has the greatest effect on the flow disturbance and reduced diffusion coefficient disturbances least influence on the flow.*

## **Зависимость поведения усредненного потока массы в многослойном теле от погрешности входных данных**

Анастасія Давидок, Ярослав П'янило, Ольга Чернуха

*Для краевой задачи диффузии примесного вещества в двухфазном многослойном теле с равномерным распределением фаз исследовано влияние погрешностей на поведение потока массы. Проанализировано влияние погрешностей исходных данных, метода и округления на усредненный диффузионный поток. Проведен ряд численных экспериментов и показано, что наличие отклонений в измерениях начальной концентрации и характерной толщины включений имеет наибольшее влияние на возмущения потока, а возмущения приведенного коэффициента диффузии влияют на поток массы наименее.*

Отримано 20.08.15