

Розв'язування першої та другої крайових задач теорії пружності про усталені коливання півпростору з еліптичною тріщиною методом граничних інтегральних рівнянь

Володимир Станкевич

К. ф.-м. н., доцент, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 36, Львів, e-mail: stan_olena@yahoo.com

Розглянуто тривимірну динамічну задачу про пружний півпростір із плоскою еліптичною тріщиною. Поверхні тріщини зазнають дії усталених у часі розривних зусиль. Розглянуто випадки вільної та зацмленої поверхонь півпростору. Для розв'язання задачі використано метод граничних інтегральних рівнянь (ГІР). Із застосуванням потенціалів Гельмгольца задачу зведено до одного ГІР щодо невідомої функції розкриття тріщини. За допомогою розв'язків задачі отримані залежності динамічних коефіцієнтів інтенсивності напружень у різних точках контура дефекту від частоти прикладеного навантаження, ексцентриситету еліпса, глибини залягання тріщини та типу крайових умов на поверхні півпростору.

Ключові слова: пружний півпростір, еліптична тріщина, усталені коливання, метод граничних інтегральних рівнянь, динамічний коефіцієнт інтенсивності напружень.

Вступ. Дослідження напружено-деформівного стану пружних тіл з тонкостінними дефектами типу тріщин під дією динамічних навантажень стосується значна кількість наукових робіт. Показано, що нестационарний характер навантажень породжує інерційні ефекти, які суттєво впливають на перерозподіл параметрів хвильового поля у тілі та призводять до перевищення динамічними коефіцієнтами інтенсивності напружень (ДКІН) поблизу вершин дефектів своїх статичних аналогів, тим самим зменшуючи міцність тіла. При цьому більшість результатів отримано для випадку плоских та осесиметричних задач [1-5]. Окремий інтерес представляє випадок, коли тіло обмежене зовнішньою поверхнею (півпростір, шар) [5-7] або містить інтерфейсну поверхню розділу різних матеріалів (шаруваті структури, функціонально-градієнтні матеріали тощо) [1, 2]. Показано, що за певних крайових умов на вказаних поверхнях можуть виникати різні типи поверхневих хвиль. Останні суттєво ускладнюють хвильову структуру поля у тілі, зокрема можуть призводити до зростання ДКІН для дефектів, близько розташованих до поверхонь. Також на параметри хвильового поля може впливати кривизна контура тріщини. У роботах [8-12] розглядали дію ударних та усталених у часі навантажень на тіло з еліптичною, квадратною та у формі мушлі Паскаля

тріщин. Показано, що динамічні КІН у певних точках контура дефектів перевищують свої аналоги для випадку дискової тріщини.

Ефективним засобом дослідження тривимірних динамічних задач теорії пружності для тіл із дефектами структури є метод ГІР [4, 6-8, 10, 12]. Нижче цей метод застосовано для вивчення напружено-деформівного стану пружного півпростору з еліптичною тріщиною за різних типів крайових умов на поверхні тіла та дії усталених у часі навантажень.

1. Формулювання задачі

Нехай пружний ізотропний півпростір займає область $x_{30} \leq 0$ і містить плоску еліптичну тріщину з півосьми a, b , яка залягає на глибині d перпендикулярно до його поверхні S_0 . Більша піввісь b паралельна до S_0 , а протилежні поверхні S_1^\pm дефекту зазнають дії усталених у часі t з частотою ω розривних зусиль $N_3^+(\mathbf{x}, t) = -N_3^-(\mathbf{x}, t) = -N(\mathbf{x}) \exp(i\omega t)$. Поверхня півпростору може бути защемлена (крайова умова I) або вільна від навантаження (крайова умова II). Схему задачі показано на рис. 1. Для вказаного способу навантаження всі параметри хвильового поля у тілі змінюються в часі за гармонійним законом з частотою ω .

Задача визначення напружено-деформівного стану у тілі зводиться до розв'язання диференціального рівняння рівноваги

$$\omega_2^{-2} \Delta_3 \bar{\mathbf{u}} + (\omega_1^{-2} - \omega_2^{-2}) \text{grad div } \bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (1)$$

з крайовими умовами

$$\sigma_{33}(\mathbf{x}) = N(\mathbf{x}), \quad \sigma_{j3}(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in S_1; \quad (2)$$

$$u_j(\mathbf{x}) = 0 \text{ (задача I) або } \sigma_{j3}(\mathbf{x}) = 0, \quad j = \overline{1, 3}, \quad \mathbf{x} \in S_0 \text{ (задача II).} \quad (3)$$

Тут u_j, σ_{ij}, N — відповідно амплітудні значення компонент вектора переміщень, тензора напружень і прикладених зусиль; Δ_3 — тривимірний Лапласів оператор; $\omega_j = \omega/c_j, j = 1, 2$; c_1 і c_2 — швидкості поширення в тілі відповідно поздовжньої та поперечної пружних хвиль.

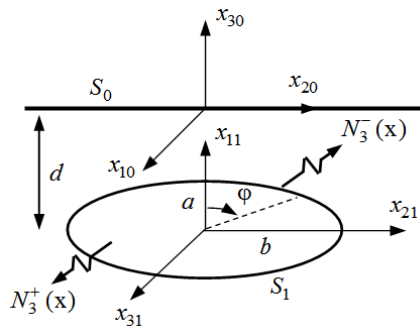


Рис. 1. Розрахункова схема задачі

За вказаного розташування та навантаження відбувається розкриття тріщини, а відповідні точки її протилежних поверхонь отримують переміщення $\Delta u_{31}(\mathbf{x}, \omega) = [u_{31}^+(\mathbf{x}, \omega) - u_{31}^-(\mathbf{x}, \omega)]/4\pi$. Тотальне поле переміщень у тілі породжене переміщеннями \mathbf{u}_0 від коливань поверхні S_0 і переміщень \mathbf{u}_1 від розкриття тріщини, тобто $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \omega) + \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, \omega)$.

2. Метод граничних інтегральних рівнянь розв'язування задачі

Для розв'язування задачі (1)-(3) використано метод ГІР. Компоненти векторів переміщень $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$, $\mathbf{u}_1(\mathbf{x})$ вибираємо у вигляді [6]

$$u_{jn} = \frac{\partial H_{jn}^2}{\partial x_{3n}} + \frac{\partial (H_{3n}^1 - 2H_{3n}^2)}{\partial x_{jn}} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial H_{kn}^2}{\partial x_{kn}} \delta_{j3} + \frac{2}{\omega_2^2} \frac{\partial}{\partial x_{jn}} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x_{1n}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_{2n}^2} \right) \times \right. \\ \left. \times (H_{3n}^1 - H_{3n}^2) - \frac{\partial W_n}{\partial x_{3n}} \right], \quad j = \overline{1,3}, \quad W_n = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial (H_{in}^1 - H_{in}^2)}{\partial x_{in}}, \quad n = 0,1, \quad (4)$$

де H_{jn}^k — Гельмгольцеві потенціали у формі

$$H_{jn}^k(\mathbf{x}_n) = \iint_{S_n} \Delta u_{jn}(\xi) \frac{\exp(i\omega_k |\mathbf{x}_n - \xi|)}{|\mathbf{x}_n - \xi|} dS_\xi, \quad k = 1,2, \quad \Delta u_{11}(\mathbf{x}) = \Delta u_{21}(\mathbf{x}) = 0.$$

Тут $|\mathbf{x}_n - \xi|$ — відстань між точкою $\mathbf{x}_n(x_{1n}, x_{2n}, x_{3n})$ тіла та точкою $\xi(\xi_1, \xi_2, 0)$ області S_n інтегрування; $i = \sqrt{-1}$ — уявна одиниця. Невідомі густини Δu_{j0} , $j = \overline{1,3}$ характеризують переміщення точок поверхні півпростору. Подання (4) для переміщень автоматично задовольняє умовам випромінювання Зоммерфельда на безмежності.

Задачу розв'язано у два етапи. На першому задовольняли крайові умови (3) на поверхні S_0 півпростору. Отримали систему 3-их двовимірних ГІР. Використавши до них двовимірне інтегральне перетворення Фур'є за змінними x_{10}, x_{20} , отримали подання невідомих густин Δu_{j0} , $j = \overline{1,3}$ через функцію стрибка Δu_{31} . На другому етапі використали вказане подання під час задоволення крайових умов (2). У результаті задачу визначення напружено-деформівного стану тіла з тріщиною зведено до одного двовимірного ГІР щодо невідомого розкриття Δu_{31} [6, 7]

$$\iint_{S_1} \frac{\Delta u_{31}(\xi)}{|\mathbf{x}_1 - \xi|^5} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} K_j(|\mathbf{x}_1 - \xi|) \exp(i\omega_j |\mathbf{x}_1 - \xi|) dS_\xi - \\ - 2 \iint_{S_1} \Delta u_{31}(\xi) \int_0^\infty \frac{\tau R_2(\tau)}{R^m(\tau)} \mathbf{\Omega}^m(\mathbf{x}_1, \xi, \tau, \omega) d\tau dS_\xi = \frac{\omega_2^2}{4G} N(\mathbf{x}_1), \quad \mathbf{x}_1 \in S_1, \quad m = I, II. \quad (5)$$

Тут $|\mathbf{x}_1 - \xi| = \sqrt{(x_{11} - \xi_1)^2 + (x_{21} - \xi_2)^2}$; структуру ядер Ω^I, Ω^{II} виписано у працях [6, 7];

$$K_j(z) = 9 - 9i\omega_j z - (5\omega_2^2 - \omega_j^2)z^2 + i\omega_j(2\omega_j^2 - \omega_2^2)z^3 + \frac{\delta_{1j}(2\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 z^4}{4};$$

$R^I(\tau) = R_3^2(\tau) - \tau^2 R_1(\tau) R_2(\tau)$ — функція Релея; $R^{II}(\tau) = \tau^2 - R_1(\tau) R_2(\tau)$; $R_3(\tau) = \tau^2 - \omega_2^2/2$, $R_j(\tau) = \sqrt{\tau^2 - \omega_j^2}$, $j=1,2$; G, μ — відповідно модуль зсуву та Пуассонів коефіцієнт матеріалу тіла.

Наявність півбезмежного інтеграла у рівнянні (5) зумовлена задоволенням крайових умов на безмежній поверхні S_0 півпростору. Особливістю отриманого рівняння є інтегрування лише по скінченній області S_1 тріщини, що суттєво під час числових розрахунків.

Особливості ГІР (5) містяться у першому доданку. Розвинувши в ряд за малих ω_1, ω_2 вираз $\sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} K_j(|\mathbf{x}_1 - \xi|) \exp(i\omega_j |\mathbf{x}_1 - \xi|) |\mathbf{x}_1 - \xi|^{-5}$, отримаємо його подання

$$\sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} K_j(|\mathbf{x}_1 - \xi|) \exp(i\omega_j |\mathbf{x}_1 - \xi|) |\mathbf{x}_1 - \xi|^{-5} = \frac{1}{|\mathbf{x}_1 - \xi|^3} + \frac{A\omega_2^2}{|\mathbf{x}_1 - \xi|} + F(\mathbf{x}_1, \xi, \omega).$$

Значення постійної A та функції $F(\mathbf{x}_1, \xi, \omega)$ виписані у роботі [6]. Видно, що ГІР (5) належить до гіперсингулярних рівнянь.

За допомогою афінного відображення $x_{11} = a y_1$, $x_{21} = b y_2$ еліптичну область S_1 тріщини відображаємо на кругову S одиничного радіуса. Невідому функцію розкриття тріщини подамо у вигляді

$$\Delta u_{31}(y) = \sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2} \alpha(y, \omega), \quad y \in S, \quad (6)$$

де $\alpha(y, \omega)$ — невідома, двічі неперервно-диференційовна в S функція. Поданням (6) автоматично задовольняються умови неперервності переміщень у разі переходу через контур тріщини. Подальшу методика регуляризації ГІР (5) описано у праці [10].

3. Числовий аналіз результатів

У процесі числових розрахунків кругову область S у полярній системі координат $Or\phi$ покривали чотирикутними граничними елементами, в межах кожного з яких дискретні значення $\alpha(y, \omega)$ приймали постійними. ГІР (5) зводили до розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь стосовно значень $\alpha(y, \omega)$. Для дискретизації області S вибирали 11 точок розбиття за радіальною координатою r і

24 точки за кутовою координатою φ . Півбезмежний інтервал $[0, \infty)$ інтегрування розбивали на 3 інтервали $[0, \omega_1]$, $[\omega_1, \omega_2]$, $[\omega_2, \infty)$ із відповідним умовам Зоммерфельда вибором гілок радикалів $R_j(\tau) = \sqrt{\tau^2 - \omega_j^2}$, $j = 1, 2$. Для випадку вільної поверхні S_0 півпростору на проміжку $[\omega_2, \infty)$ додатково проводили регуляризацію [6], оскільки функція Релея $R^I(\tau)$ на вказаному проміжку містить дійсний корінь.

За допомогою дискретних значень функції $\alpha(y, \omega)$ у точках контура тріщини визначали амплітудні значення динамічного коефіцієнту інтенсивності напружень (ДКІН) відриву [10]

$$K_I(\varphi, \omega) = \frac{2G}{1-\mu} \left(\frac{\pi}{a}\right)^{3/2} e \left(\frac{\operatorname{tg}^2 \varphi + e^4}{\operatorname{tg}^2 \varphi + e^2}\right)^{1/4} \alpha(y, \omega),$$

де $e = a/b$ — ексцентриситет еліпса; $y_1 = \left(\frac{e^2}{e^2 + \operatorname{tg}^2 \varphi}\right)^{1/2}$, $y_2 = \left(\frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{e^2 + \operatorname{tg}^2 \varphi}\right)^{1/2}$; φ — кутова координата точки контура тріщини.

На рис. 2 показані частотні залежності нормованих ДКІН $\tilde{K}_I = K_I/K_I^{st}$

$$(K_I^{st} = \frac{N\sqrt{\pi a}}{E(q)e^2} \left(\frac{\operatorname{tg}^2 \varphi + e^4}{\operatorname{tg}^2 \varphi + e^2}\right)^{1/4} — статичний КІН відриву для еліптичної тріщини$$

у безмежному тілі під навантаженням N ; $q = 1 - e^2$; $E(q)$ — еліптичний інтеграл другого роду). Результати отримані для значень Пуассонового коефіцієнта $\mu = 0,3$ і глибини $d = 1,1b$ залягання тріщини. Суцільні криві відповідають вільній, штрихові — защемленій поверхні півпростору.

Видно, що зі зростанням приведеної частоти $\omega_2 b$ ДКІН \tilde{K}_I зростають від своїх статичних значень за $\omega_2 b = 0$ до абсолютних максимумів, а опісля спадають. Надалі поведінка кривих приймає осцилюючий характер. За фіксованого значення ексцентриситету $e = 0,6$ (рис. 2 а) в області низьких частот \tilde{K}_I досягає максимуму в найближчій до поверхні півпростору точки контура тріщини ($\varphi = 0^\circ$) для випадку вільної поверхні S_0 , а в найвіддаленішій до S_0 точці ($\varphi = 180^\circ$) — у випадку защемленої поверхні (аналогічне явище зауважене для випадку кругової тріщини у півпросторі [6, 7]). При цьому ДКІН для вільної поверхні тіла більші за свої аналоги для випадку защемленої поверхні. В області вищих частот спостерігається протилежна картина. Зростання ексцентриситету e еліпса (рис. 2 б) призводить до зростання \tilde{K}_I та приведеної частоти, за якої ДКІН сягають своїх абсолютних максимумів.

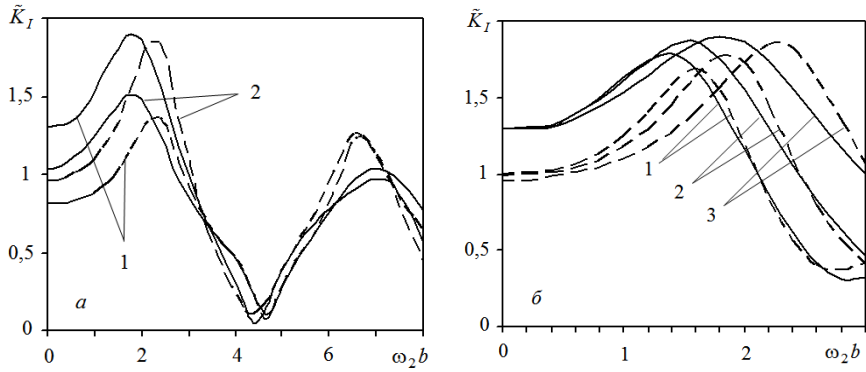


Рис. 2. Частотні залежності нормованих ДКІН для різних точок контура тріщини та різних ексцентриситетів еліпса. Суцільні та штрихові лінії відповідають вільній і защемленій поверхням півпростору. $\mu = 0,3$, $d = 1,1b$; *a* — $e = 0,6$; 1 — $\varphi = 0^\circ$, 2 — $\varphi = 180^\circ$; *б* — $\varphi = 0^\circ$, 1 — $e = 0,6$; 2 — $e = 0,8$; 3 — $e = 1,0$

На рис. 3 показані залежності абсолютних максимумів нормованих ДКІН \tilde{K}_I^{\max} в розглядуваному спектрі частот у різних точках контура тріщини від глибини d залягання тріщини.

Видно, що у точках $\varphi = 0^\circ$ із вільною поверхнею півпростору та $\varphi = 180^\circ$ із защемленою поверхнею зі зростанням значення d ДКІН \tilde{K}_I^{\max} спочатку спадають, а потім зростають, прямуючи до своїх аналогів у безмежному тілі. Протилежна картина спостерігається для точок $\varphi = 180^\circ$ (вільна поверхня S_0) та $\varphi = 0^\circ$ (защемлена поверхня).

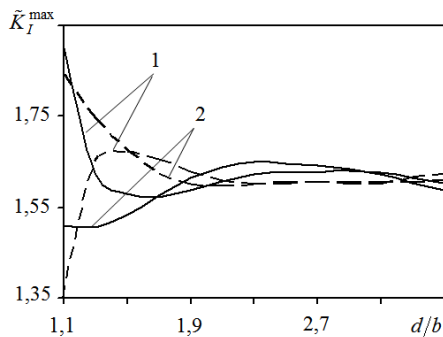


Рис. 3. Залежність абсолютних максимумів нормованих ДКІН у різних точках контура тріщини від глибини її залягання. Суцільні та штрихові лінії відповідають вільній і защемленій поверхням півпростору. $\mu = 0,3$; $e = 0,6$; 1 — $\varphi = 0^\circ$, 2 — $\varphi = 180^\circ$

Висновки. Запропоновано підхід для дослідження напружено-деформівного стану пружного півпростору з плоскою еліптичною тріщиною, протилежні поверхні якої зазнають дії усталених у часі коливань. Розглянуто випадки вільної і защемленої поверхонь півпростору. Підхід ґрунтується на використанні методу граничних інтегральних рівнянь. Задача зведена до розв'язання одного ГР щодо невідомої функції розкриття тріщини.

З'ясовано, що за неглибокого залягання тріщини наявність зовнішньої поверхні тіла призводить до зростання ДКІН порівняно з їх аналогами у безмежному тілі. У діапазоні малих частот коливань імовірно підростання тріщини відбувається вглиб тіла у випадку защемленої поверхні півпростору та в напрямку зовнішньої поверхні, якщо остання — вільна. Зростання ексцентриситету еліпса призводить до зростання абсолютних максимумів ДКІН і частот, за яких вони досягаються. Зі зростанням глибини залягання тріщини ДКІН прямують до своїх аналогів у безмежному тілі. Для $d > 3,5b$ впливом поверхні півпростору можна знехтувати.

Література

- [1] *Luong W. C., Keer L. M., Achenbach J. D.* Elastodynamic stress intensity factors of a crack near an interface // *Int. J. Solids Structures.* — 1975. — Vol. 11. — P. 919-925.
- [2] *Bai X.-M., Guo L.-C., Wang Z.-H., Zhong S.-Y.* A dynamic piecewise-exponential model for transient crack problems of functionally graded materials with arbitrary mechanical properties // *Theoretical and Appl. Fract. Mech.* — 2013. — Vol. 66. — P. 41-51.
- [3] *Itou S.* Effect of couple-stresses on the Mode I dynamic stress intensity factors for two equal collinear cracks in an infinite elastic medium during passage of time-harmonic stress waves // *Int. J. of Solids and Struct.* — 2013. — Vol. 50. — P. 1597-1604.
- [4] *Zozulya V. V.* Comparative study of time and frequency domain BEM approaches in frictional contact problem for antiplane crack under harmonic loading // *Eng. Analysis with Boundary Elements.* — 2013. — Vol. 37. — P. 1499-1513.
- [5] *Zhao W., Hu Z., Zhang X., Xie H., Yu L.* The dynamic stress intensity factor around the anti-plane crack in an infinite strip functionally graded material under impact loading // *Theoretical and Appl. Fract. Mech.* — 2014. — Vol. 74. — P. 1-6.
- [6] *Zhang Ch., Mykhas'kiv V. V., Stankevich V. Z.* Time-harmonic analysis of a planar crack in an elastic half-space by BEM // *Third MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics.* — 2005. — P. 557-560.
- [7] *Stankevich V. Z., Stasyuk B. M., Khai O. M.* Dynamic analysis of interacting coplanar cracks in a half space with a clamped boundary condition using boundary integral equations // *Journal of Appl. Mech. and Tech. Phys.* — 2005. — Vol. 46, No 1. — P. 124-128.
- [8] *Guz A. N., Zozulia V. V., Men'shikov A. V.* General spatial dynamic problem for an elliptic crack under the action of a normal shear wave, with consideration for the contact interaction of the crack faces // *Int. Appl. Mech.* — 2004. — Vol. 40, No 2. — P. 156-159.
- [9] *Itou S.* 3D dynamic stress intensity factors around two parallel square cracks in an infinite elastic medium under impact load // *Archive of Appl. Mech.* — 2001. — Vol. 71. — P. 53-62.
- [10] *Sladek J., Sladek V., Mykhas'kiv V. V., Stankevych V. Z.* Application of mapping theory to boundary integral formulation of 3D dynamic crack problems // *Eng. Analysis with Boundary Elements.* — 2003. — Vol. 27. — P. 203-213.
- [11] *Wen P. H., Aliabadi M. H., Rooke D. P.* The influence of elastic waves on dynamic stress intensity factors (three-dimensional problems) // *Archive of Appl. Mech.* — 1996. — Vol. 66. — P. 385-394.
- [12] *Zhang Ch., Gross D.* On wave propagation in elastic Solids with cracks. — Southampton, UK: Computational Mechanics Publications. — 1998. — 267 p.

On solution of the first and second boundary problems dynamic elasticity theory of steady oscillations of half-space with elliptical cracks by biem

Volodymyr Stankevych

The three-dimensional dynamic problem of elastic half-space with a plane elliptical crack is considered. The cracks surface are under time-stationary discontinuous loads. Cases of free and clamped half-space surfaces is considered. The problem is solved by boundary integral equations (BIE) method. Using the Helmholtz potential, the problem is reduced to one BIE relatively unknown crack opening function. With the solutions of the problem are obtained depending on the dynamic stress intensity factors at different points of the contour of the defect on the frequency of the applied load, the eccentricity of the ellipse, the depth of the cracks and the type of boundary conditions on the half-space surface.

Решение первой и второй граничных задач динамической теории упругости об установившихся колебаниях полупространства с эллиптической трещиной методом граничных интегральных уравнений

Владимир Станкевич

Рассмотрена трехмерная динамическая задача об упругом полупространстве с плоской эллиптической трещиной. Поверхности трещины подвержены воздействию установившихся во времени разрывных усилий. Рассмотрены случаи свободной и зацементированной поверхностей полупространства. Для решения задачи использован метод граничных интегральных уравнений (ГИУ). Используя потенциалы Гельмгольца, задача сведена к одному ГИУ относительно неизвестной функции раскрытия трещины. С помощью решений задачи получены зависимости динамических коэффициентов интенсивности напряжений в разных точках контура дефекта от частоты приложенной нагрузки, эксцентриситета эллипса, глубины залегания трещины и типа граничных условий на поверхности полупространства.

Представлено професором Р. Мусієм

Отримано 11.04.16