

## Вплив міжповерхневих рідинних містків на контакт пружного тіла і жорсткої основи з періодичною системою прямокутних виїмок

Олег Козачок<sup>1</sup>, Богдан Слободян<sup>2</sup>, Ростислав Мартиняк<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060, e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

<sup>2</sup> к. ф.-м. н., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060, e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

<sup>3</sup> д. ф.-м. н., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060, e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

*Розглянуто безфрикційний контакт пружного тіла та жорсткої основи за наявності в ній періодично розташованих виїмок прямокутної форми, коли в середніх частинах міжповерхневих просвітів містяться рідинні містки, а на краях — газ, що перебуває під сталим тиском. Вважається, що рідина нестислива та повністю змочує поверхні тіл. Внаслідок поверхневого натягу рідини виникає перепад тисків у рідині та газі, що описується рівнянням Лапласа. Сформульовану контактну задачу для пружного півпростору зведено до сингулярного інтегрального рівняння (СІР) з ядром Гільберта, відносно похідної від висоти зазорів і трансцендентного рівняння для визначення довжини ділянки з рідиною. Проаналізовано залежності ділянки з рідиною, перепаду тисків, форми зазорів і контактного зближення тіл від прикладеного навантаження, об'єму рідини та її поверхневого натягу.*

**Ключові слова:** контактна взаємодія, виїмки, міжповерхневі зазори, рідина, газ, поверхневий натяг, сингулярне інтегральне рівняння.

**Вступ.** Під час роботи різних механізмів в реальних умовах на контактних парах можуть конденсуватись чи адсорбуватись тонкі шари рідини. Якщо рідина змочує межі тіл, то під дією поверхневого натягу вона збирається у найвужчих місцях зазорів між ними, де утворює міжповерхневі містки. Саме з цим пов'язаний ефект капілярної адгезії, вплив якого на контактну поведінку стає відчутнішим зі зменшенням їх розмірів, що засвідчують експериментальні дані [1-5].

Дослідження взаємодії випуклих тіл з урахуванням рідинних міжповерхневих містків розпочато в працях [6-7]. Вивчено вплив капілярних ефектів на контакт шорстких тіл [8, 9]. Досліджено взаємодію тіл, що мають локальні виїмки гладкої форми, частково заповнені рідиною, яка змочує [10-12] або не змочує [13] їх поверхні. Розглянуто контакт тіл, межа одного з яких має періодичний рельєф, за наявності на краях зазорів містків рідини, яка змочує їх поверхні [14]. Досліджено [15] взаємодію пружного тіла та жорсткої основи з мілкою виїмкою

прямокутної форми, коли рідинний місток розташований у середній частині проясніту, а крайні його частини містять газ.

Вивчено [16-24] контакт тіл за наявності між ними поодиноких або періодично розташованих зазорів, цілком заповнених рідиною або газом.

У працях [25-33] досліджено фрикційні ефекти під час взаємодії тіл з поодинокими виїмками або регулярним рельєфом. Вивчено [34] контактну міцність тіл з поверхневими виїмками. Ефект насиченості фактичної площі контакту за взаємодії пружного тіла та жорсткого штампа з періодичним зубчастим мікрорельєфом теоретично обґрунтовано у праці [35].

Нижче досліджується контакт пружного тіла та жорсткої основи з регулярним рельєфом, сформованим періодично розташованими виїмками прямокутної форми, за наявності в середніх частинах міжповерхневих прояснітів рідини, що змочує поверхні тіл, а на краях прояснітів — газу, що перебуває під сталим тиском.

### 1. Формулювання задачі

Розглянемо безфрикційну взаємодію пружного ізотропного півпростору з жорсткою основою, межа якої має нескінченну періодичну систему розташованих із періодом  $d$  плитких тунельних виїмок прямокутної форми ширини  $2a$  та висоти  $A$  ( $A/a \ll 1$ ). Півпростір притискається до основи під дією рівномірно розподіленого на нескінченності навантаження  $P^\infty$  і в ньому реалізується стан плоскої деформації. Внаслідок нерівності основи між тілами виникають проясніти (зазори) висоти  $h(x)$  (рис. 1). Вважаємо, що вони частково заповнюються нестисливою рідиною, яка повністю змочує поверхні тіл (крайовий кут змочування  $\theta = 0^0$ ). Під дією поверхневого натягу  $\sigma$  рідина збиратиметься в найвужчих місцях прояснітів і формуватиме міжповерхневий рідинний місток на середній частині кожного проясніту вздовж смуги шириною  $2a$ . На краях зазорів міститься газ під сталим тиском  $P_1$ , що не змінюється при навантаженні. Кількість рідини при стиску тіл

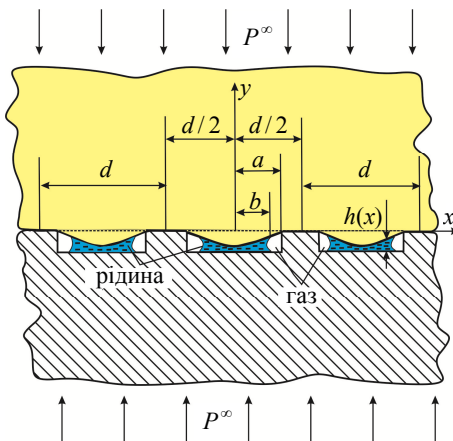


Рис. 1

залишається незмінною, тобто об'єм нестислової рідини  $V_0$ , що припадає на одиницю довжини кожного зазору у поздовжньому напрямі, є величиною сталою ( $V_0 = const$ ).

Розглядаємо квазістатичне навантаження, за якого у рідині та газі діє лише тиск і не виникають зсувні зусилля. Тому межа пружного тіла вздовж зазорів вільна від дотичних напружень.

Меніск (бічна поверхня рідини, яка межує з газом) у перерізі має форму дуги кола деякого радіуса  $R$ . На менісках діє поверхневий натяг  $\sigma$ . Внаслідок цього тиск у рідині  $P_2$  менший, ніж тиск газу  $P_1$ , і визначається формулою Лапласа

$$P_2 = P_1 - \sigma/R. \quad (1)$$

Враховуючи повне змочування рідиною тіл і малу висоту зазорів, будемо вважати, що меніск є півколом, радіус якого рівний половині висоти зазорів у точках  $x = \pm b$  виходу менісків на поверхню тіл:  $R = h(b)/2$ . Це дозволяє записати формулу Лапласа (1) таким чином:

$$P_1 - P_2 = 2\sigma/h(b). \quad (2)$$

У процесі навантаження змінюватимуться висота зазорів  $h(x)$ , довжина ділянок з рідиною  $2b$  та тиск рідини  $P_2$ .

Контактно-крайові умови сформульованої плоскої контактної задачі мають вигляд:

$$\tau_{xy} = 0, \quad x \in (-a + kd; a + kd), \quad (3)$$

$$\sigma_{yy} = -P_2, \quad x \in (-b + kd; b + kd), \quad (4)$$

$$\sigma_{yy} = -P_1, \quad x \in (-a + kd; -b + kd) \cup (b + kd; a + kd) \quad (5)$$

вздовж зазорів  $x \in (-a + kd; a + kd)$ , ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ );

$$\tau_{xy} = 0, \quad x \in [-d/2 + kd; -a + kd] \cup [a + kd; d/2 + kd], \quad (6)$$

$$v = 0, \quad x \in [-d/2 + kd; -a + kd] \cup [a + kd; d/2 + kd] \quad (7)$$

на ділянках контакту  $x \in [-d/2 + kd; -a + kd] \cup [a + kd; d/2 + kd]$ , ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ );

$$\sigma_{yy} = -P^\infty, \quad \sigma_{xx} = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad (8)$$

на нескінченості. Тут  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\tau_{xy}$  — компоненти тензора напружень;  $v$  — складова вектора переміщення вздовж осі  $Oy$ .

Для визначення довжини ділянок з рідиною використовуємо умову збереження кількості рідини при навантаженні

$$l \int_{-b}^b h(x) dx = V_0, \quad (9)$$

де  $l = 1$  м.

## 2. Методика розв'язування задачі

Використовуючи метод комплексних потенціалів Колосова-Мусхелішвілі, напруження та переміщення подамо у вигляді:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} - i\tau_{xy} &= \Phi(z) - \Phi(\bar{z}) + (z - \bar{z})\Phi'(z) - P^\infty, \\ 2G(u' + iv') &= \kappa\Phi(z) + \overline{\Phi(\bar{z})} - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} + \frac{3-\kappa}{4}P^\infty. \end{aligned} \quad (10)$$

Тут  $z = x + iy$ ,  $\Phi(z)$  — кусково-голоморфна у площині  $D = D_1 \cup D_2$  функція, що зникає на нескінченності;  $D_1$  ( $y > 0$ ),  $D_2$  ( $y < 0$ ) — верхня та нижня півплощини;  $\kappa = 3 - 4\nu$ ;  $G$  і  $\nu$  — модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона матеріалу пружного тіла.

Якщо виразити комплексний потенціал  $\Phi(z)$  через похідну від висоти зазорів  $h'(x)$  [13]

$$\Phi(z) = \frac{(-1)^{3-n}}{dK} \int_{-a}^a h'(t) \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi(t-z)}{d} \right) dt, \quad (11)$$

де  $K = 2(1-\nu)/G$ , то подання (10) задовольнятимуть всі контактні-крайові умови (3)-(8), за винятком (4), (5).

Задовольнивши за допомогою подань (10), (11) умови (4), (5), отримаємо сингулярне інтегральне рівняння (СІР) з ядром Гільберта щодо функції  $h'(x)$ :

$$\frac{2}{d} \int_{-a}^a h'(t) \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi(t-x)}{d} \right) dt = K (P^\infty - P(x)), \quad x \in [-a, a]. \quad (12)$$

Тут  $P(x) = \begin{cases} P_1, & b < |x| \leq a, \\ P_1 - 2\sigma/h(b), & |x| \leq b. \end{cases}$

У крайніх точках зазорів повинні виконуватися умови рівності висоти зазорів висоті виїмок  $h(-a) = A$ ,  $h(a) = A$ , які в еквівалентному вигляді запишемо так

$$\int_{-a}^a h'(t) dt = 0, \quad h(-a) = A. \quad (13)$$

Провівши заміну змінних

$$\xi = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi x}{d} \right), \quad \eta = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi t}{d} \right), \quad \alpha = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi a}{d} \right), \quad \beta = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi b}{d} \right), \quad (14)$$

СІР (12) з ядром Гільберта трансформуюмо у СІР з ядром Коші

$$2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{h'(\eta)}{\eta - \xi} d\eta = \frac{d}{1 + \xi^2} K (P^\infty - P(\xi)), \quad \xi \in [-\alpha, \alpha], \quad (15)$$

де  $P(\xi) = \begin{cases} P_1, & \beta < |\xi| \leq \alpha, \\ P_1 - 2\sigma/h(\beta), & |\xi| \leq \beta. \end{cases}$

У зв'язку з наявністю кутових точок на кінцях виїмок шукатимемо необмежений у точках  $\xi = \pm \alpha$  розв'язок рівняння (15), який з урахуванням першої з умов (13) матиме вигляд

$$h'(\xi) = \left[ \frac{Kd(P^\infty - P_1)\sqrt{\alpha^2 + 1}}{2\pi} + \frac{2K\sigma d\sqrt{\alpha^2 + 1}}{\pi^2 h(\alpha)} \arcsin \left( \frac{\beta\sqrt{\alpha^2 + 1}}{\alpha\sqrt{1 + \beta^2}} \right) \right] \times \\ \times \frac{\xi}{(1 + \xi^2)\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}} + \frac{K\sigma d}{2\pi^2 h(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha, \xi, \beta) - \Gamma(\alpha, \xi, -\beta)}{1 + \xi^2}, \quad |\xi| \leq \alpha. \quad (16)$$

$$\text{Тут } \Gamma(\alpha, \xi, t) = \ln \frac{\alpha^2 - t\xi + \sqrt{(\alpha^2 - \xi^2)(\alpha^2 - t^2)}}{\alpha^2 - t\xi - \sqrt{(\alpha^2 - \xi^2)(\alpha^2 - t^2)}}.$$

Оскільки з виразу (16) не вдається аналітично виразити висоту зазорів  $h(\xi)$ , то подамо функцію  $h'(\xi)$  у вигляді ряду за поліномами Чебишева:

$$h'(\xi) = -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}} \sum_{l=0}^L \Theta_l (2l+1) T_{2l+1}(\xi/\alpha), \quad (17)$$

де коефіцієнти  $\Theta_l$  визначаються з системи  $L+1$  рівнянь, яку отримали, прирівнявши вирази (16) і (17) у точках  $\xi_j = \alpha \cos(\pi j / (2L+3))$ ,  $j = \overline{1, L+1}$ :

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \xi_j^2}} \sum_{l=0}^L \Theta_l (2l+1) T_{2l+1}(\xi_j/\alpha) &= \frac{K\sigma d}{2\pi^2 h(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha, \xi_j, \beta) - \Gamma(\alpha, \xi_j, -\beta)}{1 + \xi_j^2} + \\ &+ \left[ \frac{Kd(P^\infty - P_1)\sqrt{\alpha^2 + 1}}{2\pi} + \frac{2K\sigma d\sqrt{\alpha^2 + 1}}{\pi^2 h(\alpha)} \arcsin\left(\frac{\beta\sqrt{\alpha^2 + 1}}{\alpha\sqrt{1 + \beta^2}}\right) \right] \frac{\xi_j}{(1 + \xi_j^2)\sqrt{\alpha^2 - \xi_j^2}}. \end{aligned}$$

Проінтегрувавши вираз (17) з урахуванням другої умови співвідношення (13), знайдемо висоту зазорів  $h(\xi)$

$$h(\xi) = \sqrt{\alpha^2 - \xi^2} \sum_{l=0}^L \Theta_l U_{2l}(\xi/\alpha) + A. \quad (18)$$

Підставивши вираз (18) в умову (9), отримаємо трансцендентне рівняння

$$\int_{-\beta}^{\beta} \frac{\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}}{1 + \xi^2} \sum_{l=0}^L \Theta_l U_{2l}(\xi/\alpha) d\xi + 2A \arctg(\beta) = 2AV_0 \arctg(\alpha), \quad (19)$$

з якого визначаємо невідому довжину ділянки з рідиною  $2\beta$ .

Для інженерних розрахунків контактної взаємодії тіл з регулярним рельєфом важливу роль відіграють такі ефективні контактні параметри, як контактне зближення та контактна податливість матеріалів. Контактне зближення  $\Delta v^\infty$  виражається через висоту міжповерхневих зазорів за формулою [14]

$$\Delta v^\infty = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} (-r(x) - h(x)) dx. \quad (21)$$

Ефективна контактна податливість  $k^*$  визначається як похідна від контактного зближення по зовнішньому навантаженню [14]:  $k^* = d(\Delta v^\infty) / dP^\infty$ .

### 3. Аналіз результатів

Розрахунки проведено для безрозмірних величин: висоти міжконтактного зазору  $\tilde{h} = h/d$ ; півдовжини ділянки міжконтактного зазору  $\tilde{a} = a/d$ ; півдовжини ділянки з рідиною  $\tilde{b} = b/d$ ; поверхневого натягу рідини  $\tilde{\sigma} = K\sigma/d$ ; тиску на нескінченності  $\tilde{P}^\infty = KP^\infty$ ; тиску газу  $\tilde{P}_1 = KP_1$ ; висоти виїмки  $\tilde{A} = A/d$ ; контактної зближення  $\Delta\tilde{v}^\infty = \Delta v^\infty/d$ ; контактної податливості  $\tilde{k}^* = d(\Delta\tilde{v}^\infty)/d\tilde{P}^\infty$ ; об'єму рідини в зазорі  $\tilde{V}_0 = V_0/V$ , де  $V$  — об'єм виїмки. Числовий аналіз здійснено для півдовжини виїмок  $\tilde{a} = 0,25$ , висоти виїмок  $\tilde{A} = 0,001$  та тиску газу  $\tilde{P}_1 = 10^{-3}$ .

Вплив зовнішнього навантаження  $\tilde{P}^\infty$  і поверхневого натягу рідини  $\tilde{\sigma}$  на півдовжину ділянки з рідиною за фіксованого об'єму рідини  $\tilde{V}_0 = 0,2$  та різних значень поверхневого натягу  $\tilde{\sigma} = 10^{-8}, \tilde{\sigma} = 5 \cdot 10^{-8}, \tilde{\sigma} = 10^{-7}$  проілюстровано на рис. 2. Довжина ділянки з рідиною  $\tilde{b}$  монотонно зростає з навантаженням. Збільшення поверхневого натягу рідини також зумовлює збільшення  $\tilde{b}$ , проте при зовнішніх тисках  $\tilde{P}^\infty \leq 4 \cdot 10^{-3}$  цей вплив практично невідчутний і починає проявлятися лише при  $\tilde{P}^\infty > 4 \cdot 10^{-3}$ , причому, чим більший поверхневий натяг рідини, тим більша довжина ділянки з рідиною.

На рис. 3 зображено залежність півдовжини ділянки з рідиною  $\tilde{b}$  від зовнішнього тиску  $\tilde{P}^\infty$  для різних значень об'єму рідини ( $\tilde{V}_0 = 0,1; 0,2; 0,3$ ) за фіксованого поверхневого натягу  $\tilde{\sigma} = 10^{-8}$ . Зменшення кількості рідини в зазорі призводить до зменшення довжини ділянки з рідиною за однакового навантаження на нескінченності.

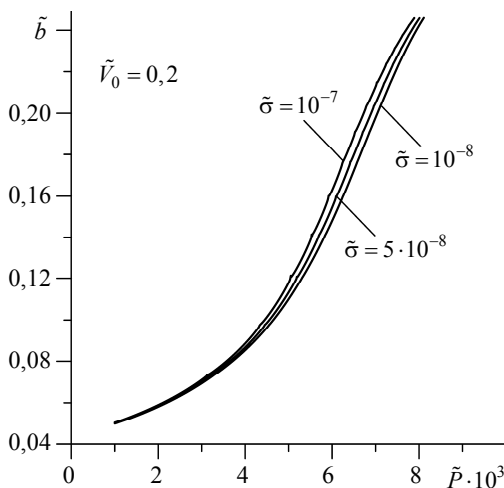


Рис. 2

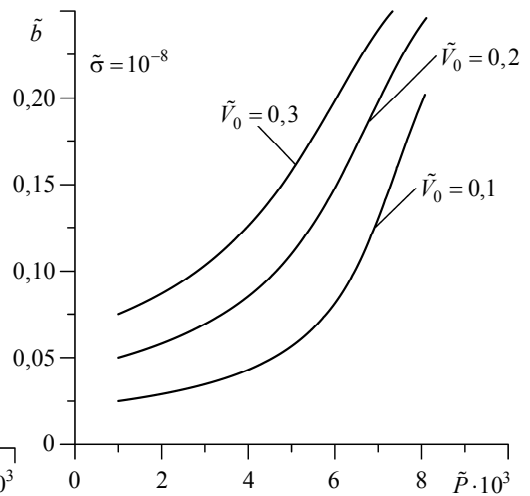


Рис. 3

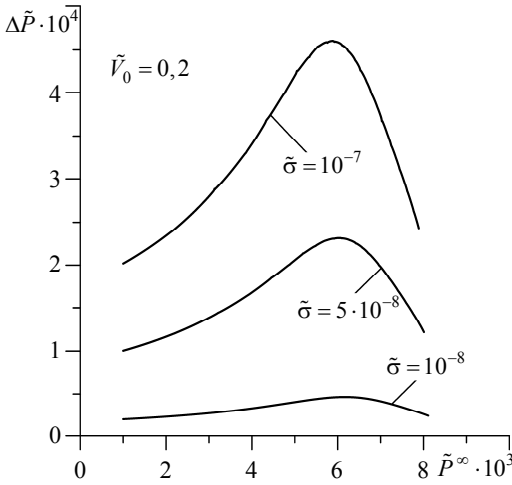


Рис. 4

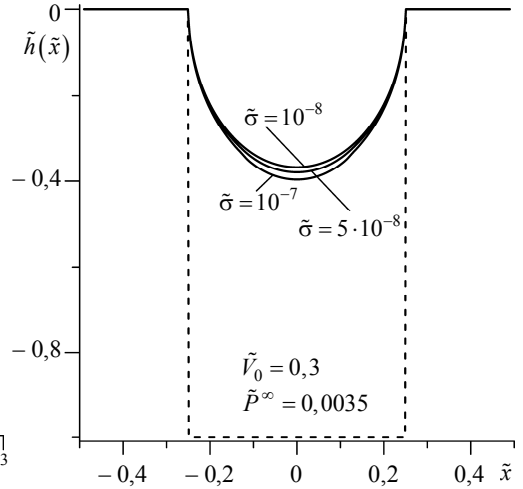


Рис. 5

Залежність перепаду тисків  $\Delta\tilde{P} = \tilde{P}_1 - \tilde{P}_2$  у рідині й газі від зовнішнього навантаження  $\tilde{P}^\infty$  за фіксованого об'єму рідини  $\tilde{V}_0 = 0,2$  та різних значень поверхневого натягу  $\tilde{\sigma}$  проілюстровано на рис. 4. Чим більший поверхневий натяг, тим більший перепад тисків. Для розглянутих натягів перепад тисків  $\Delta\tilde{P}$  немонотонно залежить від прикладеного навантаження: спочатку зростає за збільшення зовнішнього тиску, а після досягнення ним певної величини — починає спадати. Це пояснюється зростанням радіуса меніска при наближенні рідини до країв зазору. Що більший натяг рідини, то за меншого навантаження досягається максимум тиску в рідині.

На рис. 5 зображено висоти зазорів  $\tilde{h}(\tilde{x})$  за різних значень поверхневого натягу рідини при фіксованому її об'ємі  $\tilde{V}_0 = 0,3$  та зовнішньому навантаженні  $\tilde{P}^\infty = 3,5 \cdot 10^{-3}$ . Збільшення поверхневого натягу рідини зумовлює зменшення висоти міжконтактного зазору. Штрихова крива зображує форму виїмок  $\tilde{r}(\tilde{x})$ .

Рис. 6 ілюструє зміну контактного зближення  $\Delta\tilde{v}^\infty$  зі зміною зовнішнього тиску  $\tilde{P}^\infty$  за різних значень поверхневого натягу рідини  $\tilde{\sigma}$  при фіксованому її об'ємі  $\tilde{V}_0 = 0,3$ . Бачимо, що зі збільшенням зовнішнього навантаження контактне зближення монотонно зростає, причому, чим більший поверхневий натяг, тим воно є більшим.

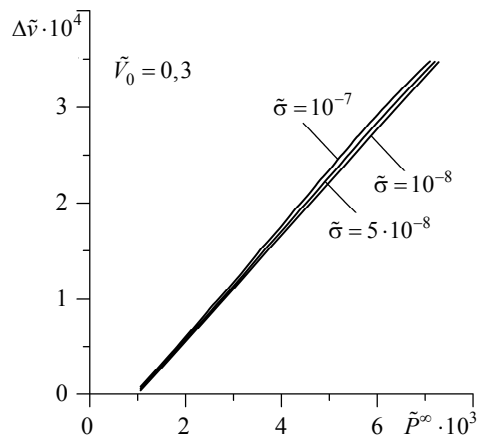


Рис. 6

**Висновки.** Досліджено контакт пружного тіла та жорсткої основи, межа якої має періодичну систему виїмок прямокутної форми, за наявності в міжконтактних зазорах газу та нестисливої рідини, яка змочує поверхні тіл. Перепад тисків у рідині та газі описується рівнянням Лапласа. Довжина ділянки з рідиною і висота зазорів заздалегідь невідомі та змінюються разом із навантаженням. Сформульовану контактну задачу зведено до сингулярного інтегрального рівняння з ядром Гільберта відносно висоти міжконтактних зазорів і трансцендентного рівняння стосовно довжини ділянки з рідиною, яке було розв'язано числово. Досліджено залежності довжини ділянки з рідиною та висоти зазорів від прикладеного навантаження, об'єму рідини і її поверхневого натягу. Встановлено, що збільшення поверхневого натягу рідини зумовлює зростання довжини ділянки з рідиною і перепаду тисків у рідині та газі. Із ростом зовнішнього навантаження довжина ділянки з рідиною монотонно зростає, а перепад тисків поводить себе немонотонно — спочатку зростає, потім у разі досягнення навантаженням певної величини — починає спадати. Наявність рідинних містків зумовлює зменшення висоти зазору: чим більший поверхневий натяг рідини, тим менший просвіт.

### Література

- [1] *Kato Takahisa, Watanabe Souta, Matsuoka Hiroshige.* Dynamic characteristics of an in-contact headslider considering meniscus force: Part 1. Formulation and application to the disk with sinusoidal undulation // *J. Tribology.* — 2000. — Vol. 122. — P. 633-638.
- [2] *Kato Takahisa, Watanabe Souta, Matsuoka Hiroshige.* Dynamic characteristics of an in-contact headslider considering meniscus force: Part 2. Application to the disk with random undulation and design conditions // *J. Tribology.* — 2001. — Vol. 123. — P. 168-174.
- [3] *Kobatake S., Kawakubo Y., Suzuki S.* Laplace pressure measurement on laser textured thin-film disk // *Tribology Int.* — 2003. — Vol. 36. — P. 329-333.
- [4] *Shi L., Majumdar A.* Thermal transport mechanisms at nanoscale point contacts // *J. Heat Transfer.* — 2001. — Vol. 124 (2). — P. 329-337.
- [5] *Zitzler L., Herminghaus S., Mugele F.* Capillary forces in tapping mode atomic force microscopy // *Physical review.* — 2002. — В 66. — P. 155436 (8 pages).
- [6] *Горячева И. Г., Маховская Ю. Ю.* Адгезионное взаимодействие упругих тел // *Прикл. математика и механика.* — 2001. — Т. 65, вып. 2. — С. 279-289.
- [7] *Zhehg Jie., Streutor J. L.* A liquid bridge between two elastic half-spaces: A theoretical study of interface instability // *Tribology Lett.* — 2004. — Vol. 16, No 1-2. — P. 1-9.
- [8] *Чекина О. Г.* О трении шероховатых поверхностей, разделенных тонким слоем жидкости // *Трение и износ.* — 1998. — Т. 19, № 3. — С. 306-311.
- [9] *Чижиж С. А.* Капиллярный механизм адгезии и трения шероховатых поверхностей, разделенных тонким слоем жидкости // *Трение и износ.* — 1994. — Т. 15, № 1. — С. 11-26.
- [10] *Мартиняк Р. М., Слободян Б. С.* Взаємодія двох тіл за наявності капілярів у міжконтактному зазорі // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* — 2006. — Т. 49, № 1. — С. 164-173.
- [11] *Мартиняк Р. М., Слободян Б. С., Чижиж С. А.* Контактна взаємодія тіл за наявності в міжповерхневому зазорі ідеального газу та рідинних містків // *Фіз.-мат. модел. та інформ. технології.* — 2013. — Вип. 18. — С. 189-197.
- [12] *Martynyak R. M., Slobodyan B. S.* Influence of liquid bridges in the interface gap on the contact of bodies made of compliant materials // *Materials Science.* — 2008. — Vol. 44, № 2. — P. 147-155.
- [13] *Slobodyan B. S.* Pressure of an elastic body on a rigid base with a recess partially filled with a liquid that does not wet their surfaces // *Materials Science.* — 2011. — Vol. 47, No 4. — P. 561-568.
- [14] *Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М.* Взаимодействие упругих тел с периодическим рельефом при наличии жидкостных мостиков в межконтактных зазорах // *Теоретическая и прикладная механика.* — 2013. — Вып. 7 (53). — С. 45-52.



- [15] *Martynyak R. M., Slobodyan B. S., Zelenyak V. M.* Pressure of an elastic half space on a rigid base with rectangular hole in the case of a liquid bridge between them // *J. Math. Sci.* — 2009. — Vol. 160 (4). — P. 470-477.
- [16] *Martynyak R. M.* The contact of a half-space and an uneven base in the presence of an intercontact gap filled by an ideal gas // *Journal of Mathematical Sciences.* — 2001. — Vol. 107, No 1. — P. 3680-3685.
- [17] *Martynyak R. M., Chumak K. A.* Thermoelastic contact of half-spaces with equal thermal distortivities in the presence of a heat-permeable intersurface gap // *J. Math. Sciences.* — Vol. 165, No 3. — P. 355-370.
- [18] *Kit G. S., Martynyak R. M., Machishin I. M.* The effect of a fluid in the contact gap on the stress state of conjugate bodies // *International Applied Mechanics.* — 2003. — Vol. 39, No 3. — P. 292-299.
- [19] *Martynyak R. M.* Mechanothermodiffusion interaction of bodies with regard for the filler of intercontact gaps // *Materials Science.* — 2000. — Vol. 36, No 2. — P. 300-304.
- [20] *Martynyak R., Chumak K.* Effect of heat-conductive filler on interface gap on thermoelastic contact of solids // *Int. J. Heat Mass Transfer.* — 2012. — Vol. 55, No 4. — P. 1170-1178.
- [21] *Shvets R. N., Martynyak R. M.* Integral-equations of the contact thermoelasticity problem for rough bodies // *Dopovidi Akademii Nauk Ukrainsoi RSR. Seriya A-Fiziko-Matematichni ta Technichni Nauki.* — 1985. — No 11. — P. 37-40.
- [22] *Martynyak R., Chumak K.* Thermoelastic delamination of bodies in the presence of a heat-conducting filler of the intercontact gap // *Materials Science.* — 2009. — Vol. 45, No 4. — P. 513-522.
- [23] *Martynyak R. M., Slobodyan B. S.* Contact of elastic half spaces in the presence of an elliptic gap filled with liquid // *Materials Science.* — 2009. — Vol. 45, No 1. — P. 66-71.
- [24] *Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М.* Взаємодія двох пружних тіл за наявності між ними періодично розташованих зазорів, заповнених реальним газом // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* — 2015. — Vol. 58, No 1. — С. 103-111.
- [25] *Martynyak R. M., Malanchuk N. I., Monastyr's'kyi B. E.* Shear of Two Half Planes Pressed to Each Other and Containing a Surface Groove. Part 1. Full Contact // *Materials Science.* — 2005. — Vol. 41, No 2. — P. 178-185.
- [26] *Martynyak R. M., Malanchuk N. I., Monastyr's'kyi B. E.* Shear of two half planes pressed to each other and containing a surface groove. Part 2. Incomplete contact // *Materials Science.* — 2006. — Vol. 42, No 4. — P. 551-559.
- [27] *Kryshtafovych A., Martynyak R.* Frictional contact of two elastic half-planes with wavy surfaces // *J. Friction and Wear.* — 2000. — Vol. 21, No 5. — P. 1-8.
- [28] *Мартиняк Р. М., Маланчук Н. І., Монастирський Б. Є.* Пружна взаємодія двох півплощин за локального зсуву границь на ділянці міжконтактного просвіту // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* — 2005. — Vol. 48, No 3. — С. 101-109.
- [29] *Block J. M., Keer L. M.* Periodic contact problems in plane elasticity // *J. Mech. Mater. Struct.* — 2008. — Vol. 3, No 7. — P. 1207-1237.
- [30] *Goryacheva I. G., Martynyak R. M.* Contact problems for textured surfaces involving frictional effects // *Proc. Inst. Mech. Eng., Part J: J. Eng. Tribol.* — 2014. — Vol. 228, No 7. — С. 707-716.
- [31] *Горячева И., Мартиняк Р.* Периодические контактные задачи с трением и изнашиванием поверхностей // "Развитие идей Л.А. Галина в механике". — 2012. — С. 305-335.
- [32] *Kryshtafovych A., Martynyak R.* Frictional contact of two elastic half-planes with local recesses in boundary // *J. Friction and Wear.* — 2000. — Vol. 21, No 4. — P. 6-15.
- [33] *Goryacheva I. G., Malanchuk N. I., Martynyak R. M.* Contact interaction of bodies with a periodic relief during partial slip // *J. Appl. Math. Mech.* — 2012. — Vol. 76 (5), — P. 621-630.
- [34] *Martynyak R. M., Kryshtafovych A. A.* Strength of a system of mated anisotropic half-planes with surface recesses // *Int. J. Eng. Sci.* — 2001. — Vol. 39, No 4. — С. 403-413.
- [35] *Максимук О. В.* Періодична контактна задача про взаємодію зубчастої та плоскої поверхонь // *Машинознавство.* — 2001. — № 2. — С. 13-17.

## **Effect of interfacial liquid bridges on contact between an elastic body and a rigid base with a periodic array of rectangular grooves**

Oleg Kozachok, Bogdan Slobodian, Rostyslav Martynyak

*The frictionless contact between an elastic body and a rigid base with periodically arranged rectangular grooves is considered. There are liquid bridges in the middle parts of interface gaps, and the edges of interface gaps contain a gas under constant pressure. It is assumed that the liquid is incompressible and perfectly wets the surfaces of the bodies. Due to the surface tension of the liquid, a pressure drop described by Laplace's equation occurs in the liquid and the gas. The contact problem for the elastic half-space is reduced to a singular integral equation (SIE) with Hilbert kernel for a derivative of a gaps height and a transcendental equation for a length of the liquid regions. The dependences of the liquid regions, the pressure drop, the shape of the grooves and the contact approach of the bodies on the applied load, the volume and the surface tension of the liquid are analyzed.*

## **Влияние межповерхностных жидкостных мостиков на контакт упругого тела и жесткой основы с периодической системой прямоугольных выемок**

Олег Козачок, Богдан Слободян, Ростислав Мартиняк

*Рассмотрено безфрикционный контакт упругого тела и жесткой основы при наличии в ней периодически расположенных выемок прямоугольной формы, когда в средних частях межповерхностных просветов содержатся жидкостные мостики, а на краях — газ, находящийся под постоянным давлением. Считается, что жидкость несжимаема и полностью смачивает поверхности тел. Вследствие поверхностного натяжения жидкости возникает перепад давлений в жидкости и газе, который описывается уравнением Лапласа. Сформулированная контактная задача для упругого полупространства сведена к сингулярному интегральному уравнению (СИУ) с ядром Гильберта относительно производной от высоты зазоров и трансцендентного уравнения для определения длины участка с жидкостью. Проанализированы зависимости участка с жидкостью, перепада давлений, формы зазоров и контактного сближения тел от приложенной нагрузки, объема жидкости и ее поверхностного натяжения.*

Отримано 23.09.15