

Обчислювальні аспекти різномасштабного методу скінченних елементів

Наталія Сподар¹, Ярема Савула²

¹ Львівський національний університет ім. І. Франка, вул. Університетська, 1, Львів, 79000

² д. ф.-м. н., професор, Львівський національний університет ім. І. Франка, вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: savula@franko.lviv.ua

Розглянуто етап знаходження базисних функцій різномасштабного методу скінченних елементів. Побудовано різномасштабні базисні функції за допомогою класичного методу скінченних елементів та аналітично. Проведено обчислювальні експерименти, які підтверджують точність знаходження різномасштабних базисних функцій на одному елементі.

Ключові слова: різномасштабний метод скінченних елементів, задача адвекції-дифузії, базисні функції.

Вступ. Різнномасштабний метод скінченних елементів є ефективним для розв'язування задач дифузії в неоднорідному середовищі [1, 2]. У роботі [3] показано, що цей метод також дає хороші результати при розв'язуванні задач адвекції-дифузії у випадку великих чисел Пекле та неоднорідного середовища, тоді як розв'язок класичним методом скінченних елементів у цьому випадку містить неприродні осциляції. Оскільки для реалізації головної ідеї різномасштабного методу, а саме для знаходження різномасштабних базисних функцій, використовують класичний метод скінченних елементів, то виникає запитання: чи достатньо точно обчислюється розв'язок задачі адвекції-дифузії на одному елементі при побудові різномасштабних базисних функцій. У даній роботі побудовано різномасштабну базисну функцію на одному елементі для різних чисел Пекле та проаналізовано точність знаходження цієї функції у порівнянні з аналітичним розв'язком.

1. Формулювання задачі

Розглянемо одновимірну крайову задачу стаціонарної адвекції-дифузії

$$-(k(x)u'(x))' + Pek(x)u'(x) = f(x), \quad x \in (a, b), \quad (1)$$

$$u(a) = u(b) = 0, \quad (2)$$

де $k(x)$ — функція, яка характеризує неоднорідності [2], $u(x)$ — шукана функція, Pe — число Пекле, $f \in L_2(a, b)$ — задана права частина.

2. Знаходження різномасштабних базисних функцій

Основна ідея різномасштабного методу скінченних елементів полягає у побудові спеціальних базисних функцій. Як описано в роботі [1], різномасштабні базисні функції φ_i визначають з умови

$$L\varphi_i = 0 \text{ в } K_j, \varphi_i = \varphi_i^0 \text{ на межі } K_j, \quad i = \overline{0, n}, \quad (3)$$

де $K_j = [x_{j-1}, x_j], j = \overline{1, n}$ — скінченні елементи, φ_i^0 — задані у вузлах розбиття кусково-лінійні базисні функції класичного методу скінченних елементів [4].

З рівняння (3) випливає, що різномасштабні базисні функції збігаються з кусково-лінійними базисними функціями МСЕ на межі кожного скінченного елемента K_j і зберігають різномасштабні особливості розв'язку всередині елемента $K_j, j = \overline{1, n}$.

Сформулюємо крайові задачі для знаходження різномасштабних базисних функцій на одному скінченному елементі, врахувавши вигляд оператора L :

$$\begin{cases} -(k(x)\varphi_i'(x))' + Pek(x)\varphi_i'(x) = 0, x \in [x_{i-1}, x_i], \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \varphi_i(x_{i-1}) = 0, \varphi_i(x_i) = 1; \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} -(k(x)\varphi_i'(x))' + Pek(x)\varphi_i'(x) = 0, x \in [x_i, x_{i+1}], \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \varphi_i(x_i) = 1, \varphi_i(x_{i+1}) = 0; \end{cases} \quad (7)$$

Оскільки крайові задачі (4), (5) та (6), (7) відрізняються тільки крайовими умовами, то знаходження розв'язків цих задач буде аналогічним. Тому надалі розглядатимемо задачу (4), (5).

Уведемо простір

$$V = \{v(x) : v(x) \in W_2^{(1)}, u(x_{i-1}) = 0, u(x_i) = 1\}.$$

Домножимо рівняння (4) на довільну функцію $v \in V$ і зінтегруємо на відрізок (x_{i-1}, x_i) . Отримаємо варіаційне формулювання задачі, яке полягає у такому. Знайти таку функцію $\varphi_i(x) \in V$, що задовольняє рівняння

$$(L\varphi_i, v) = 0, \forall v \in V, \quad i = \overline{1, n}, \quad (8)$$

$$\text{де } (L\varphi_i, v) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} k(x)\varphi_i'(x)(v'(x) + Pe v(x))dx, x \in (x_{i-1}, x_i).$$

Для знаходження різномасштабних базисних функцій на кожному скінченному елементі застосуємо класичний метод скінченних елементів із використанням кусково-лінійних базисних функцій [4].

Для того, щоб дослідити точність знаходження різномасштабних базисних функцій класичним методом скінченних елементів, знайдемо різномасштабні

базисні функції аналітично. Для цього будемо вважати, що коефіцієнт $k(x)$ має вигляд

$$k(x) = \frac{1}{4 + p \sin(2\pi x / \varepsilon)}, \quad (9)$$

де $p = const$ — відомий параметр, який контролює величину осциляції.

2.1. Класичний метод скінченних елементів. На кожному скінченному елементі $[x_{i-1}, x_i], i = \overline{1, n}$ введемо розбиття, що визначається точками

$$x_j = x_{i-1} + hj, j = \overline{0, m}, \quad (10)$$

де h — крок розбиття точками елемента $[x_{i-1}, x_i]$. Називатимемо це розбиття дрібною сіткою, а поділ на елементи $[x_{i-1}, x_i], i = \overline{1, n}$ — грубою сіткою. Будемо шукати розв'язок задачі (4), (5) у вигляді

$$\tilde{\varphi}_i(x) = \sum_{j=0}^m \varphi_{ij} \varphi_j^0(x), \quad (11)$$

де m — кількість скінченних елементів на елементі $[x_{i-1}, x_i], i = \overline{1, n}$.

Візьмемо у виразі (8) $v = \varphi_j^0 \in V, j = \overline{0, m}$. Отримаємо систему рівнянь

$$A \varphi_{ij} = 0, \quad (12)$$

де $A = (a_{jk})$ — матриця з елементами $a_{jk} = \sum_{r=1}^m \int_{K_r} L \varphi_j^0(x) \varphi_k^0(x) dx, j, k = \overline{0, m}$,

$i = \overline{0, n}, (\varphi_{ij})$ — стовпець невідомих значень функції φ_i у вузлах $x_j, j = \overline{0, m}$.

Врахувавши вигляд скалярного добутку $(L \varphi_i, v)$, отримаємо:

$$a_{jk} = \sum_{r=1}^m \int_{K_r} k(x) (\varphi_j^0(x))' ((\varphi_k^0(x))' + P e \varphi_k^0(x)) dx, j, k = \overline{0, m}.$$

Звідси, використавши властивості кусково-лінійних базисних функцій $\varphi_j^0(x)$ [4], запишемо ненульові елементи матриці A :

$$a_{j-1j} = -\frac{1}{h^2} \int_{x_{j-1}}^{x_j} k(x) (1 + P e (x - x_{j-1})) dx,$$

$$a_{jj} = \frac{1}{h^2} \int_{x_{j-1}}^{x_j} k(x)(1 + Pe(x - x_{j-1}))dx + \frac{1}{h^2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} k(x)(1 + Pe(x - x_{j+1}))dx,$$

$$a_{j+1j} = -\frac{1}{h^2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} k(x)(1 + Pe(x - x_{j+1}))dx.$$

Тепер, врахувавши крайові умови (5), можна знайти коефіцієнти φ_{ij} як розв'язок системи (12) та отримати шукану різномасштабну базисну функцію $\tilde{\varphi}_i(x)$ у вигляді (11).

Зауважимо, що для знаходження елементів матриці A потрібно обчислювати інтеграли, що ускладнює процес реалізації алгоритму. У зв'язку з цим для обчислення інтегралів використаємо формулу лівих прямокутників. Для цього на кожному скінченному елементі $K_r, r = \overline{1, m}$ використаємо розбиття (10).

У цьому випадку отримуємо

$$\int_{K_r} k(x)(1 + Pe(x - x_{r-1})) \approx h_1 \sum_{j=0}^{m_1} k(x_j)(1 + Pe(x_j - x_{r-1})), r = \overline{1, m}, m_1 \geq m.$$

2.2. Аналітичний метод. З роботи [3] відомо, що в одновимірному випадку вираз $k(x)\varphi'_i(x)$ на елементі $[x_{i-1}, x_i]$ має такий вигляд:

$$k(x)\varphi'_i(x) = \frac{e^{Pex}}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{e^{Pex} dx}{k(x)}}. \quad (13)$$

Врахувавши вигляд функції $k(x)$ (9) і застосувавши інтегрування частинами, отримуємо

$$\int \frac{e^{Pex} dx}{k(x)} = \int e^{Pex} \left(4 + p \sin(2\pi x/\varepsilon) \right) dx =$$

$$\frac{4}{Pe} e^{Pex} + \frac{p}{Pe} \left(e^{Pex} \sin(2\pi x/\varepsilon) - \frac{2\pi}{\varepsilon} \int e^{Pex} \cos(2\pi x/\varepsilon) dx \right) =$$

$$\frac{1}{Pe} \left(4e^{Pex} + p \left(e^{Pex} \sin(2\pi x/\varepsilon) - \frac{2\pi}{Pe\varepsilon} e^{Pex} \cos(2\pi x/\varepsilon) - \frac{4\pi^2}{Pe\varepsilon^2} \int e^{Pex} \sin(2\pi x/\varepsilon) dx \right) \right).$$

Введемо таку заміну

$$\int e^{Pex} \sin(2\pi x/\varepsilon) dx = I.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \mathbb{I} \left(Pe + \frac{4\pi^2}{Pe\varepsilon^2} \right) &= e^{Pex} \sin(2\pi x/\varepsilon) - \frac{2\pi}{Pe\varepsilon} e^{Pex} \cos(2\pi x/\varepsilon), \\ \int \frac{e^{Pex} dx}{k(x)} &= \frac{e^{Pex}}{Pe} \left(4 + \frac{p}{1 + \frac{4\pi^2}{Pe^2\varepsilon^2}} \left(\sin(2\pi x/\varepsilon) - \frac{2\pi}{Pe\varepsilon} \cos(2\pi x/\varepsilon) \right) \right) = \Psi(x). \end{aligned} \quad (14)$$

Зі співвідношення (13) отримаємо

$$\varphi_i(x) = \frac{1}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{e^{Pex} dx}{k(x)}} \int \frac{e^{Pex}}{k(x)} + C = \frac{1}{\Psi|_{x_{i-1}}^{x_i}} \Psi(x) + C.$$

Використавши одну з крайових умов (5), знаходимо константу C :

$$C = -\frac{1}{\Psi|_{x_{i-1}}^{x_i}} \Psi(x_{i-1})$$

або

$$C = 1 - \frac{1}{\Psi|_{x_{i-1}}^{x_i}} \Psi(x_i).$$

Отже, аналітичний розв'язок задачі (4), (5) має вигляд

$$\varphi_i(x) = \frac{1}{\Psi|_{x_{i-1}}^{x_i}} (\Psi(x) - \Psi(x_{i-1})),$$

де функція $\Psi(x)$ визначена рівнянням (14).

3. Результати обчислювальних експериментів

Розглянемо різномасштабні базисні функції, знайдені за допомогою класичного методу скінченних елементів та аналітично. Для експериментів виберемо такі значення параметрів: $p = 1,8$, $\varepsilon = 0,005$ і відрізок $[a, b] = [0, 1]$. Проведемо дослідження для випадків, якщо число Пекле дорівнює 10, 100 і 1000. Також вважаємо, що відрізок $[a, b]$ поділено на 32 скінченні елементи, і для аналізу та порівняння результатів різномасштабну базисну функцію шукатимемо на першому скінченному елементі, тобто на відрізку $[0; 0,0313]$.

На рис. 1-8 наведено графічну ілюстрацію різномасштабних базисних функцій, знайдених за допомогою класичного методу скінченних елементів та аналітично. З рисунків бачимо, що у разі згущення дрібної сітки розв'язок МСЕ

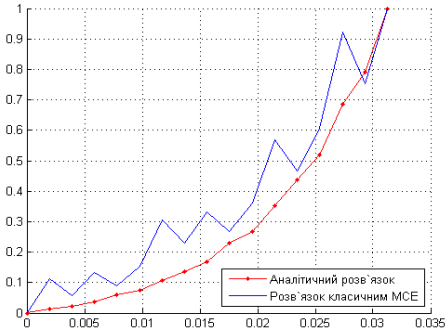


Рис. 1. Графічна ілюстрація аналітичного розв'язку та розв'язку класичним МСЕ для $Pe = 100, m = 16$

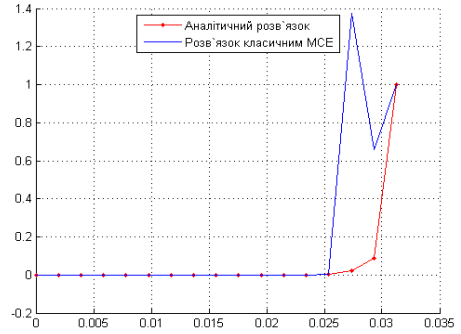


Рис. 2. Графічна ілюстрація аналітичного розв'язку та розв'язку класичним МСЕ для $Pe = 1000, m = 16$

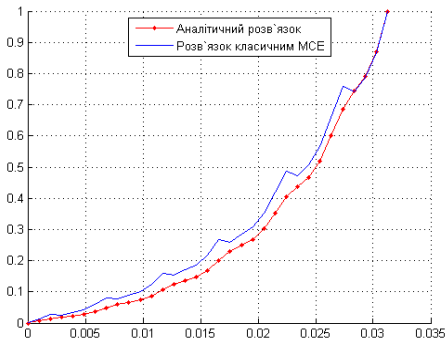


Рис. 3. Графічна ілюстрація аналітичного розв'язку та розв'язку класичним МСЕ для $Pe = 100, m = 32$

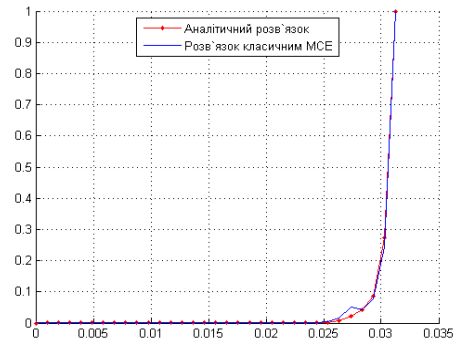


Рис. 4. Графічна ілюстрація аналітичного розв'язку та розв'язку класичним МСЕ для $Pe = 1000, m = 32$

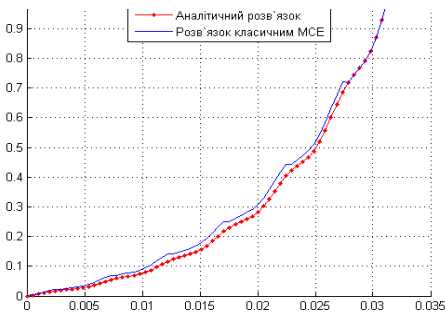


Рис. 5. Графічна ілюстрація аналітичного розв'язку та розв'язку класичним МСЕ для $Pe = 100, m = 64$

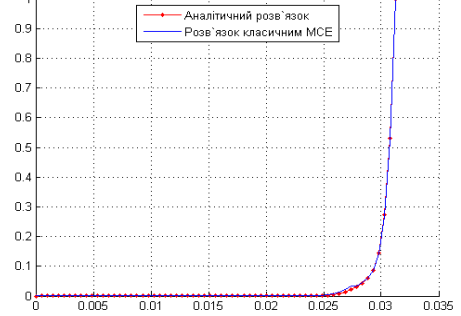


Рис. 6. Графічна ілюстрація аналітичного розв'язку та розв'язку класичним МСЕ для $Pe = 1000, m = 64$

збігається до аналітичного розв'язку, тобто різномасштабні базисні функції обчислюються методом скінченних елементів досить точно.

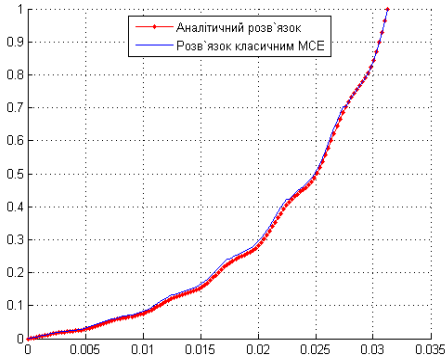


Рис. 7. Графічна ілюстрація аналітичного розв'язку та розв'язку класичним МСЕ для $Pe = 100, m = 128$

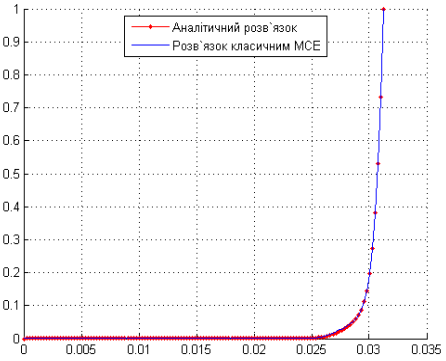


Рис. 8. Графічна ілюстрація аналітичного розв'язку та розв'язку класичним МСЕ для $Pe = 1000, m = 128$

У табл. 1-3 наведено похибки розв'язку класичним методом скінченних елементів у разі згущення дрібної сітки для різних чисел Пекле. Тут m — кількість елементів дрібної сітки, h — крок розбиття дрібної сітки.

Таблиця 1

Похибки розв'язку МСЕ для $Pe = 10$

№	m	h	h/ε	Абсолютна похибка (max)	Абсолютна похибка (L^2)	Відносна похибка (max), %	Відносна похибка (L^2), %
		0.0020	0.3906	0.1343	0.0757	13.4261	13.3280
2	32	9.7656e-04	0.1953	0.0334	0.0159	1	16
3	64	4.8828e-04	0.0977	0.0133	0.0061	1.3313	1.0848
4	128	2.4414e-04	0.0488	0.0060	0.0028	0.5969	0.4924
5	256	1.2207e-04	0.0244	0.0029	0.0013	0.2861	0.2322
6	512	6.1035e-05	0.0122	0.0014	0.0006	0.1418	0.1146
7	1024	3.0518e-05	0.0061	0.0007	0.0003	0.0704	0.0565
8	2048	1.5259e-05	0.0031	0.0004	0.0002	0.0356	0.0284

Таблиця 2

Похибки розв'язку МСЕ для $Pe = 100$

№	m	h	h/ε	Абсолютна похибка (max)	Абсолютна похибка (L^2)	Відносна похибка (max), %	Відносна похибка (L^2), %
1	16	0.0020	0.3906	0.2358	0.1152	23.5839	28.0209
2	32	9.7656e-04	0.1953	0.0825	0.0389	8.2507	9.8331
3	64	4.8828e-04	0.0977	0.0407	0.0198	4.0671	5.0964
4	128	2.4414e-04	0.0488	0.0201	0.0097	2.0148	2.5117
5	256	1.2207e-04	0.0244	0.0098	0.0047	0.9764	1.2161
6	512	6.1035e-05	0.0122	0.0048	0.0023	0.4823	0.5981
7	1024	3.0518e-05	0.0061	0.0024	0.0011	0.2400	0.2986
8	2048	1.5259e-05	0.0031	0.0012	0.0006	0.1199	0.1493

Похибки розв'язку МСЕ для $Pe = 1000$

№	m	h	h/ε	Абсолютна похибка (max)	Абсолютна похибка (L^2)	Відносна похибка (max), %	Відносна похибка (L^2), %
1	16	0.0020	0.3906	1.3535	0.3563	135.3466	146.3229
2	32	9.7656e-04	0.1953	0.0300	0.0077	3.0047	4.2563
3	64	4.8828e-04	0.0977	0.0129	0.0023	1.2882	1.5463
4	128	2.4414e-04	0.0488	0.0060	0.0009	0.5973	0.6715
5	256	1.2207e-04	0.0244	0.0032	0.0005	0.3190	0.3922
6	512	6.1035e-05	0.0122	0.0016	0.0002	0.1565	0.2042
7	1024	3.0518e-05	0.0061	0.0008	0.0001	0.0794	0.1085
8	2048	1.5259e-05	0.0031	0.0004	0.0001	0.0395	0.0551

Варто зауважити, що збіжність класичного та різномасштабного методів скінченних елементів залежить від співвідношення між величинами h і ε [2]. У випадку $h < \varepsilon$ класичний і різномасштабний методи скінченних елементів збігаються та дають непогані результати. У випадку $h > \varepsilon$ класичний метод скінченних елементів є розбіжний, а різномасштабний метод, навпаки, дає хороші результати. Тому, оскільки ми знаходимо різномасштабні базисні функції класичним МСЕ, то дрібну сітку слід вибирати так, щоб її крок був меншим за параметр ε . У цьому випадку зможемо знайти різномасштабні базисні функції достатньо точно. З іншого боку, на грубій сітці шукаємо розв'язок задачі (1), (2) різномасштабним методом скінченних елементів, тому крок її розбиття можна брати більшим за параметр ε .

Отже, при знаходженні різномасштабної базисної функції на одному скінченному елементі розв'язок, отриманий класичним методом скінченних елементів із використанням кусково-лінійних базисних функцій збігається до аналітичного розв'язку у разі збільшення кількості вузлів на дрібній сітці за умови $h < \varepsilon$.

Висновок. Для одного класу одновимірних задач адвекції-дифузії у неоднорідному середовищі побудовано різномасштабні базисні функції з компактним носієм. Здійснено низку обчислювальних експериментів для різної кількості вузлів розбиття та різних чисел Пекле. Показано, що різномасштабні базисні функції, знайдені класичним методом скінченних елементів, обчислюються досить точно та збігаються до аналітичного розв'язку.

Література

- [1] *Efendiev Y., Hou T.* Multiscale finite element methods. Theory and application. — NY : Springer, 2009. — P. 234. — (Surveys and Tutorials in the Applied Mathematical Sciences; vol. 4).
- [2] *Hou T. Y., Wu X.-H., Cai Z.* Convergence of a multiscale finite element method for elliptic problems with rapidly oscillating coefficients // *Mathematics of Computation.* — 1999. — Vol. 68, No 227. — P. 913-943.

- [3] *Сподар Н., Савула Я.* Застосування різномасштабного методу скінченних елементів до розв'язування одновимірної задачі адвекції-дифузії // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2014. — Вип. 19. — С. 190-197.
- [4] *Савула Я. Г.* Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами. — Львів: видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2004. — 221 с.

Computational aspects of multiscale finite element method

Nataliia Spodar, Yarema Savula

The stage of finding the basis functions of multiscale finite element method is considered. Multiscale basis functions are constructed using classical finite element method and analytically. Numerical experiments that confirm the accuracy of multiscale basis functions on one element are carried out.

Вычислительные аспекты разномасштабного метода конечных элементов

Наталия Сподар, Ярема Савула

Рассмотрено этап нахождения базисных функций разномасштабного метода конечных элементов. Построено разномасштабные базисные функции с помощью классического метода конечных элементов и аналитически. Выполнены вычислительные эксперименты, подтверждающие точность нахождения разномасштабных базисных функций на одном элементе.

Отримано 14.04.16