

Контактна взаємодія пружних тіл, одне з яких має покриття, з'єднане з основою через вінклерівський прошарок

Ігор Прокопишин

К. ф.-м. н., с. н. с., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3б, Львів, e-mail: ihor84@gmail.com

Методами декомпозиції області досліджено контакт пружних тіл, одне з яких має періодичний рельєф у вигляді виїмок, а інше містить пружне покриття, з'єднане з його основою через тонкий вінклерівський шар. Вивчено розподіл нормальних і дотичних напружень на інтерфейсі між покриттям та основою. Проаналізовано максимальне головне напруження у тілах.

Ключові слова: контактні задачі, вінклерівські шари, варіаційні нерівності, нелінійні варіаційні рівняння, метод штрафу, ітераційні методи, методи декомпозиції області, метод скінченних елементів

Вступ. Контактні задачі теорії пружності є актуальними для багатьох галузей науки і техніки, зокрема для машинобудування, будівельної індустрії, геомеханіки.

Необхідність розв'язування задач про контакт пружних тіл, які мають періодичний рельєф, виникає при дослідженні взаємодії деталей машин чи елементів конструкцій з мікротекстурованими поверхнями, які все частіше використовують для покращення функціональних характеристик та прогнозування контактної поведінки. Огляд досліджень періодичних контактних задач та методів їх розв'язування здійснено у роботі [1].

Проблема обрахунку напружено-деформованого стану неоднорідних пружних тіл з тонкими покриттями та прошарками виникає при вивченні багатошарових композитних конструкцій, геологічних структур та клейових і адгезійних з'єднань. Короткий огляд досліджень задач про контакт пружних тіл з тонкими прошарками і покриттями наведено у праці [2]. Числові методи для розв'язування контактних задач з тонкими покриттями і проміжковими шарами, що ґрунтуються на теорії варіаційних нерівностей, розвинуто у роботах [2-10].

Ефективним підходом до дослідження фізико-механічних полів у багатоелементних структурах є методи декомпозиції області (МДО), які зводять розв'язування крайових задач математичної фізики у складних областях до розв'язування послідовності задач в окремих підобластях. Ці методи дозволяють організовувати розпаралелення обчислень та застосовувати найбільш оптимальні математичні моделі та методи для окремих підобластей. Результати досліджень стосовно

розробки алгоритмів декомпозиції області для розв'язування контактних задач наведено у роботах [8, 11-13].

У працях [14-17] запропоновано клас континуальних паралельних методів декомпозиції області типу Робіна для розв'язування задач про односторонній контакт декількох лінійно та нелінійно пружних тіл, а у роботах [2, 9, 10] ці методи узагальнено на випадок задач про неідеальний контакт пружних тіл через нелінійні поверхневі шари. Ці МДО ґрунтуються на методі штрафу для варіаційних нерівностей та деяких нестационарних ітераційних методах для абстрактних нелінійних варіаційних рівнянь у рефлексивних банахових просторах. Перевагами запропонованих методів є простота алгоритмів та регуляризація контактних задач завдяки використанню штрафу.

У пропонованій статті на основі результатів праць [2, 10, 14, 16] запропоновано ряд континуальних алгоритмів декомпозиції області типу Робіна для розв'язування задачі про контакт трьох пружних тіл, перше з яких взаємодіє з другим внаслідок одностороннього механічного контакту, а друге з'єднане з третім через тонкий нелінійний вінклерівський прошарок. Використовуючи скінченноелементні апроксимації та метод суперпозиції, ці алгоритми апробовано для дослідження контактної взаємодії пружних тіл за наявності кулонівського тертя, одне з яких має періодичний рельєф, а інше містить покриття, з'єднане з основою через лінійний вінклерівський прошарок. Проаналізовано вплив коефіцієнта тертя та жорсткості покриття на контактні напруження на інтерфейсі між покриттям і основою. Вивчено лінії рівня максимального головного напруження у тілах.

1. Постановка задачі

Розглянемо задачу про контакт трьох пружних тіл $\Omega_\alpha \subset \mathbb{R}^2$ з ліпшицевими межами $\Gamma_\alpha = \partial\Omega_\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$ (рис. 1). Між тілом Ω_1 і Ω_2 відбувається односторонній контакт за наявності кулонівського тертя, а тіла Ω_2 і Ω_3 з'єднані між собою через нелінійний шар вінклерівського типу. Позначимо $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$.

У просторі \mathbb{R}^2 введемо ортонормований базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Напружено-деформований стан у точці $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ кожного з тіл Ω_α визначають вектор переміщень $\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{x}) = u_{\alpha i}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i$, симетричні тензори деформацій $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_\alpha(\mathbf{x}) = \varepsilon_{\alpha ij}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ і напружень $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_\alpha(\mathbf{x}) = \sigma_{\alpha ij}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$. Ці величини задовольняють рівняння рівноваги, закон Гука та співвідношення Коші:

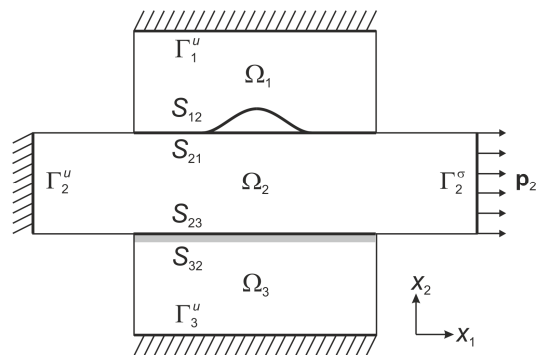


Рис. 1

$$\sum_{j=1}^2 \partial \sigma_{\alpha ij}(\mathbf{x}) / \partial x_j + f_{\alpha i}(\mathbf{x}) = 0, \quad i=1,2, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\alpha}, \quad (1)$$

$$\sigma_{\alpha ij}(\mathbf{x}) = \sum_{k,l=1}^2 C_{\alpha ijkl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{\alpha kl}(\mathbf{x}), \quad i,j=1,2, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\alpha}, \quad (2)$$

$$\varepsilon_{\alpha ij}(\mathbf{x}) = (\partial u_{\alpha i}(\mathbf{x}) / \partial x_j + \partial u_{\alpha j}(\mathbf{x}) / \partial x_i) / 2, \quad i,j=1,2, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\alpha}, \quad (3)$$

де $f_{\alpha i}(\mathbf{x})$ — компоненти вектора об'ємних сил $\mathbf{f}_{\alpha}(\mathbf{x}) = f_{\alpha i}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i$, що діють на тіло Ω_{α} , а $C_{\alpha ijkl}(\mathbf{x})$ — компоненти симетричного тензора пружних сталих, що володіють властивістю [18]:

$$(\exists b_{\alpha}, c_{\alpha} > 0)(\forall \mathbf{x} \in \Omega_{\alpha}) \left\{ b_{\alpha} \sum_{i,j} \varepsilon_{\alpha ij}^2 \leq \sum_{i,j,k,l} C_{\alpha ijkl} \varepsilon_{\alpha ij} \varepsilon_{\alpha kl} \leq c_{\alpha} \sum_{k,l} \varepsilon_{\alpha kl}^2 \right\}. \quad (4)$$

На межі $\Gamma_{\alpha} = \partial \Omega_{\alpha}$ кожного з тіл уведемо локальний ортонормований базис $\boldsymbol{\tau}_{\alpha}, \mathbf{n}_{\alpha}$, де \mathbf{n}_{α} — одинична зовнішня нормаль, а $\boldsymbol{\tau}_{\alpha}$ — одинична дотична. Вектори переміщень і напружень на Γ_{α} у цьому базисі запишемо так:

$$\mathbf{u}_{\alpha} = u_{\alpha \tau} \boldsymbol{\tau}_{\alpha} + u_{\alpha n} \mathbf{n}_{\alpha}, \quad \boldsymbol{\sigma}_{\alpha} = \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\alpha} = \sigma_{\alpha \tau} \boldsymbol{\tau}_{\alpha} + \sigma_{\alpha n} \mathbf{n}_{\alpha}.$$

Припустимо, що межі Γ_1 і Γ_3 складаються з трьох частин, які не перетинаються: $\Gamma_1 = \Gamma_1^u \cup \Gamma_1^{\sigma} \cup S_{12}$, $\Gamma_3 = \Gamma_3^u \cup \Gamma_3^{\sigma} \cup S_{32}$, $\Gamma_1^u, \Gamma_3^u, S_{12}, S_{32} \neq \emptyset$, а межа Γ_2 — з чотирьох частин, що не перетинаються: $\Gamma_2 = \Gamma_2^u \cup \Gamma_2^{\sigma} \cup S_{21} \cup S_{23}$, $\Gamma_2^u, S_{21}, S_{23} \neq \emptyset$. На частині Γ_{α}^u межі Γ_{α} , $\alpha=1,2,3$, задано кінематичні крайові умови, які для спрощення варіаційних формулювань вважаємо нульовими, а на частині Γ_{α}^{σ} — статичні крайові умови:

$$\mathbf{u}_{\alpha}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\alpha}^u, \quad \boldsymbol{\sigma}_{\alpha}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_{\alpha}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\alpha}^{\sigma}, \quad \alpha=1,2,3, \quad (5)$$

де $\mathbf{p}_{\alpha} = p_{\alpha \tau} \boldsymbol{\tau}_{\alpha} + p_{\alpha n} \mathbf{n}_{\alpha}$ — задані граничні зусилля.

Межа $S_{12} \subset \Gamma_1$ — зона можливого контакту тіла Ω_1 з тілом Ω_2 , а $S_{21} \subset \Gamma_2$ — зона можливого контакту тіла Ω_2 з тілом Ω_1 . Вважаємо, що межі S_{12} та S_{21} — достатньо близькі ($S_{12} \approx S_{21}$), тому приймаємо, що їхні зовнішні нормалі відрізняються лише знаком: $\mathbf{n}_1(\mathbf{x}) \approx -\mathbf{n}_2(\mathbf{x}')$, де $\mathbf{x}' = P(\mathbf{x}) \in S_{21}$ — проекція точки $\mathbf{x} \in S_{12}$ на межу S_{21} . Відстань по нормалі між тілами Ω_1 та Ω_2 до деформації позначимо $d_n(\mathbf{x}) = \pm \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^2 (x_i - x'_i)^2}$, де знак залежить від постановки конкретної задачі.

На межах S_{12} і S_{21} задано умови одностороннього контакту за наявності повного фрикційного проковзування:

$$\sigma_{1\tau}(\mathbf{x}) = \sigma_{2\tau}(\mathbf{x}') = \kappa \sigma_{1n}(\mathbf{x}), \quad \sigma_{1n}(\mathbf{x}) = \sigma_{2n}(\mathbf{x}') \leq 0, \quad (6)$$

$$u_{1n}(\mathbf{x}) + u_{2n}(\mathbf{x}') \leq d_n(\mathbf{x}), \quad (7)$$

$$\left[u_{1n}(\mathbf{x}) + u_{2n}(\mathbf{x}') - d_n(\mathbf{x}) \right] \sigma_{1n}(\mathbf{x}) = 0, \quad (8)$$

де $\kappa > 0$ — коефіцієнт тертя, $\mathbf{x} \in S_{12}$, $\mathbf{x}' = P(\mathbf{x}) \in S_{21}$.

Тіла Ω_2 та Ω_3 з'єднані між собою вздовж межі $S_{23} = S_{32}$ через тонкий вінклерівський прошарок. На спільній межі тіл Ω_2 і Ω_3 виконуються наступні умови:

$$\sigma_{2\tau}(\mathbf{x}) = \sigma_{3\tau}(\mathbf{x}) = g_\tau(-u_{2\tau}(\mathbf{x}) - u_{3\tau}(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in S_{23}, \quad (9)$$

$$\sigma_{2n}(\mathbf{x}) = \sigma_{3n}(\mathbf{x}) = g_n(-u_{2n}(\mathbf{x}) - u_{3n}(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in S_{23}, \quad (10)$$

де g_τ і g_n — нелінійні функції, які описують зв'язок між стрибками $w_{23\tau} = -u_{2\tau} - u_{3\tau}$, $w_{23n} = -u_{2n} - u_{3n}$ дотичних і нормальних переміщень та відповідними контактними напруженнями.

Надалі вважатимемо, що функції $g_m(z)$, $m = \tau, n$, — неперервні та володіють властивостями:

$$(\forall m) \{ g_m(0) = 0 \}, \quad (\forall m) (\forall y, z) \{ y < z \Rightarrow g_m(y) < g_m(z) \}, \quad (11)$$

$$(\forall m) (\exists \tilde{M}_m > 0) (\forall y, z) \{ |g_m(y) - g_m(z)| \leq \tilde{M}_m |y - z| \}. \quad (12)$$

Зазначимо, що контактна задача (1)-(3), (5)-(10) є нелінійною, оскільки крайові умови (8), (9) і (10) — нелінійні.

Спершу розглянемо варіаційні формулювання та методи розв'язування цієї задачі у випадку, коли тертя відсутнє, тобто $\kappa = 0$.

2. Варіаційні формулювання

Для кожного з тіл Ω_α розглянемо простори Соболева $V_\alpha = [H^1(\Omega_\alpha)]^2$ та уведемо в них замкнуті підпростори $V_\alpha^0 = \{ \mathbf{u}_\alpha \in V_\alpha : \mathbf{u}_\alpha = 0 \text{ на } \Gamma_\alpha^u \}$ зі скалярним добутком $(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha)_{V_\alpha^0} = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_\alpha} \left(u_{\alpha i} v_{\alpha i} + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial u_{\alpha i}}{\partial x_j} \frac{\partial v_{\alpha i}}{\partial x_j} \right) d\Omega$ і нормою $\| \mathbf{u}_\alpha \|_{V_\alpha^0} = (\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{u}_\alpha)_{V_\alpha^0}^{1/2}$.

Значення елементів просторів V_α і V_α^0 на частинах межі області Ω_α будемо розуміти у сенсі слідів [19] та для простоти позначатимемо їх тими ж символами.

Розглянемо рефлексивний банаховий простір $V_0 = V_1^0 \times V_2^0 \times V_3^0$, який є прямим добутком просторів V_α^0 , $\alpha = 1, 2, 3$. У просторі V_0 означимо скалярний

добуток $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{V_0} = \sum_{\alpha=1}^3 (\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha)_{V_\alpha^0}$ і норму $\|\mathbf{u}\|_{V_0} = (\mathbf{u}, \mathbf{u})_{V_0}^{1/2}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0$. Крім цього, введемо у V_0 опуклу замкнуту множину кінематично допустимих переміщень:

$$K = \left\{ \mathbf{u} \in V_0 : u_{1n} + u_{2n} \leq d_n \text{ на } S_{12} \right\}, \quad (13)$$

де $u_{\alpha n} = \mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha \in H_{00}^{1/2}(\Xi_\alpha)$, $d_n \in H_{00}^{1/2}(\Xi_1)$, $\Xi_\alpha = \Gamma_\alpha \setminus \Gamma_\alpha^u$.

У просторі V_0 визначимо білінійну форму $A(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, що відповідає сумарній енергії пружної деформації тіл:

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{\alpha=1}^3 a_\alpha(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha), \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0, \quad a_\alpha(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha) = \int_{\Omega_\alpha} \widehat{\sigma}_\alpha(\mathbf{u}_\alpha) : \widehat{\varepsilon}_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) d\Omega, \quad (14)$$

лінійну форму $L(\mathbf{u})$, рівну роботі заданих зовнішніх сил:

$$L(\mathbf{u}) = \sum_{\alpha=1}^3 l_\alpha(\mathbf{u}_\alpha), \quad \mathbf{u} \in V_0, \quad l_\alpha(\mathbf{u}_\alpha) = \int_{\Omega_\alpha} \mathbf{f}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha d\Omega + \int_{\Gamma_\alpha^\sigma} \mathbf{p}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha dS, \quad (15)$$

де $\mathbf{f}_\alpha \in [L_2(\Omega_\alpha)]^2$, $\mathbf{p}_\alpha \in [L_2(\Gamma_\alpha^\sigma)]^2$, $\alpha = 1, 2, 3$, а також неквадратичний функціонал $H(\mathbf{u})$, що відповідає енергії пружної деформації поверхневих шарів:

$$H(\mathbf{u}) = \int_{S_{23}} \left[\int_0^{-u_{2\tau} - u_{3\tau}} g_\tau(z) dz + \int_0^{-u_{2n} - u_{3n}} g_n(z) dz \right] dS, \quad \mathbf{u} \in V_0. \quad (16)$$

Функціонал $H(\mathbf{u})$ — диференційовний за Гато:

$$H'(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = - \int_{S_{23}} \left[g_\tau(-u_{2\tau} - u_{3\tau})(v_{2\tau} + v_{3\tau}) + g_n(-u_{2n} - u_{3n})(v_{2n} + v_{3n}) \right] dS. \quad (17)$$

Його диференціал Гато $H'(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ — лінійний за \mathbf{v} , однак нелінійний за \mathbf{u} .

Ми довели таку теорему.

Теорема 1. Вихідна контактна задача (1)-(3), (5)-(10) за відсутності тертя у слабкому розумінні еквівалентна задачі мінімізації на опуклій замкнутій множині $K \subsetneq V_0$ неквадратичного функціонала:

$$F(\mathbf{u}) = A(\mathbf{u}, \mathbf{u})/2 - L(\mathbf{u}) + H(\mathbf{u}) \rightarrow \min_{\mathbf{u} \in K}. \quad (18)$$

Якщо межі $\Gamma_\alpha = \partial\Omega_\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$, тіл є ліпшицевими, $\Gamma_\alpha^u \neq \emptyset$, $\mathbf{f}_\alpha \in [L_2(\Omega_\alpha)]^2$, $\mathbf{p}_\alpha \in [L_2(\Gamma_\alpha^\sigma)]^2$, $C_{\alpha ijkl} \in L_\infty(\Omega_\alpha)$ та виконуються умови (4), (11) і (12), то задача (18) має єдиний розв'язок та її розв'язання еквівалентне розв'язанню на множині K наступної неквадратичної варіаційної нерівності:

$$F'(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) = A(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) - L(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + H'(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in K, \mathbf{u} \in K. \quad (19)$$

Для зведення задачі мінімізації (18) на опуклій замкнутій множині K до задачі безумовної мінімізації у вихідному просторі V_0 , застосуємо метод штрафу [18, 19]. За порушення умов непроникнення (7) уведемо штраф у такій формі:

$$J_\theta(\mathbf{u}) = \frac{1}{2\theta} \int_{S_{12}} \left[(d_n - u_{1n} - u_{2n})^- \right]^2 dS \geq 0, \quad \mathbf{u} \in V_0, \quad (20)$$

де $\theta > 0$ — параметр штрафу, $y^- = \min\{0, y\}$, та розглянемо задачу мінімізації функціонала зі штрафом у просторі V_0 :

$$F_\theta(\mathbf{u}) = F(\mathbf{u}) + J_\theta(\mathbf{u}) = A(\mathbf{u}, \mathbf{u})/2 - L(\mathbf{u}) + H(\mathbf{u}) + J_\theta(\mathbf{u}) \rightarrow \min_{\mathbf{u} \in V_0}. \quad (21)$$

Штрафний доданок $J_\theta(\mathbf{u})$ — невід'ємний і диференційовний за Гато:

$$J'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\frac{1}{\theta} \int_{S_{12}} (d_n - u_{1n} - u_{2n})^- (v_{1n} + v_{2n}) dS, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0. \quad (22)$$

Тут величина $\sigma_{12n} = \sigma_{1n} = \sigma_{2n} = (d_n - u_{1n} - u_{2n})^- / \theta$ має сенс нормального контактного напруження. Диференціал Гато $J'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ — лінійний за \mathbf{v} та нелінійний за \mathbf{u} .

Нами доведено таку теорему.

Теорема 2. Нехай виконуються умови *теорему 1* і $d_n \in H_{00}^{1/2}(\Xi_1)$. Тоді задача (21) має єдиний розв'язок та її розв'язання еквівалентне розв'язанню в просторі V_0 нелінійного по \mathbf{u} варіаційного рівняння:

$$F'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + H'(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + J'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V_0, \mathbf{u} \in V_0. \quad (23)$$

Окрім цього, якщо $\bar{\mathbf{u}}_\theta \in V_0$ — розв'язок задачі (21) (варіаційного рівняння (23)) для $\theta > 0$, а $\bar{\mathbf{u}} \in K$ — розв'язок задачі (18) (варіаційної нерівності (19)), то $\bar{\mathbf{u}}_\theta$ збігається сильно в просторі V_0 до $\bar{\mathbf{u}}$ при $\theta \rightarrow 0$, тобто $\|\bar{\mathbf{u}}_\theta - \bar{\mathbf{u}}\|_{V_0} \rightarrow 0$.

Отже, застосовуючи метод штрафу, розв'язування неквадратичної варіаційної нерівності (19) на опуклій множині K зведено до розв'язування нелінійного варіаційного рівняння (23) у просторі V_0 , залежного від параметра штрафу θ .

3. Методи декомпозиції області

Застосуємо до розв'язування нелінійного варіаційного рівняння (23), яке відповідає контактній задачі (1)-(3), (5)-(10) за відсутності тертя, такий неявний нестационарний ітераційний метод з параметрами [2, 15]:

$$G^k(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v}) = G^k(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) - \gamma^k \left[A(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) + H'(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) + J'_\theta(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v}) \right], \quad k = 0, 1, \dots, \quad (24)$$

де $G^k : V_0 \times V_0 \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$, — деякі білінійні форми, задані у просторі V_0 , $\gamma^k \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \dots$, — ітераційні параметри, а $\mathbf{u}^k \in V_0$, $k = 0, 1, \dots$, — k -ті наближення до точного розв'язку рівняння (23). Ми довели таке твердження про збіжність цього ітераційного методу.

Теорема 3. Нехай виконуються умови *теорему 1* і $d_n \in H_{00}^{1/2}(\Xi_1)$. Тоді білінійна форма A є симетричною, неперервною з константою $M_A > 0$ і коерцитивною з константою $B_A > 0$, а функціонал $Y_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = H'(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + J'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ володіє властивістю:

$$(\exists D_\theta > 0)(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V_0) \left\{ |Y_\theta(\mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{v}) - Y_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq D_\theta \|\mathbf{v}\|_{V_0} \|\mathbf{w}\|_{V_0} \right\}. \quad (25)$$

Окрім цього, нехай білінійні форми G^k , $k \in \mathbb{N}_0$, є симетричні, неперервні з константою $M_G^* > 0$ і коерцитивними з константою $B_G^* > 0$, а також справджуються умови:

$$(\exists k_0 \in \mathbb{N}_0)(\forall k \geq k_0)(\forall \mathbf{u} \in V_0) \left\{ G^k(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq G^{k+1}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \right\}, \quad (26)$$

$$\left(\exists \varepsilon \in (0, \gamma^*), \gamma^* = B_A B_G^* / (M_A + D_\theta)^2 \right) (\exists k_1 \in \mathbb{N}_0)(\forall k \geq k_1) \left\{ \gamma^k \in [\varepsilon, 2\gamma^* - \varepsilon] \right\}. \quad (27)$$

Тоді послідовність $\{\mathbf{u}^k\}$, отримана методом (24), збігається сильно у просторі V_0 при $k \rightarrow \infty$ до точного розв'язку $\bar{\mathbf{u}} \in V_0$ задачі (23), тобто $\|\mathbf{u}^k - \bar{\mathbf{u}}\|_{V_0} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

Доведення цієї теореми подібне до доведення теореми 4 у роботі [16].

У загальному випадку ітераційний метод (24), застосований до розв'язування варіаційного рівняння (23), не приводить до декомпозиції задачі за підобластями. Тому запропонуємо такі варіанти цього методу, які на кожному ітераційному кроці реалізують таку декомпозицію, тобто які зводять розв'язування нелінійного варіаційного рівняння (23) у всій області Ω до розв'язування послідовності лінійних варіаційних рівнянь в окремих тілах Ω_α . Декомпозиції можна досягти завдяки певному вибору білінійних форм G^k в ітераційному процесі (24).

Надалі, вважатимемо, що функції $g_\tau(z)$ і $g_n(z)$ — диференційовні. Тоді функціонал H буде двічі диференційовним за Гаато. Виберемо білінійні форми G^k у методі (24) так:

$$G^k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \partial^2 F_\theta(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + H''(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \partial^2 J_\theta(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0, \quad (28)$$

$$H''(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{m=\tau, n} \int_{S_{23}} g'_m(-u_{2m}^k - u_{3m}^k) [u_{2m} + u_{3m}] [v_{2m} + v_{3m}] dS, \quad (29)$$

$$\partial^2 J_\theta(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{\theta} \int_{S_{12}} \chi_{12}^k [u_{1n} + u_{2n}] [v_{1n} + v_{2n}] dS, \quad \chi_{12}^k = - \left[\text{sgn}(d_n - u_{1n}^k - u_{2n}^k) \right]^-, \quad (30)$$

де $H''(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ — другий диференціал Гато функціонала H , а $\partial^2 J_\theta(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ та $\partial^2 F_\theta(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ — другі субдиференціали Гато функціоналів J_θ та F_θ у точці $\mathbf{u}^k \in V_0$ за напрямками $\mathbf{u} \in V_0$ і $\mathbf{v} \in V_0$.

Ітераційний метод (24) з білінійними формами (28) при $\gamma^k = 1$, $k = 0, 1, \dots$, відповідає неявному напігладкому методу Ньютону для розв'язування нелінійного варіаційного рівняння (23). Проте нестационарний ітераційний метод (24), (28) не приводить до декомпозиції задачі за підобластями.

Тепер білінійні форми G^k у методі (24) виберемо так:

$$G^k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + X^k(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0, \quad (31)$$

де $X^k : V_0 \times V_0 \rightarrow \mathbb{R}$ — наступні білінійні форми:

$$\begin{aligned} X^k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \sum_{m=\tau, n} \int_{S_{23}^k} g'_m(-u_{2m}^k - u_{3m}^k)(u_{2m}v_{2m} + u_{3m}v_{3m}) dS + \frac{1}{\theta} \int_{S_{12}^k} (u_{1n}v_{1n} + u_{2n}v_{2n}) dS = \\ &= \sum_{m=\tau, n} \int_{S_{23}} \psi_{23}^k g'_m(-u_{2m}^k - u_{3m}^k)(u_{2m}v_{2m} + u_{3m}v_{3m}) dS + \\ &+ \frac{1}{\theta} \int_{S_{12}} \psi_{12}^k (u_{1n}v_{1n} + u_{2n}v_{2n}) dS. \end{aligned} \quad (32)$$

Тут $S_{\alpha\beta}^k \subseteq S_{\alpha\beta}$, $k \in \mathbb{N}_0$, — деякі задані підмножини поверхонь $S_{\alpha\beta}$, $\{\alpha, \beta\} = \{1, 2\}, \{2, 3\}$, а $\psi_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x}) = \{0, \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta} \setminus S_{\alpha\beta}^k\} \vee \{1, \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}^k\}$ — характеристичні функції, які визначають ці підмножини. Зокрема, функції ψ_{12}^k можна задати у вигляді

$$\psi_{12}^k = \chi_{12}^k = \chi_{12}(\mathbf{u}^k) = -\left[\operatorname{sgn}\left(d_n - u_{1n}^k - u_{2n}^k\right) \right]^-. \quad (33)$$

Покажемо, що такий вибір G^k зумовлює декомпозицію за підобластями. Увівши позначення $\tilde{\mathbf{u}}^{k+1} = \left[\mathbf{u}^{k+1} - (1 - \gamma^k) \mathbf{u}^k \right] / \gamma^k$, запишемо ітераційний метод (24) з білінійними формами (31) у такому еквівалентному вигляді:

$$A(\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}, \mathbf{v}) + X^k(\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) + X^k(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) - H'(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) - J'_\theta((\mathbf{u}^k, \mathbf{v})) \quad \forall \mathbf{v} \in V_0, \quad (34)$$

$$\mathbf{u}^{k+1} = \gamma^k \tilde{\mathbf{u}}^{k+1} + (1 - \gamma^k) \mathbf{u}^k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (35)$$

Оскільки величини, які є спільними для підобластей, відомі з попереднього ітераційного кроку, то варіаційне рівняння (34) розпадається на 3 незалежні варіаційні рівняння в тілах Ω_α , і метод (34), (35) еквівалентний такому ітераційному методу:

$$a_1(\tilde{\mathbf{u}}_1^{k+1}, \mathbf{v}_1) + \frac{1}{\theta} \int_{S_{12}} \psi_{12}^k \tilde{u}_{1n}^{k+1} v_{1n} dS = l_1(\mathbf{v}_1) + \frac{1}{\theta} \int_{S_{12}} \psi_{12}^k u_{1n}^k v_{1n} dS + \frac{1}{\theta} \int_{S_{12}} (d_n - u_{1n}^k - u_{2n}^k)^- v_{1n} dS \quad \forall \mathbf{v}_1 \in V_1^0, \quad (36)$$

$$a_2(\tilde{\mathbf{u}}_2^{k+1}, \mathbf{v}_2) + \frac{1}{\theta} \int_{S_{21}} \psi_{12}^k \tilde{u}_{2n}^{k+1} v_{2n} dS + \sum_{m=\tau, n} \int_{S_{23}} \psi_{23}^k g'_m (-u_{2m}^k - u_{3m}^k) \tilde{u}_{2m}^{k+1} v_{2m} dS = l_2(\mathbf{v}_2) + \frac{1}{\theta} \int_{S_{21}} \psi_{12}^k u_{2n}^k v_{2n} dS + \sum_{m=\tau, n} \int_{S_{23}} \psi_{23}^k g'_m (-u_{2m}^k - u_{3m}^k) u_{2m}^k v_{2m} dS + \frac{1}{\theta} \int_{S_{21}} (d_n - u_{1n}^k - u_{2n}^k)^- v_{2n} dS + \sum_{m=\tau, n} \int_{S_{23}} g_m (-u_{2m}^k - u_{3m}^k) v_{2m} dS \quad \forall \mathbf{v}_2 \in V_2^0, \quad (37)$$

$$a_3(\tilde{\mathbf{u}}_3^{k+1}, \mathbf{v}_3) + \sum_{m=\tau, n} \int_{S_{32}} \psi_{23}^k g'_m (-u_{2m}^k - u_{3m}^k) \tilde{u}_{3m}^{k+1} v_{3m} dS = l_3(\mathbf{v}_3) + \sum_{m=\tau, n} \int_{S_{32}} \psi_{23}^k g'_m (-u_{2m}^k - u_{3m}^k) u_{3m}^k v_{3m} dS + \sum_{m=\tau, n} \int_{S_{32}} g_m (-u_{2m}^k - u_{3m}^k) v_{3m} dS \quad \forall \mathbf{v}_3 \in V_3^0, \quad (38)$$

$$\mathbf{u}_\alpha^{k+1} = \gamma^k \tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1} + (1 - \gamma^k) \mathbf{u}_\alpha^k, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad k = 0, 1, \dots \quad (39)$$

На кожній ітерації k методу (36)-(39) необхідно паралельно розв'язувати три незалежні лінійні варіаційні рівняння (36), (37) і (38) в окремих тілах Ω_α , що відповідають задачам теорії пружності з крайовими умовами Робіна (Пуанкаре) на зонах можливого одностороннього контакту S_{12} , S_{21} та межах S_{23} і S_{32} . Тому ітераційний метод (36)-(39) належить до *паралельних схем Робіна (Пуанкаре) декомпозиції області* [2, 9, 10, 14-17].

Вибираючи різні характеристичні функції $\psi_{\alpha\beta}^k = \psi_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x})$, $\{\alpha, \beta\} = \{1, 2\}, \{2, 3\}$, $k = 0, 1, \dots$, тобто різні підмножини $S_{\alpha\beta}^k \subseteq S_{\alpha\beta}$, можна отримати різні варіанти методу декомпозиції області (36)-(39). Так, покладаючи $\psi_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x}) \equiv 0$, тобто $S_{\alpha\beta}^k = \emptyset$, $\forall \alpha, \beta$, $\forall k$, отримаємо *паралельну схему Неймана*. Інший граничний випадок відповідає $\psi_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x}) \equiv 1$, тобто $S_{\alpha\beta}^k = S_{\alpha\beta}$, $\forall \alpha, \beta$, $\forall k$. Однак, числові експерименти, проведені нами, показали, що найефективніше ці функції вибирати у вигляді: $\psi_{12}^k(\mathbf{x}) = \chi_{12}^k(\mathbf{x})$, $\psi_{23}^k(\mathbf{x}) \equiv 1$. Такий вибір забезпечить найвищу швидкість збіжності.

Отже, для розв'язування нелінійної контактної задачі (1)-(3), (5)-(10) у випадку відсутності тертя ми запропонували клас ітераційних методів декомпозиції області (36)-(39), які зводять її розв'язування до розв'язування на кожній ітерації

задач лінійної теорії пружності в окремих тілах з крайовими умовами Робіна. Задачі в окремих тілах можна розв'язувати різними числовими методами, зокрема МСЕ або МГЕ. У випадку наявності тертя ($\kappa \neq 0$), його можна врахувати, застосовуючи метод суперпозиції.

4. Числові дослідження

Розроблені методи декомпозиції області (36)-(39) застосуємо до розв'язування задачі про контакт трьох безмежних ізотропних пружних смуг Ω_1^* , Ω_2^* і Ω_3^* (рис. 2).

На верхню грань смуги Ω_1^* і на нижню грань смуги Ω_3^* діють нормальні та дотичні навантаження інтенсивності q та κq відповідно, де κ — коефіцієнт тертя. Нижня грань смуги Ω_1^* має регулярний рельєф, утворений розташованими з періодом $2l$ однаковими виїмками довжини $2b$ ($b \leq l$), форма яких описується функцією $r(x_1)$ ($r(x_1 + 2il) = r(x_1)$, $x_1 \in [l-b, l+b]$, $i = \pm 1, \pm 2, \dots$). Між смугами Ω_1^* і Ω_2^* відбувається односторонній контакт за наявності повного проковзування. Смуги Ω_2^* і Ω_3^* (надалі — покриття і основа) з'єднані через тонкий вінклерівський прошарок. Висоти верхньої та нижньої смуг — однакові і дорівнюють $h_1 = h_3 = h$. Висота середньої смуги Ω_2^* рівна h_2 . Модулі Юнга смуг Ω_1^* і Ω_3^* однакові й дорівнюють $E_1 = E_3 = E$, а модуль Юнга середньої смуги рівний E_2 . Коефіцієнти Пуассона всіх смуг — однакові та рівні $\nu = 0,3$.

Функції g_τ та g_n , які описують зв'язок між напруженнями і переміщеннями вінклерівського шару, вибирали лінійними у наступному вигляді:

$$g_\tau(w_{23\tau}(\mathbf{x})) = w_{23\tau}(\mathbf{x})/B, \quad g_n(w_{23n}(\mathbf{x})) = w_{23n}(\mathbf{x})/B, \quad \mathbf{x} \in S_{23}.$$

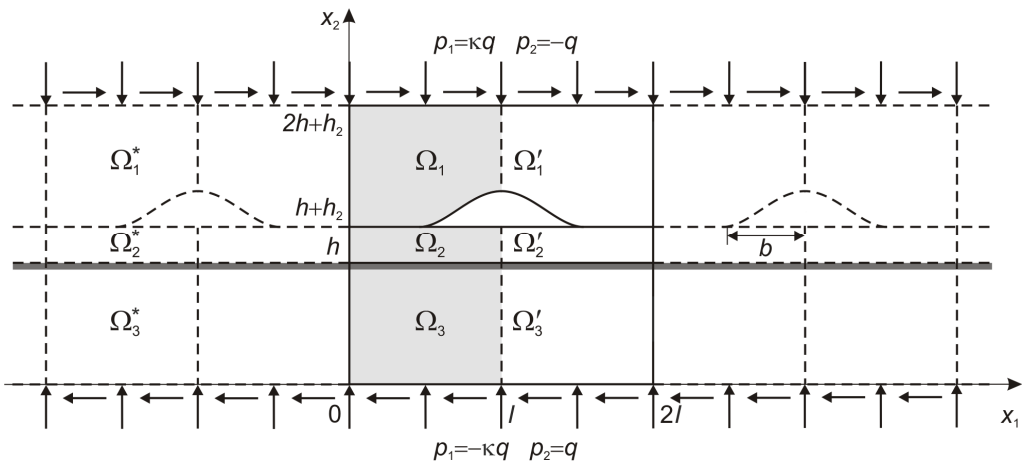


Рис. 2

Дослідження сформульованої задачі проведено для наступних фізичних і геометричних параметрів: інтенсивність зовнішнього нормального навантаження $q = 10$ МПа, висота нижньої і верхньої смуг $h = 8$ см, висота середньої смуги $h_2 \in [0, 125 \text{ см}; 0,5 \text{ см}]$, модулі Юнга нижньої і верхньої смуг $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, модуль Юнга середньої смуги $E_2 \in [E/5, 5E]$, півдовжина виїмок $b = 1$ см, форма виїмок $r(x_1) = r_0 \left[1 - (x_1 - l)^2 / b^2 \right]^{3/2}$, максимальна висота виїмок $r_0 = r(l) = 5 \cdot 10^{-4}$ см, півперіод розташування виїмок $l = 4$ см, параметр вінклерівського прошарку $B = 10^{-5}$ см/МПа, коефіцієнт тертя $\kappa \in [0; 0,6]$.

У випадку, коли тертя відсутнє ($\kappa = 0$), внаслідок періодичності сформульована задача еквівалентна задачі про контакт трьох скінченних тіл Ω_1 , Ω_2 і Ω_3 довжини l , що виділені на рис. 2 сірим кольором, за виконання умов симетрії на правій та лівій бічних гранях цих тіл. При цьому зона можливого контакту між тілами Ω_1 і Ω_2 рівна $S_{12} = \{ \mathbf{x} : x_1 \in [0, l], x_2 = h + h_2 \}$, а міжфазна поверхня між тілами Ω_2 і Ω_3 дорівнює $S_{23} = \{ \mathbf{x} : x_1 \in [0, l], x_2 = h \}$. Відстань між тілами Ω_1 і Ω_2 до деформації рівна $d_n(\mathbf{x}) = \text{sgn} \left[(x_1 - l + b)^+ \right] r(x_1)$, $\mathbf{x} \in S_{12}$.

Цю задачу розв'язано паралельною схемою декомпозиції області (36)-(39). Висоту середнього тіла задавали рівною $h_2 = 0,125$ см або $h_2 = 0,5$ см. Для числового розв'язування лінійних задач теорії пружності в окремих тілах на кожному кроці застосовано МСЕ з квадратичними трикутними елементами. Для тіл Ω_1 і Ω_3 використовували розбиття на 8192 квадратичні скінченні елементи. У випадку, коли тіло Ω_2 має висоту $h_2 = 0,125$ см, то для нього використовували розбиття на 500 квадратичних скінченних елементів, а у випадку $h_2 = 0,5$ см — на 1024 елементи. Початкові наближення для переміщень задавали у вигляді $u_{\alpha\tau}^0(\mathbf{x}) = u_{\alpha n}^0(\mathbf{x}) \equiv 10^{-6}$ см, $\alpha = 1, 2, 3$. Для зупинки ітераційного процесу застосовували критерій

$$\|u_{\alpha m}^{k+1} - u_{\alpha m}^k\|_2 / \|u_{\alpha m}^{k+1}\|_2 \leq \varepsilon_u, \quad m = \tau, n, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

де $\|u_{\alpha m}\|_2 = \sqrt{\sum_j [u_{\alpha m}(\mathbf{x}^j)]^2}$ — дискретна норма, $\mathbf{x}^j \in S_\alpha$ — вузли скінченно-елементного розбиття межі S_α , $\alpha = 1, 2, 3$, $S_1 = S_{12}$, $S_2 = S_{21} \cup S_{23}$, $S_3 = S_{32}$, а $\varepsilon_u > 0$ — відносна точність для переміщень.

Ітераційні параметри γ^k у методі (36)-(39) задавали однаковими на кожній ітерації, тобто $\gamma^k = \gamma = 0,5$; $k = 0, 1, \dots$, а характеристичні функції вибирали у вигляді: $\psi_{12}^k(\mathbf{x}) = \chi_{12}^k(\mathbf{x})$, $\psi_{23}^k(\mathbf{x}) \equiv 1$. При таких параметрах МДО (36)-(39) досягає точності $\varepsilon_u = 10^{-3}$ за 30-70 ітерацій залежно від вхідних даних.

У випадку наявності тертя ($\kappa \neq 0$) вихідну контактну задачу можна розв'язати застосовуючи комбінований алгоритм, в якому поєднано розроблені вище МДО та метод суперпозиції. Цей алгоритм полягає у наступному.

Спершу розв'язуємо описану вище контактну задачу для скінченних тіл за відсутності тертя методом декомпозиції області (36)-(39). Знаходимо нормальне контактне напруження σ_{1n}^* на ділянці контакту S_{12} .

Далі розв'язуємо дві допоміжні задачі для скінченних тіл Ω'_1 , Ω'_2 і Ω'_3 довжини $2l$, які вдвічі більші за тіла Ω_1 , Ω_2 і Ω_3 . Для тіла Ω'_3 розв'язуємо задачу теорії пружності зі заданими дотичними навантаженнями на нижній грані, що дорівнюють $\kappa \sigma_{1n}^*$, а для тіл Ω'_1 і Ω'_2 — задачу про контакт пружних тіл через вінклерівський шар. При цьому на верхній грані тіла Ω'_2 задані дотичні зусилля, що дорівнюють $\kappa \sigma_{1n}^*$.

Задачу теорії пружності для тіла Ω'_3 розв'язуємо МСЕ, а контактну задачу для тіл Ω'_1 і Ω'_2 — методом декомпозиції області, подібним до МДО (36)-(39), однак уже без третього тіла. При цьому початкові наближення та ітераційні параметри вибираємо такі ж, як і у випадку задачі без тертя. Скінченноелементні сітки для тіл Ω'_1 , Ω'_2 і Ω'_3 вибираємо такої ж густини як і для тіл Ω_1 , Ω_2 і Ω_3 . Тобто ці сітки матимуть удвічі більше скінченних елементів ніж сітки для тіл Ω_1 , Ω_2 і Ω_3 .

На останньому етапі знаходимо розв'язок вихідної контактної задачі з тертям у вигляді суми переміщень і напружень, отриманих внаслідок розв'язання задачі без тертя, з відповідними переміщеннями і напруженнями, отриманими, розв'язавши допоміжні задачі.

Тепер проведемо аналіз числових розв'язків вихідної контактної задачі з тертям, отриманих комбінованим алгоритмом з використанням схем МДО та методу суперпозиції. Дослідимо міжфазні нормальні і дотичні напруження σ_n і σ_τ на поверхні $S_{23} = S_{32}$, що отримані для різних коефіцієнтів тертя та різних модулів Юнга E_2 і різних висот h_2 середньої смуги Ω_2^* .

На рис. 3 зображено графіки напружень σ_n на поверхні S_{23} . Криві, позначені суцільними лініями, відповідають числовим результатам за відсутності сил тертя ($\kappa = 0$), а криві, позначені штриховими лініями — за коефіцієнта тертя $\kappa = 0,4$. Криві 1-3 відповідають σ_n , отриманих для випадку висоти середньої смуги $h_2 = 0,5$ см за модулів Юнга $E_2 = E/5$, E , $5E$, а криві 4 і 5 — для $E_2 = E/5$ і $E_2 = 5E$ при висоті середньої смуги $h_2 = 0,125$ см.

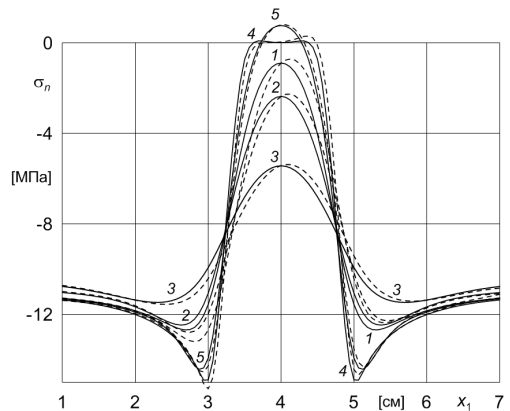


Рис. 3

Отримані результати показують, що всі нормальні напруження, окрім тих, що зображені кривими 4, мають один глобальний максимум. Цей максимум у випадку відсутності тертя досягається у центрі виїмки ($x_1 = 4$ см). За наявності тертя він зміщується вправо. Чим жорсткіша середня смуга Ω_2^* , тим це зміщення є меншим. Для висоти $h_2 = 0,5$ см зі збільшенням модуля Юнга E_2 , значення глобального максимуму зменшується. У випадку висоти $h_2 = 0,125$ см та модуля Юнга $E_2 = E/5$ графіки напружень σ_n мають два локальні максимуми у точках всередині зазору. За наявності тертя правий локальний максимум є більшим та зміщений вправо. Однак, при збільшенні E_2 ці два локальні максимуми зникають, а натомість з'являється один глобальний максимум, значення якого, на відміну від випадку висоти $h_2 = 0,5$ см, перевищує значення максимумів для менших жорсткостей смуги Ω_2^* .

На рис. 4 зображено розподіли дотичних напружень σ_τ на поверхні S_{23} для висоти середньої смуги $h_2 = 0,5$ см, а на рис. 5 — для висоти $h_2 = 0,125$ см. Суцільні криві на цих рисунках відповідають модулю Юнга $E_2 = E/5$, а штрихові криві — $E_2 = 5E$. Криві 1-4 побудовані для коефіцієнтів тертя $\kappa = 0; 0,2; 0,4$ та $0,6$.

Усі криві на рис. 4 мають локальний мінімум у точці, близькій до абсциси лівого краю зазору, та локальний максимум у точці, близькій до абсциси правого краю зазору. У випадку більшої жорсткості E_2 ці локальні екстремуми є менш вираженими і графіки є більш гладкими. При збільшенні коефіцієнта тертя графіки дотичних контактних напружень зсуваються вниз та з'являється ще один локальний максимум зліва від краю виїмки.

Тепер проаналізуємо результати на рис. 5. Вони відрізняються від результатів для висоти $h_2 = 0,5$ см (рис. 4) тим, що при збільшенні коефіцієнта тертя для жорсткості $E_2 = E/5$ локальний максимум на правому краю зазору стає все менш вираженим. Натомість з'являється ще один локальний максимум у абсцисі, близькій до центру виїмки. Окрім цього, графіки дотичних напружень σ_τ для жорсткостей $E_2 = E/5$ і $E_2 = 5E$ при збільшенні κ все більше відрізняються.

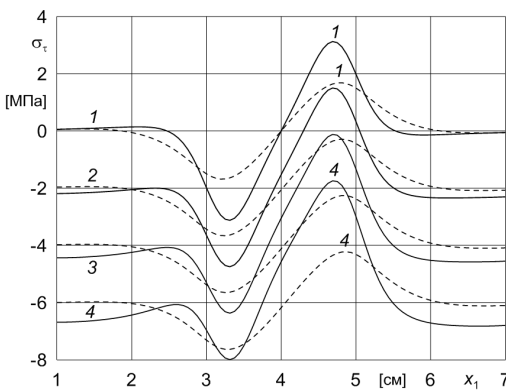


Рис. 4

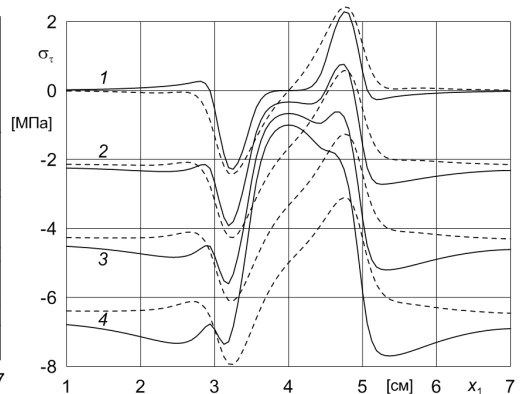


Рис. 5

Також здійснено дослідження максимального головного напруження у тілах Ω'_2 та Ω'_3 . Це напруження визначається за формулою:

$$\sigma_{\max}(\mathbf{x}) = \max \{ \sigma_1(\mathbf{x}), \sigma_2(\mathbf{x}), \sigma_3(\mathbf{x}) \},$$

де σ_1 , σ_2 та σ_3 — головні напруження:

$$\sigma_1 = (\sigma_{11} + \sigma_{22})/2 + \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}/2},$$

$$\sigma_2 = (\sigma_{11} + \sigma_{22})/2 - \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}/2}, \quad \sigma_3 = \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}).$$

Результати отримано для випадку, коли тіло Ω'_2 має висоту $h_2 = 0,125$ см.

Рис. 6 та рис. 7 ілюструють лінії рівня напруження σ_{\max} відповідно для жорсткостей $E_2 = E/5$ та $E_2 = 5E$. На лівій частині кожного з цих рисунків зображено ізолінії за відсутності тертя ($\kappa = 0$), а на правій — за коефіцієнта тертя $\kappa = 0,4$. Верхня частина кожного рисунку відповідає результатам для середнього тіла Ω'_2 (покриття), а нижня частина — для нижнього тіла Ω'_3 (основи).

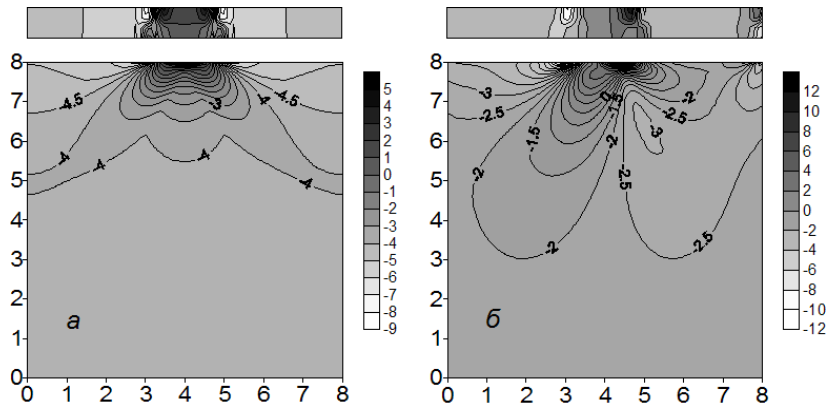


Рис. 6

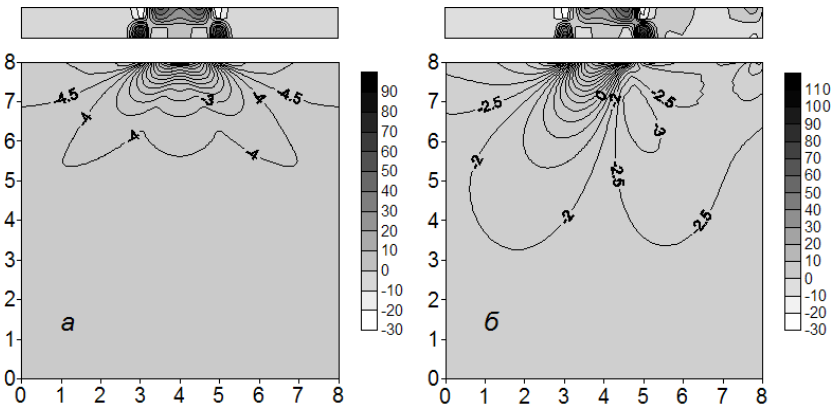


Рис. 7

Отримані результати показують, що σ_{\max} в тілі Ω'_2 (покритті) має два локальних максимуми на ділянці можливого контакту S_{12} поблизу країв виїмки та два локальних максимуми на межі S_{23} . При $E_2 = 5E$ локальні максимуми на інтерфейсі покриття-основа (S_{23}) перевищують локальні максимуми, які виникають на інтерфейсі текстуроване тіло-покриття (S_{12}). Отже, за таких вхідних параметрів руйнування почнеться на міжфазній поверхні S_{23} .

Напруження σ_{\max} в основі Ω'_3 при $\kappa = 0$ і $E_2 = E/5$ (рис. 6а) має два абсолютні максимуми, розташовані на інтерфейсі покриття-основа (S_{23}) симетрично відносно центру виїмки, а в решті випадків (рис. 6б, рис. 7а, рис. 7б) — один абсолютний максимум, розташування якого відносно центру виїмки є різним. Зокрема, при $\kappa = 0$ і $E_2 = 5E$ (рис. 7а) абсолютний максимум знаходиться в центрі виїмки.

Висновки. Розглянуто плоску задачу про контактну взаємодію трьох пружних тіл. Між першим і другим тілом відбувається односторонній механічний контакт, а друге і третє тіло з'єднані між собою через тонкий прошарок вінклерівського типу. Здійснено слабке формулювання цієї задачі у вигляді варіаційної нерівності, яку за допомогою методу штрафу зведено до нелінійного варіаційного рівняння. Встановлено умови існування і єдиності розв'язку варіаційних задач та збіжності за параметром штрафу.

Для розв'язування нелінійного варіаційного рівняння, що відповідає вихідній задачі, запропоновано клас паралельних ітераційних методів декомпозиції області типу Робіна, які зводять розв'язування зв'язаної нелінійної контактної задачі для системи тіл до паралельного розв'язування на кожному ітераційному кроці незалежних лінійних варіаційних рівнянь в окремих тілах, що еквівалентні в слабкому розумінні лінійним задачам теорії пружності з крайовими умовами Робіна на зонах можливого контакту.

Розроблено методика числової реалізації запропонованих методів декомпозиції області на основі скінченноелементних апроксимацій на лінійних і квадратичних трикутних елементах, яку апробовано для дослідження контактної взаємодії пружних тіл за наявності кулонівського тертя, одне з яких має періодичний рельєф у вигляді виїмок, а інше містить покриття, що з'єднане з його основною частиною через вінклерівський прошарок. Урахування тертя здійснено за допомогою методу суперпозиції. Вивчено вплив коефіцієнта тертя та жорсткості покриття на дотичні та нормальні контактні напруження на інтерфейсі між покриттям і основою. Встановлено, що збільшення коефіцієнта тертя призводить до зміщення вправо графіків нормальних напружень та до зсуву вниз розподілів дотичних напружень. Також здійснено дослідження максимального головного напруження у покритті та основі. Виявлено, що максимум цього напруження досягається на верхній або на нижній грані покриття.

Ігор Прокопишин висловлює вдячність проф. Ростиславу Мартиняку за поштовх до написання цієї статті та участь в обговоренні отриманих результатів.

Література

- [1] Горячева И. Г., Мартыняк Р. М. Периодические контактные задачи с трением и изнашиванием поверхностей // Развитие идей Л. А. Галина в механике. — Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаот. динамика», 2012. — С. 314-344.
- [2] Мартыняк Р. М., Прокопишин И. А., Прокопишин И. И. Контакт пружных тел за наявності нелінійних вінклерівських поверхневих шарів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2013. — Т. 56, № 3. — С. 43-56.
- [3] Бабин А. П., Зернин М. В. Конечноэлементное моделирование контактного взаимодействия с использованием положений механики контактной псевдосреды // Изв. РАН. Механика твердого тела. — 2009. — № 4. — С. 84-107.
- [4] Блох М. В., Орбинский А. В. О модификации метода конечных элементов для решения двумерных упругих и пластических контактных задач // Проблемы прочности. — 1983. — № 5. — С. 24-27.
- [5] Зайцев В. И., Щавелин В. М. Метод решения контактных задач с учетом реальных свойств шероховатых поверхностей взаимодействующих тел // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1989. — № 1. — С. 88-94.
- [6] Задачи контактного взаимодействия элементов конструкций / А. Н. Подгорный, П. П. Гонтаровский, Б. Н. Куркач и др. — Киев: Наук. думка, 1989. — 232 с.
- [7] Прокопишин И. А., Хлебников Д. Г. Эквивалентные вариационные постановки односторонних контактных задач для упругих тел при наличии нелинейного поверхностного слоя // Эффективные численные методы решения краевых задач механики твердого деформируемого тела: Тез. докл. респ. н.-т. конф. — Харьков, ХИСИ, 1989. — С. 83-85.
- [8] Bresch D., Koko J. An optimization-based domain decomposition method for nonlinear wall laws in coupled systems // Math. Models Methods Appl. Sci. — 2004. — Vol. 14, No 7. — P. 1085-1101.
- [9] Domain decomposition methods for problems of unilateral contact between elastic bodies with nonlinear Winkler covers / I. I. Prokopyshyn, I. I. Dyyak, R. M. Martynyak, I. A. Prokopyshyn // Lect. Notes Comput. Sci. Eng. — 2014. — Vol. 98. — P. 739-748.
- [10] Прокопишин И. И. Методи декомпозиції області для задачі про статичну рівновагу системи пружних тіл, з'єднаних через тонкі нелінійні прошарки // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2015. — Вип. 21. — С. 173-185.
- [11] Avery P., Farhat C. The FETI family of domain decomposition methods for inequality-constrained quadratic programming: Application to contact problems with conforming and nonconforming interfaces // Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg. — 2009. — Vol. 198. — P. 1673-1683.
- [12] Dostál Z., Kozubek T., Vondrák V., Brzobohatý T., Markopoulos A. Scalable TFETI algorithm for the solution of multibody contact problems of elasticity // Int. J. Numer. Methods Eng. — 2010. — Vol. 41. — P. 675-696.
- [13] Haslinger J., Kučera R., Sassi T. A domain decomposition algorithm for contact problems: Analysis and implementation // Math. Model. Nat. Phenom. — 2009. — Vol. 4, No 1. — P. 123-146.
- [14] Прокопишин И. И. Схеми декомпозиції області на основі методу штрафу для задач контакту пружних тіл: дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фіз.-мат. наук: спеціальність 01.05.02 — «Мат. моделювання та обчисл. методи». — Львів, 2010. — 163 с.
- [15] Прокопишин И. И. Методи декомпозиції області для задач про односторонній контакт нелінійно пружних тіл // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2012. — Вип. 15. — С. 75-87.
- [16] Dyyak I. I., Prokopyshyn I. I., Prokopyshyn I. A. Penalty Robin-Robin domain decomposition methods for unilateral multibody contact problems of elasticity: Convergence results // arxiv.org. — 2012. — <http://arxiv.org/pdf/1208.6478v1.pdf>. — 32 p.
- [17] Penalty Robin-Robin domain decomposition schemes for contact problems of nonlinear elasticity / I. I. Prokopyshyn, I. I. Dyyak, R. M. Martynyak, I. A. Prokopyshyn // Lect. Notes Comput. Sci. Eng. — 2013. — Vol. 91. — P. 647-654.
- [18] Kikuchi N., Oden J. T. Contact Problem in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods. — Philadelphia: SIAM, 1988. — 489 p.
- [19] Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — Москва: Мир, 1972. — 588 с.

Ігор Прокопишин
Контактна взаємодія пружних тіл, одне з яких має покриття...

A contact interaction between elastic bodies, one of which has a cover, connected with the base through Winkler layer

Ihor Prokopyshyn

A contact between elastic bodies, one of which has a surface with periodical gaps and the other one has a cover, connected with the base through thin Winkler layer, is investigated by domain decomposition methods. A distribution of normal and tangential stresses on the interface between cover and base is studied and the maximal principal stress in the bodies is analysed.

Контактное взаимодействие упругих тел, одно из которых имеет покрытие, соединенное с основой через винклеровский слой

Игорь Прокопышин

Методами декомпозиции области исследован контакт упругих тел, одно из которых имеет периодический рельеф в виде выемок, а другое содержит упругое покрытие, соединенное с его основой через тонкий винклеровский слой. Изучено распределение нормальных и касательных напряжений на интерфейсе между покрытием и основой. Проанализировано максимальное главное напряжение в телах.

Представлено професором Я. Савулою

Отримано 04.02.16