

## Дослідження поведінки наближеного розв'язку нелінійної крайової задачі в околі втрати стійкості

Ігор Муха

К. ф.-м. н., доцент, Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, Україна, 79000, e-mail: imukha@franko.lviv.ua

*За допомогою методу скінченних елементів побудовано наближений числовий розв'язок нелінійної крайової задачі. Отримано варіаційне формулювання задачі стійкості в околі будь-якого розв'язку нелінійної задачі. Цю задачу дискретизовано на основі тих же апроксимацій, що і розв'язок нелінійної задачі. Отриману велику часткову матричну проблему на власні значення за допомогою методу ітерацій у підпросторі зведено до низки повних матричних проблем малої вимірності. Ці проблеми перетворені до тридіагональних методом Хаусхолдера та розв'язані за допомогою QL-алгоритму. Проведено аналіз критичного значення та відповідних форм втрати стійкості, отриманих в околі початкового стану та в околі кінцевого стану.*

**Ключові слова:** нелінійна крайова задача, метод скінченних елементів, варіаційне формулювання, стійкість, матричні проблеми на власні значення, перетворення Хаусхолдера, QL-алгоритм, форми втрати стійкості.

**Вступ.** Розвиток обчислювальної техніки дозволив розв'язувати нелінійні задачі, що виникають у математичних моделях механіки суцільного середовища. Аналітичні методи розв'язування таких задач мають дуже обмежене застосування. Тому актуальним є розвиток чисельних методів для вказаних задач. Однак застосування чисельних методів ускладнюється, якщо розв'язок задачі може втрачати стійкість. Дослідження поведінки наближеного розв'язку в околі втрати стійкості є складною та важливою задачею, від розв'язання якої залежить успішне отримання потрібного результату.

Ця праця є продовженням низки досліджень, які стосуються процесів втрати стійкості механічних систем [1-3]. Нелінійні моделі, сформульовані в цих працях, не завжди дозволяють отримати розв'язок звичайними ітераційними методами. Метою цієї роботи є побудова надійного покрокового алгоритму для отримання розв'язку нелінійної задачі та дослідження моделі втрати стійкості розв'язку на різних етапах покрокової схеми.

### 1. Формулювання задачі

Розглянемо ідеалізовану нелінійну варіаційну крайову задачу з двома невідомими функціями, яка є наближеною математичною моделлю геометрично-нелінійного деформування тіл.

$$L(u_1, u_2) = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_*} \sum_{j=1}^2 \left[ E_j(u_1, u_2) + \frac{\lambda}{2} \Omega_j^2(u_1, u_2) \right]^2 dx - \int_{x_0}^{x_*} (p_* f_1 u_1 + p_* f_2 u_2) dx \rightarrow \min. \quad (1)$$

Тут  $u_1(x)$  та  $u_2(x)$  — шукані функції,  $E_j(u_1, u_2)$ ,  $\Omega_j(u_1, u_2)$  — задані лінійні диференціальні оператори,  $f_i(x)$  — задані функції навантаження,  $\lambda$  — деякий множник, що характеризує ступінь нелінійності,  $p_*$  — параметр навантаження. Формулювання задачі слід доповнити головними крайовими умовами

$$u_1(x_0) = u_2(x_0) = 0.$$

Застосуємо до розв'язання задачі покрокову схему за параметром  $p$ , який змінюється від нуля до  $p_*$ . Для цього припустимо, що нам відомо розв'язок  $\overset{\circ}{u}_1(x)$  та  $\overset{\circ}{u}_2(x)$  крайової задачі (1) для значення параметра  $\overset{\circ}{p}$ . Нехай тепер параметр задачі змінюється до значення  $\overset{\circ}{p} + p$ . Такому значенню параметра відповідають розв'язки  $\overset{\circ}{u}_1(x) + u_1(x)$  та  $\overset{\circ}{u}_2(x) + u_2(x)$ . Якщо б нам вдалося записати розв'язки  $u_1(x, p)$ ,  $u_2(x, p)$  як функції параметра  $p$ , то тоді говорять, що розв'язки  $\overset{\circ}{u}_1(x)$  та  $\overset{\circ}{u}_2(x)$  продовжені за параметром  $p$ . Дискретний варіант методу продовження за параметром називають покроковою схемою. Ідея покрокової схеми полягає в тому, щоб у випадку розбіжності методу розв'язування нелінійної задачі для значення  $p_*$  можна було б розв'язувати низку нелінійних задач, у кожній з яких нарощується значення  $p$ . Вважаємо, що ітераційний процес розбіжний, якщо кількість ітерацій перевищує задане число  $i_{\max}$ . Це число залежить від специфіки задачі. Зазвичай, його вибирають більше за 8.

Уведемо в розгляд функціонал

$$L^+(u_1, u_2) = L\left(\overset{\circ}{u}_1 + u_1, \overset{\circ}{u}_2 + u_2\right) - L\left(\overset{\circ}{u}_1, \overset{\circ}{u}_2\right) + \int_{x_0}^{x_*} p \left( f_1 \overset{\circ}{u}_1 + f_2 \overset{\circ}{u}_2 \right) dx. \quad (2)$$

Мінімум функціоналу  $L^+(u_1, u_2)$  досягається на тих же значеннях невідомих функцій  $u_1(x)$  та  $u_2(x)$ , що і мінімум  $L\left(\overset{\circ}{u}_1 + u_1, \overset{\circ}{u}_2 + u_2\right)$ , так як другий і третій доданки у співвідношенні (2) від  $u_1(x)$  та  $u_2(x)$  не залежать. Тому варіаційне формулювання нелінійної крайової задачі для приростів можна сформулювати так

$$L^+(u_1, u_2) \rightarrow \min, \quad (3)$$

$$u_1(x_0) = u_2(x_0) = 0.$$

Тут

$$L^+(u_1, u_2) = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_*} \sum_{j=1}^2 \left[ E_j(u_1, u_2) + \lambda \Omega_j \left( \overset{\circ}{u}_1, \overset{\circ}{u}_2 \right) \Omega_j(u_1, u_2) \right]^2 dx +$$

$$+ \frac{\lambda}{2} \int_{x_0}^{x_*} \sum_{j=1}^2 \left[ E_j \left( \overset{\circ}{u}_1, \overset{\circ}{u}_2 \right) + \frac{\lambda}{2} \Omega_j^2 \left( \overset{\circ}{u}_1, \overset{\circ}{u}_2 \right) \right] \left[ \Omega_j(u_1, u_2) \right]^2 dx - \int_{x_0}^{x_*} (pf_1 u_1 + pf_2 u_2) dx +$$

$$+ \frac{\lambda}{2} \int_{x_0}^{x_*} \sum_{j=1}^2 \left[ E_j \left( \overset{\circ}{u}_1, \overset{\circ}{u}_2 \right) + \frac{\lambda}{2} \Omega_j^2 \left( \overset{\circ}{u}_1, \overset{\circ}{u}_2 \right) \right] \times$$

$$\times \left[ E_j(u_1, u_2) + \lambda \Omega_j \left( \overset{\circ}{u}_1, \overset{\circ}{u}_2 \right) \Omega_j(u_1, u_2) \right] dx$$

$$+ \frac{\lambda}{2} \int_{x_0}^{x_*} \sum_{j=1}^2 \left[ E_j(u_1, u_2) + \lambda \Omega_j \left( \overset{\circ}{u}_1, \overset{\circ}{u}_2 \right) \Omega_j(u_1, u_2) \right] \left[ \Omega_j(u_1, u_2) \right]^2 dx +$$

$$+ \frac{\lambda}{8} \int_{x_0}^{x_*} \sum_{j=1}^2 \left[ \Omega_j(u_1, u_2) \right]^4 dx.$$

## 2. Методика розв'язування задачі

Лінеаризацію нелінійної варіаційної задачі на кроці здійснимо за методом Ньютона. Побудуємо ітераційний процес на основі лінеаризації варіаційної крайової задачі (3). Нехай відоме деяке наближення  $u_j^{(i)}(x)$  розв'язку задачі. Тоді точний розв'язок можна подати у вигляді

$$u_j(x) = u_j^{(i)}(x) + \Delta u_j^{(i)}(x). \quad (4)$$

Підставимо цей розв'язок у функціонал  $L^+(u_1, u_2)$ . Будемо вважати, що доданки  $\Delta u_j^{(i)}(x)$  є малі настільки, що членами  $\left( \Delta u_j^{(i)}(x) \right)^3$  та  $\left( \Delta u_j^{(i)}(x) \right)^4$  можна знехтувати. Тоді для знаходження  $\Delta u_j^{(i)}(x)$  отримаємо квадратичний функціонал

$$L^\Delta \left( \Delta u_1^{(i)}, \Delta u_2^{(i)} \right) \rightarrow \min, \quad (5)$$

$$\Delta u_1^{(i)}(x_0) = \Delta u_2^{(i)}(x_0) = 0.$$

$$\begin{aligned}
L^\Delta(\Delta u_1^{(i)}, \Delta u_2^{(i)}) &= \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_*} \sum_{j=1}^2 \left[ E_j(\Delta u_1, \Delta u_2) + \lambda \Omega_j(u_1, u_2) \Omega_j(\Delta u_1, \Delta u_2) \right]^2 dx + \\
&+ \frac{\lambda}{2} \int_{x_0}^{x_*} \sum_{j=1}^2 \left[ E_j \left( \overset{\circ}{u}_1 + u_1^{(i)}, \overset{\circ}{u}_2 + u_2^{(i)} \right) + \frac{\lambda}{2} \Omega_j^2 \left( \overset{\circ}{u}_1 + u_1^{(i)}, \overset{\circ}{u}_2 + u_2^{(i)} \right) \right] \times \\
&\times \left[ \Omega_j(\Delta u_1^{(i)}, \Delta u_2^{(i)}) \right]^2 dx + \lambda \int_{x_0}^{x_*} \sum_{j=1}^2 \left[ E_j \left( \overset{\circ}{u}_1 + u_1^{(i)}, \overset{\circ}{u}_2 + u_2^{(i)} \right) + \right. \\
&+ \left. \frac{\lambda}{2} \Omega_j^2 \left( \overset{\circ}{u}_1 + u_1^{(i)}, \overset{\circ}{u}_2 + u_2^{(i)} \right) \right] \left[ E_j(\Delta u_1, \Delta u_2) + \right. \\
&+ \left. \lambda \Omega_j \left( \overset{\circ}{u}_1 + u_1^{(i)}, \overset{\circ}{u}_2 + u_2^{(i)} \right) \Omega_j(\Delta u_1, \Delta u_2) \right] dx - \int_{x_0}^{x_*} \left( f_1(x) \Delta u_1^{(i)} + f_2(x) \Delta u_2^{(i)} \right) dx .
\end{aligned}$$

Для розв'язування лінеаризованої варіаційної задачі використаємо метод скінченних елементів. Числову схему побудуємо так, щоб можна було змінювати не тільки крок розбиття за змінною  $x$ , але й порядок апроксимації на елементі. Розглянемо систему поліномів з такими властивостями: перші два з них дорівнюють одиниці на одному з кінців проміжку  $[-1, 1]$  і нулю на другому, а решта дорівнює нулю на обох кінцях проміжку. Таку систему називають в літературі поліномами-бульбашками.

$$\begin{aligned}
p_0(x) &= (1-x)/2; & p_1(x) &= (1+x)/2; \\
p_2(x) &= \sqrt{6}(x^2-1)/4; & p_3(x) &= \sqrt{10}(x^3-x)/4; \\
p_4(x) &= \sqrt{14}(5x^4-6x^2+1)/16; \\
p_5(x) &= \sqrt{18}(7x^5-10x^3+3x)/16; \\
p_6(x) &= \sqrt{22}(21x^6-35x^4+15x^2-1)/32; \\
p_7(x) &= \sqrt{26}(33x^7-63x^5+35x^3-5x)/32.
\end{aligned}$$

Розіб'ємо проміжок  $[x_0; x_*]$  на  $n$  підпроміжків множиною точок

$$x_i = x_0 + \frac{x_* - x_0}{n} i .$$

На проміжку  $[x_{i-1}; x_i]$  подамо шукані функції  $u_i(x)$  у вигляді

$$u_i^k(x) = \sum_{j=0}^k u_{ij} p_j \left( \frac{2x}{x_i - x_{i-1}} - \frac{x_{i-1} + x_i}{x_i - x_{i-1}} \right), \quad (6)$$

де  $u_{ij}$  — невідомі вузлові значення функцій  $u_i(x)$ . Таким чином побудовано апроксимації різних порядків для невідомих функцій за змінною  $x$ . Далі застосуємо стандартний алгоритм методу скінченних елементів.

Для дослідження стійкості за Ейлером будемо виходити з другої варіації функціоналу (1).

$$\delta^2 L = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_*} \sum_{j=1}^2 \left[ E_j(\delta u_1, \delta u_2) + \lambda \Omega_j(u_1, u_2) \Omega_j(\delta u_1, \delta u_2) \right]^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{x_0}^{x_*} \sum_{j=1}^2 \left[ E_j(u_1, u_2) + \frac{\lambda}{2} \Omega_j^2(u_1, u_2) \right] \left[ \Omega_j(\delta u_1, \delta u_2) \right]^2 dx. \quad (7)$$

Побудуємо варіаційну проблему на власні значення за приростом  $p$ . Припустимо, що значення  $p$  маленьке, і тому можна наближено замінити розв'язок нелінійної задачі для функції  $u_1(x), u_2(x)$  лінійним. Для цього реалізуємо першу ітерацію кроку розв'язування нелінійної задачі для значення  $p_{cur} = \overset{\circ}{p} + 1, 0$  та відшукаємо функції  $u_1(x), u_2(x)$ . Знайдені функції є розв'язком лінійної задачі для  $p = 1, 0$ . Тому для довільного  $p$  розв'язки лінійної задачі набувають вигляду  $pu_1(x), pu_2(x)$ . Підставимо це в умову рівності нулю другої варіації функціоналу (7). Отримаємо лінеаризацію в околі розв'язку, отриманого на черговому кроці за параметром  $\overset{\circ}{p}$

$$\int_{x_0}^{x_*} \sum_{j=1}^2 \left[ E_j(\delta u_1, \delta u_2) + \frac{\lambda}{2} \Omega_j \left( \overset{\circ}{u}_1, \overset{\circ}{u}_2 \right) \Omega_j(\delta u_1, \delta u_2) \right]^2 dx + \lambda \int_{x_0}^{x_*} \sum_{j=1}^2 \left[ E_j \left( \overset{\circ}{u}_1, \overset{\circ}{u}_2 \right) + \frac{\lambda}{2} \Omega_j^2 \left( \overset{\circ}{u}_1, \overset{\circ}{u}_2 \right) \right] \left[ \Omega_j(\delta u_1, \delta u_2) \right]^2 dx = -p\lambda \int_{x_0}^{x_*} \sum_{j=1}^2 \left[ E_j(u_1, u_2) + \lambda \Omega_j \left( \overset{\circ}{u}_1, \overset{\circ}{u}_2 \right) \Omega_j(u_1, u_2) \right] \left[ \Omega_j(\delta u_1, \delta u_2) \right]^2 dx. \quad (8)$$

Будемо далі розв'язувати таку задачу: знайти таке значення  $p$ , за якого існують ненульові функції  $\delta u_1, \delta u_2$ , для яких задовольняються співвідношення (8) і крайові умови  $\delta u_1(x_0) = \delta u_2(x_0) = 0$ . Перше власне значення  $p$  задачі (8) дає нам оцінку для інтервалу довантаження нелінійної задачі, а розв'язки  $\delta u_1$  і  $\delta u_2$  визначають прогнозовані форми втрати стійкості в околі кінцевого стану  $\delta^2 L \left( \overset{\circ}{u}_1 + u_1, \overset{\circ}{u}_2 + u_2 \right) = 0$ .

Розв'язування варіаційної проблеми на власні значення реалізовано на основі таких самих скінченно-елементних апроксимацій, як і розв'язок нелінійної задачі. Отриману в результаті цього узагальнену алгебричну проблему на власні значення розв'язано за методом ітерацій підпростору [5]. Повна узагальнена проблема малої вимірності, яка виникає на кожній ітерації, розв'язана шляхом зведення до класичної матричної проблеми та застосуванням перетворення Хаусхолдера та QL-алгоритму [6].

### 3. Числові результати та їх аналіз

Проведено низку числових експериментів для запропонованого підходу на прикладі задачі

$$\begin{aligned}
 L(u_1, u_2) = & \frac{1}{2} \int_0^2 \left[ E_1(u_1, u_2) + \frac{\lambda}{2} \Omega_1^2(u_1, u_2) \right]^2 dx + \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^2 \left[ E_2(u_1, u_2) + \frac{\lambda}{2} \Omega_2^2(u_1, u_2) \right]^2 dx - \\
 & - \int_0^2 (p_* f_1(x) u_1 + p_* f_2(x) u_2) dx \rightarrow \min
 \end{aligned}$$

з головними крайовими умовами  $u_1(0) = u_2(0) = 0$ . Критичне значення  $p_*$  визначалося у процесі розв'язку задачі. Вибиралося чотири поліноми в апроксимації (6) і 48 скінченних елементів уздовж координати  $x$ . Отримано такі результати: Задача 1.

$$\begin{aligned}
 E_1(u_1, u_2) = \frac{du_1}{dx}; \quad E_2(u_1, u_2) = \frac{du_2}{dx}; \quad \Omega_1(u_1, u_2) = u_2; \quad \Omega_2(u_1, u_2) = u_1; \\
 f_1 = -1,0; \quad f_2 = -0,01; \quad \lambda = 1,0; \quad i_{\max} = 32.
 \end{aligned}$$

Процес розв'язування нелінійної задачі наведено в таблиці 1. Здійснено сім кроків за параметром  $p$ . Досягнуто критичне значення  $p_* = 0,48752$ . Значення  $p_{\text{prognos}}$  у другому стовбці таблиці визначається на кожному кроці покрокової схеми як перше власне значення задачі (8). Значення  $p_{\text{realize}}$  у четвертому стовбці таблиці — це реалізоване значення кроку, за якого збігається ітераційний процес.

Далі  $p_{\text{cur}} = p + p_{\text{realize}}$ , а в останньому стовбці наведено кількість ітерацій на кожному кроці

На рис. 1а наведено лінійний (пунктир) і нелінійний (суцільна лінія) розв'язок для функції  $u_1(x)$  за критичного значення  $p_*$ . Як видно з рисунка, є значна різниця між цими розв'язками як в кількісному, так і в якісному плані.

На рис. 1б, 1в наведено форми втрати стійкості в околі початкового стану (рис. 1б) та в околі кінцевого стану (рис. 1в). Суцільною лінією зображено нелінійний

Таблиця 1

Результати чисельного експерименту розв'язування нелінійної задачі 1

$\overset{\circ}{p}$	$P_{\text{prognos}}$	$\overset{\circ}{p} + P_{\text{prognos}}$	$P_{\text{realize}}$	$P_{\text{cur}}$	iteration
0.000000	0.979668	0.979668	0.121880	0.121880	11
0.121880	0.879533	1.001413	0.121880	0.243760	10
0.243760	0.568819	0.812679	0.121880	0.365640	14
0.365640	0.210381	0.576021	0.060940	0.426580	13
0.426580	0.102952	0.529532	0.030470	0.457050	12
0.457050	0.053968	0.511018	0.015235	0.472285	11
0.472285	0.029784	0.502069	0.0076175	0.4799025	10
0.4799025	0.017539	0.4974415	0.0076175	$p_* = 0.48752$	30

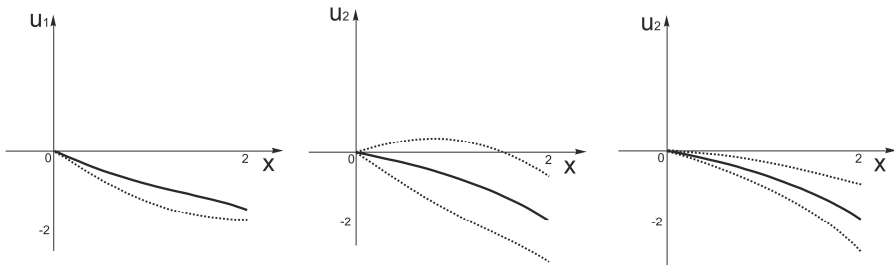


Рис. 1. Лінійний і нелінійний розв'язки  $u_1(x)$  задачі 1 (а); прогнозована форма втрати стійкості розв'язку  $u_2(x)$  (б); реальна форма втрати стійкості розв'язку  $u_2(x)$  (в)

розв'язок  $u_2(x)$ , а пунктирною вигляд можливих блукань цього розв'язку у разі втрати стійкості. Амплітуду цих формозмін наведено умовно, так як теоретично вона не визначається. З рисунків видно, що в якісному плані прогнозована та реальна форми втрати точності різняться. А отже для знаходження справжніх форм потрібно розв'язувати нелінійну задачу за допомогою покрокової схеми.  
Задача 2.

$$E_1(u_1, u_2) = \frac{du_1}{dx}; \quad E_2(u_1, u_2) = \frac{du_2}{dx}; \quad \Omega_1(u_1, u_2) = u_2 + \frac{du_2}{dx}; \quad \Omega_2(u_1, u_2) = \frac{du_1}{dx};$$

$$f_1 = -1,0; \quad f_2 = -0,01; \quad \lambda = 1,0; \quad i_{\max} = 32.$$

Процес розв'язування нелінійної задачі наведено у таблиці 2. Здійснено 13 кроків за параметром  $p$ . Досягнуто критичне значення  $p_* = 0,537535$ .

На рис. 2а наведено лінійний (пунктир) і нелінійний (суцільна лінія) розв'язок для функції  $u_1(x)$  за критичного значення  $p_* = 0,537535$ . Як видно з рисунка, є значна різниця між цими розв'язками як в кількісному, так і в якісному плані.

На рис. 2б, 2в наведено форми втрати стійкості в околі початкового стану (рис. 2б) та в околі кінцевого стану (рис. 2в). Суцільною лінією зображено нелінійний

Результати чисельного експерименту розв'язування нелінійної задачі 2

$\overset{\circ}{p}$	$P_{\text{prognos}}$	$\overset{\circ}{p} + p_{\text{prognos}}$	$P_{\text{realize}}$	$P_{\text{cur}}$	iteration
0.000000	2.775401	2.775401	0.2687675	0.2687675	25
0.2687675	0.597822	0.8665895	0.1343838	0.4031513	11
0.4031513	0.413644	0.8167953	0.0671918	0.4703431	9
0.4703431	0.219945	0.6902881	0.0335959	0.5039391	9
0.5039391	0.107099	0.6110381	0.0167980	0.5207371	8
0.5207371	0.053465	0.5742021	0.0083990	0.5291361	7
0.5291361	0.029741	0.5588771	0.0041995	0.5333356	7
0.5333356	0.014461	0.5477966	0.0020997	0.5354353	7
0.5354353	0.007177	0.5426123	0.0010498	0.5364851	6
0.5364851	0.003600	0.5406101	0.0005249	0.5370101	6
0.5370101	0.001813	0.5424231	0.0002625	0.5372726	6
0.5372726	0.000787	0.5380596	0.0001312	0.5374038	5
0.5374038	0.000355	0.5377588	0.0001312	$p_* = 0.537535$	25

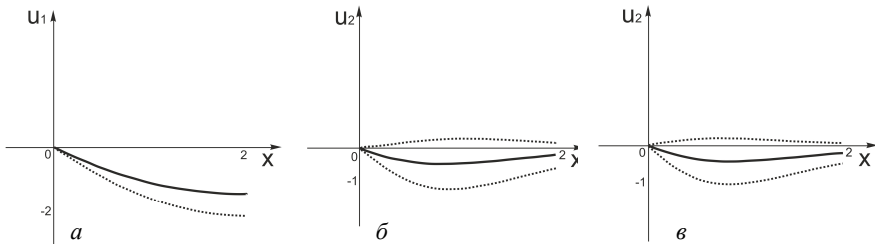


Рис. 2. Лінійний та нелінійний розв'язки  $u_1(x)$  задачі 2 (а); прогнозована форма втрати стійкості розв'язку  $u_2(x)$  (б); реальна форма втрати стійкості розв'язку  $u_2(x)$  (в)

розв'язок  $u_2(x)$ , а пунктирною вигляд можливих блукань цього розв'язку у разі втрати стійкості.

У цій задачі прогнозована та реальна форма втрати стійкості різняться мало. Однак слід зауважити, що в задачі значно (більш ніж учетверо) відрізняються прогнозоване та реальне значення критичного навантаження. Прогнозоване значення 2,775401, а реальне тільки  $p_* = 0,537535$ .

Задача 3.

$$E_1(u_1, u_2) = u_1 + \frac{du_1}{dx}; E_2(u_1, u_2) = \frac{du_2}{dx}; \Omega_1(u_1, u_2) = u_2 + \frac{du_2}{dx}; \Omega_2(u_1, u_2) = \frac{du_1}{dx};$$

$$f_1 = -1,0; f_2 = -1,0; \lambda = 1,0; i_{\text{max}} = 32.$$



Таблиця 3

Результати чисельного експерименту розв'язування нелінійної задачі 3

$\overset{\circ}{p}$	$P_{\text{prognos}}$	$\overset{\circ}{p} + P_{\text{prognos}}$	$P_{\text{realize}}$	$P_{\text{cur}}$	iteration
0.0000000	0.426364	0.426364	0.1522915	0.1522915	12
0.1522915	0.221795	0.3740865	0.0761458	0.2284373	11
0.2284373	0.128619	0.3570563	0.0380728	0.2665101	10
0.2665101	0.074259	0.3407691	0.0190364	0.2855465	9
0.2855465	0.053416	0.3389625	0.0095183	0.2950648	8
0.2950648	0.039856	0.3349208	0.0047591	0.2998239	8
0.2998239	0.013287	0.3131109	0.0023795	0.3022034	7
0.3022034	0.007133	0.3093364	0.0011898	0.3033932	7
0.3033932	0.003758	0.3071512	0.0005949	0.3039881	6
0.3039881	0.001772	0.3057601	0.0002974	0.3042855	6
0.3042855	0.001368	0.3056535	0.0001487	0.3044342	6
0.3044342	0.000923	0.3053572	0.0000744	0.3045086	5
0.3045086	0.000698	0.3052066	0.0000744	$p^* = 0.3045830$	24

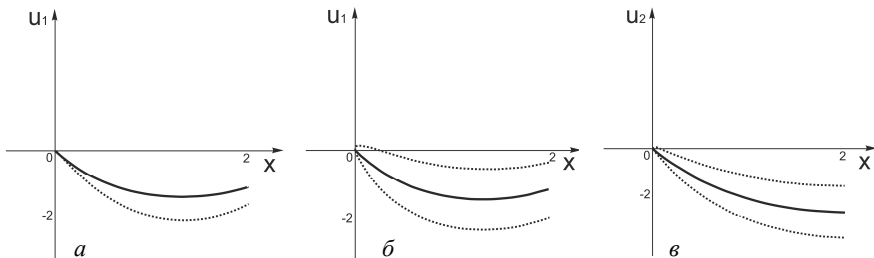


Рис. 3. Лінійний і нелінійний розв'язки  $u_1(x)$  задачі 3 (а); реальна форма втрати стійкості розв'язку  $u_1(x)$  (б); реальна форма втрати стійкості розв'язку  $u_2(x)$  (в)

Процес розв'язування нелінійної задачі наведено в табл. 3. Здійснено 13 кроків за параметром  $p$ . Досягнуто критичне значення  $p^* = 0,304583$ .

На рис. 3а наведено лінійний (пунктир) і нелінійний (суцільна лінія) розв'язок для функції  $u_1(x)$  за критичного значення  $p^* = 0,304583$ . Як видно з рисунка, є значна різниця між цими розв'язками як в кількісному, так і в якісному плані.

На рис. 3б, 3в наведено форми втрати стійкості в околі кінцевого стану для функції  $u_1(x)$  (рис. 3б) та для функції  $u_2(x)$  (рис. 3в). Суцільною лінією зображено нелінійний розв'язок  $u_i(x)$ , пунктирною — вигляд можливих блукань цього розв'язку у разі втрати стійкості. У задачі 3 (на відміну від попередньої задачі) прогнозоване 0,426364 та реальне критичне навантаження 0,304583 різняться вже не так сильно. Однак є різниця у вигляді форм втрати стійкості.

**Висновки.** З аналізу розв'язків наведених трьох задач випливає: Знаходження прогнозованого критичного значення на основі класичної схеми стійкості, побудованої в околі початкового стану може призвести до значних (порядку 400 %) похибок. Тому для визначення реального критичного навантаження слід розв'язувати нелінійну задачу покроковим методом. У цьому випадку на кожному кроці навантаження уточнюється можливе довантаження, а далі реальний крок знаходиться у процесі ітерацій. Якщо ітераційний процес не збігається (перевищує задане  $i_{\max}$ ), то слід ділити крок довантаження пополам і повторювати ітераційний процес спочатку.

Форми втрати стійкості, знайдені в околі початкового стану та в околі кінцевого стану, можуть суттєво різнитися. Тому для знаходження реальних форм втрати стійкості слід шукати їх у процесі розв'язування нелінійної задачі на кожному кроці довантаження.

Розв'язування нелінійної задачі покроковим методом можливе лише до першого критичного значення параметра  $p$ .

### Література

- [1] Буренко В. І., Муха І. С. Чисельне дослідження стійкості тонкостінних гнучких конструкцій складної форми. // Вісник Львів.ун-ту, Сер. прикл. мат. та інформ. — 1999. — Вип. 1. — С. 32-38.
- [2] Муха І. С., Буренко В. І. Упругопластическое напряженно-деформированное состояние и устойчивость тонкостенных гибких конструкций. // Теоретическая и прикладная механика. — 2001. — Вип. 34. — С. 183-189
- [3] Муха І. С. Упругопластическое напряженно-деформированное состояние тонкостенных пространственных конструкций // Теорет. и прикладная механика. — 2004. — Вип. 39. — С. 149-155.
- [4] Mukha I. S., Savula Ya. H. Nonlinear deformation and stability analysis of thin-walled compound constructions // Proceedings of the International conference on nonlinear dynamics. — Kharkov, 2004. — P. 137-140.
- [5] Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов / Пер. с англ. А. Ф. Смирнова. — Москва: Стройиздат, 1982. — 448 с.
- [6] Голуб Дж., Ван лоун Ч. Матричные вычисления: Пер. с англ. — Москва: Мир, 1999. — 548 с.

## Investigation of behaviour of approximate solution of a nonlinear boundary value problem in the instability area

Igor Mukha

*A numerical solution of the nonlinear boundary-value problem is obtained by means of the finite elements method. Variational relation of a problem of stability analysis in the vicinity of any solution of the nonlinear problem is formulated. This problem is discretized by means of the same approximations of finite elements methods, as the solution of the nonlinear problem. The eigenvalue matrix partial problems by a method of iterations in a subspace are reduced to a sequence of full matrix problems of small dimension. These problems are transformed to three-diagonal ones by Householder method and solved by QL-algorithm. The critical value and corresponding forms of loss of stability in the vicinity of the initial and the final states are analysed.*

## Исследование поведения приближенного решения нелинейной граничной задачи в окрестности потери устойчивости

Игорь Муха

*С помощью метода конечных элементов получено приближенное численное решение нелинейной граничной задачи. Сформулировано вариационную постановку задачи устойчивости в окрестности произвольного решения нелинейной задачи. Эта задача дискредитируется с помощью тех же аппроксимаций, что и решение нелинейной задачи. Полученную в результате дискретизации частичную матричную проблему на собственные значения приведено методом итераций в подпространстве к последовательности полных матричных проблем малой размерности. Эти проблемы преобразованы к трехдиагональному виду методом Хаусхолдера и решены с помощью QL-алгоритма. Проведено анализ критического значения и соответствующих форм потери устойчивости, полученных в окрестности начального состояния и в окрестности конечного состояния.*

**Представлено доктором технічних наук Я. П'янилом**

Отримано 15.04.16