УДК 538.93

Узагальнене рівняння дифузії у дробових похідних у статистиці Рені

Петро Костробій[1], Богдан Маркович[2], Олександра Візнович[3], Михайло Токарчук[4]

[1] д. ф.-м. н., професор, Національний університет «Львівська політехніка», вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, e-mail: petro.kostrobi@gmail.com
[2] к. ф.-м. н., доцент, Національний університет «Львівська політехніка», вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, e-mail: bogdan_markovych@yahoo.com
[3] Національний університет «Львівська політехніка», вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013
[4] д. ф.-м. н., професор, Інститут фізики конденсованих систем НАН України, вул. Свенціцького, 1, Львів, 79011, Національний університет «Львівська політехніка», вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, e-mail: mtok2010@ukr.net

У рамках статистики Рені методом нерівноважного статистичного оператора Зубарєва отримано узагальнене рівняння дифузії у дробових похідних. Використано рівняння Ліувілля у дробових похідних, запропоноване Тарасовим. Усереднення в узагальненому коефіцієнті дифузії виконується за степеневим розподілом із параметром Рені q.

Ключові слова: узагальнене рівняння дифузії, нерівноважний статистичний оператор, статистика Рені, аномальна дифузія.

Вступ. У дослідженні явищ аномальної дифузії у пористих середовищах [1-11], у невпорядкованих системах [12, 13], фізиці плазми [14-19], турбулентних [20-22], кінетичних і реакційно-дифузійних процесах [23-30], квантовій механіці [31-35] та інш [1, 36] інтеграли і похідні дробового порядку [37-41] знайшли своє природне та необхідне застосування.

На даний час поряд із феноменологічними підходами побудови рівнянь Фоккера-Планка, рівняння дифузії, його узагальнення — рівняння Кеттано у дробових похідних, існують два підходи побудови таких рівнянь: ймовірнісний, виходячи із рівнянь Чепмена-Колмогорова в стохастичній теорії випадкових процесів [1, 22, 41] і статистичний, виходячи із рівняння Ліувілля в дробових похідних, який розвиває Тарасов [42-52]. Зокрема, у такому підході отримано ланцюжок кінетичних рівнянь Боголюбов-Борн-Грін-Кірквуд-Івон у дробових похідних [42-45, 50], рівняння переносу, рівняння дифузії та рівняння Гайзенберга [47, 48] у дробових похідних. Такий підхід формулюється для негамільтонових систем, і у випадку виконання умов Гельмгольца для координатних та імпульсних похідних від полів швидкостей частинок і сил, що діють на них [42, 43], переходимо до гамільтонових систем зі зворотним у часі рівнянням Ліувілля у дробових похідних. У роботі [53] запропоновано незворотні у часі рівняння руху Гамільтона та рівняння Ліувілля для динаміки класичних частинок у просторі з мультифрактальним часом. Використавши означення дробової похідної та інтеграла

Рімана-Ліувілля, отримано незворотне у часі рівняння Ліувілля у дробових похідних із мультифрактальною часовою розмірністю. У роботах [54, 55] отримано кінетичні рівняння у підході Клімонтовича для систем з фрактальною структурою, зокрема для опису дифузійних процесів у просторі координат та імпульсу. Подібний підхід побудови дробово-часового узагальнення для рівняння Ліувілля та рівняння Цванцига (у формалізмі проектування) було запропоновано у роботі [56].

У цій роботі розглядається один із шляхів отримання узагальненого (немарковського) рівняння дифузії у дробових похідних із використанням методу нерівноважного статистичного оператора Зубарєва [57-59] і принципу максимуму ентропії Рені. При цьому важливим і принциповим кроком було використання рівняння Ліувілля у дробових похідних, запропонованого Тарасовим [42-45, 52]. У першому розділі знайдено розв’язок рівняння Ліувілля у дробових похідних із використанням методу нерівноважного статистичного оператора та принципу максимуму ентропії Рені за вибраного набору спостережуваних величин. У другому розділі, коли за параметр скороченого опису вибрано нерівноважне середнє значення густини числа частинок, отримано узагальнене (немарковське) рівняння дифузії у дробових похідних.

1. Рівняння Ліувілля у дробових похідних для класичної системи частинок

Будемо виходити з рівняння Ліувілля у дробових похідних для нерівноважної функції частинок $\rho\left(x^N;t\right)$ класичної системи, отриманого у роботах Тарасова [42-45, 52]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(x^N;t\right)+\sum_{j=1}^{N}D_{\vec{r}_j}^{\alpha}\left(\rho\left(x^N;t\right)\vec{v}_j\right)+\sum_{j=1}^{N}D_{\vec{p}_j}^{\alpha}\left(\rho\left(x^N;t\right)\vec{F}_j\right)=0\,, \tag{1}$$

де $x^N=x_1....x_N$, $x_j=\left\{\vec{r}_j,\vec{p}_j\right\}$ — сукупність координати та імпульсу j-ої частинки, поля швидкості $\vec{v}_j$ та сил $\vec{F}_j$, що діють на j-ту частинку.

$$D_x^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^x\frac{f^n(z)}{(x-z)^{\alpha+1-n}}dz \tag{2}$$

— дробова похідна Рімана-Ліувілля [37, 38], $n-1<\alpha<n$, $f^n(z)=\frac{d^n}{dz^n}f(z)$. У загальному випадку

$$D_{\vec{r}_j}^{\alpha}\left(\rho\left(x^N;t\right)\vec{F}_j\right)\neq\rho\left(x^N;t\right)D_{\vec{r}_j}^{\alpha}\vec{F}_j+\vec{F}_jD_{\vec{r}_j}^{\alpha}\rho\left(x^N;t\right).$$

Якщо $\vec{F}_j$ не залежать від $\vec{p}_j$, а $\vec{v}_j$ — від $\vec{r}_j$, то отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(x^N;t\right)+\sum_{j=1}^{N}\vec{v}_j D^{\alpha}_{\vec{r}_j}\rho\left(x^N;t\right)+\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_j D^{\alpha}_{\vec{p}_j}\rho\left(x^N;t\right)=0\,,$$

$$\vec{v}_j=D^{\alpha}_{\vec{p}_j}H\left(\vec{r},\vec{p}\right),\vec{F}_j=-D^{\alpha}_{\vec{r}_j}H\left(\vec{r},\vec{p}\right),$$

де $H\left(\vec{r},\vec{p}\right)$ — гамільтоніан системи в дробових похідних. Тому отримаємо рівняння Ліувілля у вигляді:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(x^N;t\right)+\sum_{j=1}^{N}D^{\alpha}_{\vec{p}_j}H\left(\vec{r},\vec{p}\right)D^{\alpha}_{\vec{r}_j}\rho\left(x^N;t\right)-\sum_{j=1}^{N}D^{\alpha}_{\vec{r}_j}H\left(\vec{r},\vec{p}\right)D^{\alpha}_{\vec{p}_j}\rho\left(x^N;t\right)=0 \qquad (3)$$

або

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(x^N;t\right)+iL_{\alpha}\rho\left(x^N;t\right)=0\,, \qquad (4)$$

де iL_{α} — оператор Ліувілля у дробових похідних:

$$iL_{\alpha}\rho\left(x^N;t\right)=\left(\sum_{j=1}^{N}D^{\alpha}_{\vec{p}_j}H\left(\vec{r},\vec{p}\right)D^{\alpha}_{\vec{r}_j}-\sum_{j=1}^{N}D^{\alpha}_{\vec{r}_j}H\left(\vec{r},\vec{p}\right)D^{\alpha}_{\vec{p}_j}\right)\rho\left(x^N;t\right). \qquad (5)$$

Розв'язок рівняння Ліувілля (5) будемо шукати методом нерівноважного статистичного оператора Зубарєва [57, 58], у якому, коли вибрані основні параметри скороченого опису, $\rho\left(x^N;t\right)$ можна подати (як розв’язок рівняння Ліувілля) у загальній формі з урахуванням проектування:

$$\rho\left(x^N;t\right)=\rho_{rel}\left(x^N;t\right)-\int_{-\infty}^{t}e^{\varepsilon(t'-t)}T\left(t,t'\right)\left(1-P_{rel}\left(t'\right)\right)iL_{\alpha}\rho_{rel}\left(x^N;t'\right)dt'\,. \qquad (6)$$

Тут $T\left(t,t'\right)=\exp_{+}\left[-\int_{t'}^{t}\left(1-P_{rel}\left(t'\right)\right)iL_{\alpha}dt'\right]$ — оператор еволюції з урахуванням проектування; $\varepsilon\to+0$ після граничного термодинамічного переходу, $\exp_{+}$ — впорядкована експонента, $P_{rel}\left(t'\right)$ — узагальнений оператор проектування Кавасакі-Гантона, структура якого залежить від структури $\rho_{rel}\left(x^N;t'\right)$ — релевантного (функції розподілу) статистичного оператора. У методі нерівноважного статистичного оператора [57, 58], $\rho_{rel}\left(x^N;t'\right)$ будемо шукати на основі підходу [59] з екстремуму функціоналу ентропії Рені за фіксованих значень спостережуваних величин $\left\langle\hat{P}_n(x)\right\rangle^{t}_{\alpha}$ і збережені умови нормування $\langle 1\rangle^{t}_{\alpha,rel}=1$, де нерівноважні середні значення знаходяться відповідно [42-45, 52]:

$$\left\langle \hat{P}_n(x) \right\rangle_{\alpha}^{t} = \hat{I}^{\alpha}(1,...,N)\hat{T}(1,...,N)\hat{P}_n\,\rho\left(x^N;t\right), \tag{7}$$

де для системи N частинок $\hat{I}^{\alpha}(1,...,N)$ має такий вигляд:

$$\hat{I}^{\alpha}(1,....,N) = \hat{I}^{\alpha}(1),....,\hat{I}^{\alpha}(N), \qquad \hat{I}^{\alpha}(j) = \hat{I}^{\alpha}\left(\vec{r}_j\right)\hat{I}^{\alpha}\left(\vec{p}_j\right)$$

і означають операції інтегрування:

$$\hat{I}^{\alpha}(x)f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)d\mu_{\alpha}(x), \qquad d\mu_{\alpha}(x) = \frac{|x|^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}dx. \tag{8}$$

Оператор $\hat{T}(1,....,N) = \hat{T}(1),...,\hat{T}(N)$ означає операцію:

$$\hat{T}\left(x_j\right)f\left(x_j\right) = \frac{1}{2}\left(f\left(...x'_j - x_j...\right) + f\left(...x'_j + x_j...\right)\right).$$

Відповідно середні значення за релевантною функцією розподілу означаються як

$$\left\langle(....)\right\rangle_{\alpha,rel}^{t} = \hat{I}^{\alpha}(1,....,N)\hat{T}(1,....,N)(....)\rho_{rel}\left(x^N;t\right).$$

Тоді релевантна функція розподілу відповідно [59] буде мати такий вигляд:

$$\rho_{rel}(t) = \frac{1}{Z_R(t)}\left[1 - \frac{q-1}{q}\beta\left(H - \sum_n \int d\mu_{\alpha}(x)F_n(x;t)\delta\hat{P}_n(x;t)\right)\right]^{\frac{1}{q-1}}, \tag{9}$$

де $\beta = \dfrac{1}{k_Б T}$, $k_Б$ — константа Больцмана, T — рівноважна температура, $Z_R(t)$ — статистична сума розподілу Рені, що визначається з умови нормування і має вигляд:

$$Z_R(t) = \hat{I}^{\alpha}(1,..,N)\hat{T}(1,..,N)\times \tag{10}$$

$$\times\left[1 - \frac{q-1}{q}\beta\left(H - \sum_n \int d\mu_{\alpha}(x)F_n(x;t)\delta\hat{P}_n(x;t)\right)\right]^{\frac{1}{q-1}},$$

а параметри $F_n(x;t)$ визначаються з умов самоузгодження:

$$\left\langle \hat{P}_n(x) \right\rangle_{\alpha}^{t} = \left\langle \hat{P}_n(x) \right\rangle_{\alpha,rel}^{t}. \tag{11}$$

У наступному розділі отримаємо узагальнені рівняння переносу у дробових похідних і розглянемо конкретний приклад процесів дифузії густих газів і рідин у неоднорідних середовищах.

2. Узагальнені рівняння переносу у дробових похідних

У загальному випадку параметрів скороченого опису $\left\langle \hat{P}_n(x) \right\rangle_\alpha^t$ нерівноважних процесів відповідно до співвідношень (6) і (9) отримуємо нерівноважний статистичний оператор у вигляді:

$$\rho(t) = \rho_{rel}(t) + \sum_n \int d\mu_\alpha(x) \int_{-\infty}^{t} e^{\varepsilon(t'-t)} T(t,t') I_n(x;t') \rho_{rel}(t') \beta F_n^*(x;t') dt', \quad (12)$$

де

$$F_n^*(x;t') = \frac{F_n(x;t')}{1 + \frac{q-1}{q} \sum_n \int d\mu_\alpha(x) F_n(x;t') \left\langle P_n(x) \right\rangle_\alpha^t},$$

$$I_n(x;t') = (1 - P(t)) \frac{1}{q} \psi^{-1}(t) i L_\alpha \hat{P}_n(x) \quad (13)$$

— узагальнені потоки, $P(t)$ — проекційний оператор Морі [59], а функція $\psi(t)$ має таку структуру

$$\psi(t) = 1 - \frac{q-1}{q} \sum_n \int d\mu_\alpha(x) F_n(x;\dot{t}) P_n(x).$$

За допомогою нерівноважного статистичного оператора (12) отримується узагальнене рівняння переносу для параметрів скороченого опису $\left\langle \hat{P}_n(x) \right\rangle_\alpha^t$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\langle \hat{P}_n(x) \right\rangle_\alpha^t = \left\langle i L_\alpha \hat{P}_n(x) \right\rangle_{\alpha,rel}^t +$$

$$+ \sum_{n'} \int d\mu_\alpha(x') \int_{-\infty}^{t} e^{\varepsilon(t'-t)} \phi_{P_n P_{n'}}(x,x';t,t') \beta F_{n'}^*(x';t') dt', \quad (14)$$

де

$$\phi_{P_n P_{n'}}(x,x';t,t') =$$

$$= \hat{I}^\alpha(1,..,N) \hat{T}(1,..,N) \left(i L_\alpha \hat{P}_n(x) T(t,t') I_{n'}(x';t') \rho_{rel}(x^N;t') \right) \quad (15)$$

— узагальнені ядра переносу (функції пам'яті), які описують дисипативні процеси у системі. Для розкриття структури рівнянь переносу (14) і ядер переносу (15) розглянемо для прикладу дифузійні процеси.

Для опис дифузійних процесів у класичних газах і рідинах у неоднорідних середовищах основним параметром скороченого опису є нерівноважна густина числа частинок $n(\vec{r}_\alpha;t)=\langle\hat{n}(\vec{r})\rangle_\alpha^t$, де $n(\vec{r})=\sum_{j=1}^{N}\delta(\vec{r}-\vec{r}_j)$ — мікроскопічна густина числа частинок. За такого набору параметрів скороченого опису релевантна функція розподілу буде мати вигляд:

$$\rho_{rel}(t)=\frac{1}{Z_R(t)}\left[1-\frac{q-1}{q}\beta\left(H-\int d\mu_\alpha(\vec{r})\nu(\vec{r};t)\delta\hat{n}(\vec{r}_\alpha;t)\right)\right]^{\frac{1}{q-1}}, \tag{16}$$

де

$$Z_R(t)=\hat{I}^\alpha(1,..,N)\hat{T}(1,..,N)\times$$
$$\times\left[1-\frac{q-1}{q}\beta\left(H-\int d\mu_\alpha(\vec{r})\nu(\vec{r};t)\delta\hat{n}(\vec{r}_\alpha;t)\right)\right]^{\frac{1}{q-1}} \tag{17}$$

— статистична сума релевантної функції розподілу, $\delta\hat{n}(\vec{r}_\alpha;t)=\hat{n}(\vec{r})-\langle\hat{n}(\vec{r})\rangle_\alpha^t$ — флуктуації густини, а параметр $\nu(\vec{r};t)$ визначається з умови самоузгодження:

$$\langle\hat{n}(\vec{r})\rangle_\alpha^t=\langle\hat{n}(\vec{r})\rangle_{\alpha,rel}^t\,. \tag{18}$$

Важливо зазначити, що для $q=1$ релевантна функція розподілу (16) у статистиці Рені переходить у розподіл статистики Гіббса [60]. Розподіл (16) можна подати у вигляді:

$$\rho_{rel}(t)=\frac{1}{Z_R(t)}\left[1-\frac{q-1}{q}\beta\left(H-\int d\mu_\alpha(\vec{r})\nu^*(\vec{r};t)\hat{n}(\vec{r})\right)\right]^{\frac{1}{q-1}}. \tag{19}$$

Тут

$$Z_R(t)=\hat{I}^\alpha(1,..,N)\hat{T}(1,..,N)\left[1-\frac{q-1}{q}\beta\left(H-\int d\mu_\alpha(\vec{r})\nu^*(\vec{r};t)\hat{n}(\vec{r})\right)\right]^{\frac{1}{q-1}}, \tag{20}$$

$$\nu^*(\vec{r};t)=\frac{\nu(\vec{r};t)}{1+\frac{q-1}{q}\int d\mu_\alpha(\vec{r})\nu(\vec{r};t)\langle\hat{n}(\vec{r})\rangle_\alpha^t}\,.$$

Підставивши вираз (19) у формулу (6), для нерівноважного статистичного оператора отримаємо:

$$\rho(t)=\rho_{rel}(t)+\int_{-\infty}^{t}e^{\varepsilon(t'-t)}T(t,t')\int d\mu_\alpha(\vec{r}\,')I_n(\vec{r}\,'_\alpha,t')\rho_{rel}(t')\beta\nu^*(\vec{r}\,';t')dt'\,, \tag{21}$$

де

$$I_n\left(\vec{r}_\alpha;t\right)=\left(1-P(t)\right)\frac{1}{q}\psi^{-1}(t)iL_\alpha\hat{n}\left(\vec{r}\right) \tag{22}$$

— узагальнений потік, у якому функція $\psi(t)$ дорівнює

$$\psi(t)=1-\frac{q-1}{q}\beta\Big(H-\int d\mu_\alpha\left(\vec{r}\right)\nu^*\left(\vec{r};t\right)\hat{n}\left(\vec{r}\right)\Big),$$

$P(t)$ — проекційний оператор, що має таку структуру:

$$P(t)\ldots=\int d\mu_\alpha\left(\vec{r}\right)\int d\mu_\alpha\left(\vec{r}'\right)\left\langle\ldots\hat{n}\left(\vec{r}\right)\right\rangle^t_{\alpha,rel}\times$$
$$\times\left[\left\langle\hat{n}\left(\vec{r}\right)\delta\left\{\left[q\psi(t)\right]^{-1}\hat{n}\left(\vec{r}'\right)\right\}\right\rangle^t_{\alpha,rel}\right]^{-1}\delta\left\{\left[q\psi(t)\right]^{-1}n\left(\vec{r}'\right)\right\},$$

де $\delta\{A\}=A-\langle A\rangle^t_{\alpha,rel}$.

За допомогою нерівноважного статистичного оператора (21) для параметра скороченого опису можна отримати узагальнене рівняння дифузії:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle\hat{n}\left(\vec{r}\right)\right\rangle^t_\alpha=\int d\mu_\alpha\left(\vec{r}'\right)\int_{-\infty}^{t}e^{\varepsilon(t'-t)}\varphi_{nn}\left(\vec{r},\vec{r}';t,t'\right)\beta\nu^*\left(\vec{r}';t'\right)dt', \tag{23}$$

де

$$\phi_{nn}\left(\vec{r},\vec{r}^{\,'};t,t^{'}\right)=\hat{I}^\alpha(1,..,N)\hat{T}(1,..,N)iL_\alpha\hat{n}\left(\vec{r}\right)T\left(t,t'\right)I_n\left(\vec{r}^{\,'}_\alpha;t'\right)\rho_{rel}\left(x^N;t'\right)=$$
$$=\frac{\partial^\alpha}{\partial\vec{r}^\alpha}\cdot D_q\left(\vec{r},\vec{r}';t,t'\right)\cdot\frac{\partial^\alpha}{\partial\vec{r}'^\alpha}$$

— узагальнене ядро переносу, в якому усереднення виконується із степеневим розподілом (19). У результаті отримуємо немарковське рівняння дифузії у дробових похідних

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle\hat{n}\left(\vec{r}\right)\right\rangle^t_\alpha=\frac{\partial^\alpha}{\partial\vec{r}^\alpha}\cdot\int d\mu_\alpha\left(\vec{r}'\right)\int_{-\infty}^{t}e^{\varepsilon(t'-t)}D_q\left(\vec{r},\vec{r}';t,t'\right)\cdot\frac{\partial^\alpha}{\partial\vec{r}^{\,'\alpha}}\beta\nu\left({}^*\vec{r}';t'\right)dt', \tag{24}$$

$$D_q\left(\vec{r},\vec{r}';t,t'\right)=\left\langle\hat{\vec{v}}\left(\vec{r}\right)T\left(t,t'\right)\hat{\vec{v}}\left(\vec{r}'\right)\right\rangle^t_{\alpha,rel}= \tag{25}$$
$$=\hat{I}^\alpha(1,..,N)\hat{T}(1,..,N)\hat{\vec{v}}\left(\vec{r}\right)T\left(t,t'\right)\hat{\vec{v}}\left(\vec{r}'\right)\times$$
$$\times\frac{1}{Z_R(t)}\left[1-\frac{q-1}{q}\beta\Big(H-\int d\mu_\alpha\left(\vec{r}\right)\nu^*\left(\vec{r};t\right)\hat{n}\left(\vec{r}\right)\Big)\right]^{\frac{1}{q-1}}$$

— узагальнений коефіцієнт дифузії у статистиці Рені, в якому усереднення виконується зі степеневим розподілом (19), де $\hat{\vec{v}}(\vec{r}) = \sum_{j=1}^{N} \vec{v}_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_j)$ — мікроскопічна густина потоку числа частинок. Якщо $q = 1$, то узагальнене рівняння дифузії у статистиці Рені переходить в узагальнене рівняння дифузії статистики Гіббса у дробових похідних. Коли ж $q = 1$ і $\alpha = 1$, то приходимо до узагальненого рівняння дифузії статистики Гіббса [60]. У наближені Маркова для узагальненого коефіцієнта дифузії у часі та просторі $D_q(\vec{r}, \vec{r}'; t, t') \approx$ $\approx D_q \delta(t - t') \delta(\vec{r} - \vec{r}')$, виключивши параметр $\nu^*(\vec{r}'; t')$ за допомогою умови самоузгодження, зі співвідношення (25) отримуємо рівняння дифузії у дробових похідних:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \hat{n}(\vec{r}) \rangle_{\alpha}^{t} = D_q \frac{\partial^{2\alpha}}{\partial r^{2\alpha}} \langle \hat{n}(\vec{r}) \rangle_{\alpha}^{t} . \tag{26}$$

Висновки: Отже, на основі рівняння Ліувілля у дробових похідних, запропонованого Тарасовим [42-45, 52] для класичної системи частинок із використанням методу нерівноважного статистичного оператора Зубарєва [57, 58, 60], отримано узагальнене (немарковське) рівняння дифузії у дробових похідних. Використано також принцип максимуму ентропії Рені. На основі такого підходу за вибраного набору параметрів скороченого опису $\langle \hat{P}_n(x) \rangle_{\alpha}^{t}$ нерівноважного стану системи, можна отримати узагальнені рівняння переносу в дробових похідних. Зокрема, у випадку, якщо за такі параметри вибрані нерівноважні середні значення густин числа частинок, імпульсу й енергії, отримаємо узагальнені рівняння гідродинаміки у дробових похідних, що узагальнюють результати Тарасова [49].

Література

[1] *Учайкин В. В.* Метод дробных производних. — Ульяновск, Изд. «Артишок», 2008. — 512 с.

[2] *Sahimi M.* Non-linear and non-local transport procesess in heterogeneous media: from long-range correlated percolation to fracture and materials breakdawn // Phys. Rep. —1998. —Vol. 306, No 4. — P. 213-395.

[3] Fractional calculus applied to the analysis of spectral electrical conductivity of clay-water system / *D. Korosak, B. Cvikl, J. Kramer, R. Jecl, A. Prapotnik* // J. Contain. Hydrol. — 2007. — Vol. 92. — P. 1-9.

[4] *Hobbic R. K., Roth B. J.* Intermediate Physics for Medicine and Biology. — New York: Springer, 2007.

[5] *Metzler R., Klafter J.* The random walk's quide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach // Phys. Rep. — 2000. — Vol. 339. — P. 1-77.

[6] *Hilfer R.* Fractional Time Evolution. Applications of Fractional Calculus in Physics. —World Sci, Singapore, 2000. — 81-130 p.

[7] *Bisquert J.* Doubling exponent models for analysis of porous film electrodes by impedance: Relaxation of TiO_2 nanoporous in equeous solution // J Phys. Chem. B. —2000. —Vol. 104. — P. 2287-2298.

[8] *Bisquert J., Compte A.* Theory of the electrochemical impedanse of anomalous diffusion // J Electroanal. Chem. — 2001. —Vol. 499. — P. 112-120.
[9] *Kosztolowicz T., Lewandowska K. D.* Hyperbolic subdiffusion impedanse // J. Phys. A: Math. Theor. — 2009. — Vol. 42. — P. 055004(1-14).
[10] Models of mass transfer in gas transmission systems / *Ya. D. Pyanylo, M. G. Prytula, N. M. Prytula, N. B. Lopuh* // Math. Model. Comp. — 2014. — Vol. 1. — P. 84-96.
[11] Фізичні процеси та їх мікроскопічні моделі в періодичних неорганічно/органічних клатратах */ Григорчак І. І., Костробій П. П., Стасюк І. В.* та ін. — Львів: Вид. Растр-7, 2015. — 285 с.
[12] *Berkovich B., Scher H.* Theory of anomalous chemical transport in random fracture networks // Phys. Rev. E. — 1998. —Vol. 57. — P. 5858-5898.
[13] *Bouchaud J. P., Georges A.* Anomalous diffusion in disordered media: statistical mechanisms, models and physical applications // Phys. Rep. — 1990. — Vol. 195. — P. 127-293.
[14] *Balescu R.* Anomalous transport in turbulent plasmas and continuous time random walks // Phys. Rev. E. — 1995. — Vol. 51. — P. 4807-4822.
[15] *Tribeche M.* Charging of a dust particle in a plasma with a non extensive electron distribution function / Tribeche M., Shukla H. // Phys. Plasmas. — 2011. — V. 18. — P. 103702(1-4).
[16] *Jindyu G.* Du J. Dust charging processes in the nonequilibrium dsty plasma in nonextensive power-law distribution / –arXiv: 1202.0636. –arxiv.org. –16 p.
[17] *Carreras B. A. Lynch V. E., Zaslavsky G. M.* Anomalous diffusion and exit time distributon of particle tracers in plasma turbulence model // Phys. Plasmas. — 2001. — V. 8. — P. 5096-5103.
[18] *Tarasov V.* E. Electromagnetic field of fractal distribution of charged particles // Phys. Plasmas. — 2005. — V. 12. — P. 082106.
[19] *Tarasov V. E.* Magnetohydrodynamics of fractal media // Phys. Plasmas. — 2006. — V. 13. — P. 052107.
[20] *Монин А. С.* Уравнения турбулентной дифузии // ДАН СССР, сер. геофиз. — 1955. — № 2. — С. 256-259.
[21] *Климонтович Ю. Л.* Введение в физику отрытых систем / — М: Янус. —2002.-284 с.
[22] *Zaslavsky G. M.* Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport // Phys. Rep. — 2002. — V. 371. — P. 461-580.
[23] *Zaslavsky G. M.* Fractional kinetic equation for Hamiltonian chaos transport // Physica D. — 1994. — V. 76. — P. 110-122.
[24] *Saichev A. I. Zaslavsky G. M.* Fractional kinetic equations: solutions and applications // Chaos. — 1997. — V. 7. — P. 753-764.
[25] *Zaslavsky G. M. Edelman M. A.* Fractional kinetic equation from pseudochaotic dynamics to Maxwell's demon // Physica D. — 2004. — V. 193. — P. 128-147.
[26] *Nigmatullin R. R.* Fractional kinetic equation and universal decoupling of a memory function in mesoscale region // Physica A. —2006. —V. 363. — P. 282-298.
[27] *Chechkin A. V.* Fractional kinetics for relaxation and superdiffusion in magnetic field / Chechkin A. V., Gonchar V. Yu., Szydlovsky M. // Phys. Plasmas. —2002. —V. 9. — P. 78-88.
[28] *Gafiychuk V. V. Datsko B. Y.* Stability analysis and oscillatory structures in time-fractional reaction-diffusion systems // Phys. Rev. E. —2007. —V. 75. — P. 055201(1-4).
[29] *Kosztolowicz T. Lewandowska K. D.* Time evolution of the reaction front in a subdiffusion system // Phys. Rev. E. — 2008. — V. 78. — P. 066103(1-11).
[30] *Шкилев В. П.* Субдиффузия смешанного происхождения с химическими реакциями // ЖЭТФ. — 2013. — Т. 144. — С. 1210-1215.
[31] *Laskin N.* Fractals and quantum mechanics // Chaos. — 2000. — V.10. — P. 780-790.
[32] *Laskin N.* Fractional quantum mechanics // Phys. Rev. E. — 2000. — V. 62. — P. 3135-3145.
[33] *Laskin N.* Fractional quantum mechanics and Levy path integrals // Phys. Lett. — 2000. — V. 268. — P. 298-305.
[34] *Laskin N.* Fractional Schrodinger equation // Phys. Rev. E. — 2002. — V. 66. — P. 056108.
[35] *Naber M.* Time fractional Schrodinger equation // J. Math. Phys. — 2004. — V.45. — P. 3339-3352.

[36] *Учайкин В. В.* Дробно-дифференциальная феноменология аномальной диффузии космических лучей // Усп. физ. наук. — 2013. — Т.183. — № 1. — С. 1177-1223.
[37] *Oldham K. B. Spanier J.* Fractional Calculus. Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order // Math. Sci. Eng. (Academic Press, New York). — 1974. — V. 111.
[38] *Samko S. G. Kilbas A. A., Marichev O. I.* Fractional Intedrals and Derivatives Theory and Applicftions — Gordon and Breach., New York. —1993.
[39] *O'Shaughnessy B. Procaccia I.* Analytical solutions for diffusion on fractal objects // Phys. Rev. Lett. — 1985. — V. 54. — P. 455-458.
[40] *Podlubny I.* Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications — V. 198. Academic press. — 1998.
[41] *Станиславский А. А.* Вероятностная интерпретация интеграла дробного порядка // Теор. Мат. Физ. — 2004. — Т. 138. — № 3. — С. 491-507.
[42] *Tarasov V. E.* Fractional Generalization of Liouville Equations // Chaos. — 2004. — V. 14. — N. 1. — P. 123-127.
[43] *Tarasov V. E.* Fractional Liouville and BBGKI Equations // J. Phys.: Conf. Ser. — 2005. — V. 7. — P. 17-33.
[44] *Tarasov V. E.* Fractional Systems and Fractional Hierarchy Equations // Phys. Rev. E. — 2005. — V. 71. —P. 011102.
[45] *Tarasov V. E.* Fractional Statistical Mechanics // Chaos. — 2006. — V. 16. —P. 033108(1-16).
[46] *Tarasov V. E.* Transport Equations from Liouville Equations for Fractional Systems // Int. J Mod. Phys. B. — 2006. — V. 20. — N.3. –P. 341-354.
[47] *Tarasov V. E.* Fractional diffusion equations for open quantum system // Nonlinear Dyn. — 2013. — V. 71. — P. 663-670.
[48] *Tarasov V. E.* Fractional Heisenberg Equation // Phys. Lett. A. — 2006. — V. 372. —P. 2984-2988.
[49] *Tarasov V. E.* Fractional Hydrodynamic Equations for fractal Media // Annals Phys. — 2006. — V. 318. — N. 2. — P. 256-307.
[50] *Tarasov V. E.* Liouville and Bogoliubov Equations with Fractional Derivatives // Modern. Phys. Lett. B. —2007. — V. 21. —P. 237-248.
[51] *Тарасов В. Е.* Дробное обобщение квантового марковского управляющего уравнения // Теор. мат. физ. — 2009. — Т. 158. — № 2. — С. 214-233.
[52] *Tarasov V. E.* Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Field and Media — Springer, New York, — 2011.
[53] *Kobelev L. Ya.* The Multifractal Time and Irreversibility in Dynamic Systems // — arXiv: physics/ 0002002v1. — 2000. — 4 p.
[54] *Kobelev Ya. L. Kobelev L. Ya., Romanov E. P.* Kinetic Equations for Large Systems with Fractal Structures // Dokl. Phys. — 2000. — V. 45. — N. 5. — P. 194-197.
[55] Description of Diffusion in Fractal Media on the Basis of the Klimontovich Kinetic Equation in Fractal Space */ Kobelev Ya. L., Kobelev L. Ya., Kobelev V. L., Romanov E. P.* // Dokl. Phys. — 2002. — V. 47. — N. 8. — P. 580-582.
[56] *Lukashchuk S. Yu.* Time-fractional extensions of the Liouville and Zwanzig equations // Cent. E ur. J. Phys. — 2013. — V. 11(6). — P. 740-749.
[57] *Зубарев Д. Н. Морозов В. Г., Рёпке Г.* Статистическая механика неравновесных процессов — М.: Физматлит. — 2002. — Т.1. — 295 с.
[58] *Зубарев Д. Н. Морозов В. Г., Рёпке Г.* Статистическая механика неравновесных процессов — М.: Физматлит. — 2002. — Т. 2. — 260 с.
[59] Nonequilibrium statistical operator method in Renyi statistics / *Markiv B. B., Tokarchuk R. M., Kostrobij P. P., Tokarchuk M. V.* // Physica A. — 2011. — V. 390. — P. 785-791.
[60] *Зубарев Д. Н.* Современные методы статистической теории неравновесных процессов // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. — Москва: ВИНИТИ. — 1980. — Т. 157. — С. 131-226.

Generalized diffusion equation in the fractional derivatives in Renyi statistics

Petro Kostrobij, Bogdan Markovych, Oleksandra Viznovych, Myhaylo Tokarchuk

Within the Renyi statistics by the method of the nonequilibrium statistical operator of Zubarev, the generalized diffusion equation in fractional derivatives is obtained. The Liouville equation in fractional derivatives has been used. Averaging of the generalized diffusion coefficient is performed according to a power-series distribution with the Renyi parameter q.

Обобщенное уравнение диффузии в дробных производных в статистике Рени

Петр Костробий, Богдан Маркович, Александра Визнович, Михаил Токарчук

В рамках статистики Рени методом неравновесного статистического оператора Зубарева получено обобщенное уравнение диффузии в дробных производных. Использовано уравнение Лиувилля в дробных производных, предложенного Тарасовым. Усреднения в общем коэффициенте диффузии выполняется по степенному распределению с параметром Рени q.

Отримано 11.03.16