

Дослідження впливу тиску на наявність газу у воді в пластах підземних сховищ газу

Петро Вавричук

Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: petro.vavrychuk@gmail.com

Запропоновано підхід до оцінки кількості дифундованого газу у воді, яка є наявною майже в усіх пластах підземних сховищ. Досліджено вплив коефіцієнта дифузії, тиску на границі газ – вода та тиску на нижній границі води на кількість дифундованого газу. Отримані теоретичні результати апробовано на модельній задачі в ході обчислювального експерименту.

Ключові слова: коефіцієнт концентрації, фільтрація, розподіл тиску, диференціальні рівняння, обчислювальний експеримент.

Вступ. Під час моделювання процесів фільтрації газу в пластах підземних сховищ необхідно враховувати багато факторів, зокрема, наявність води, яка має значний вплив на рух газу за різних значень тиску. Особливо цей фактор слід враховувати у разі зниження середнього тиску газу в пласті. Зауважимо, що оскільки тиски в пластах є достатньо високими, то частина газу дифундує у воду та розчиняється у ній. Оскільки геометричні розміри пластів є достатньо великі, особливо за площею, то у воді може дифундувати значна кількість газу. Очевидно, що за пониження тиску газ виділяється з води у безводний простір. Вивченню цього питання в літературі присвячено незначну кількість робіт.

Метою роботи є побудова моделі і вивчення процесу дифузії газу у воду, яка є наявною у пласті, та його оцінка в залежності від тиску і коефіцієнта концентрації.

1. Знаходження концентрації дифундованого газу у воді

Розглядаємо пласт як плоский пористий шар заданої площі та товщини. Товщина пласту невелика, порівняно з площею. Барометричним перепадом тиску газу в ньому нехтуватимемо. У шарі є газ і вода. Необхідно визначити розподіл коефіцієнта концентрації газу у воді та його кількість, залежно від параметрів газу та пористого середовища.

Оскільки газ може підходити до вибою свердловини разом із водою, задача зводиться до розв'язування рівняння дифузії з конвективною складовою в шарі завтовшки l

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} + v \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (1)$$

за відповідних крайових умов, які запишемо у вигляді

$$c_1(x) = c(x, 0), \quad c_2(x) = c(x, l), \quad c_3(t) = c(0, t).$$

Для узгодженості умов необхідно виконання рівності $c_1(0) = c_3(0)$.

Розв'язок рівняння (1) шукаємо з використанням перетворення Лапласа. За сталих коефіцієнтів рівняння (1) матиме вигляд

$$\bar{c}'' - b\bar{c}' - p_1\bar{c} = -c_{11}. \quad (2)$$

Тут $b = v/D$, $p_1 = s/D$, $c_{11} = c(x, 0)/D$. Вважаємо, що параметри b та p_1 є постійні. Загальний розв'язок однорідного рівняння такий: $\bar{c}_z = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{-\lambda_2 x}$, де

$$\lambda_1 = \lambda_{11} - \lambda_{12}, \quad \lambda_2 = \lambda_{11} + \lambda_{12}, \quad \lambda_{11} = \frac{v}{2D}, \quad \lambda_{12} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{v}{D}\right)^2 + \frac{4s}{D}}.$$

Частковий розв'язок диференціального рівняння (2) залежить від його правої частини. З використанням методу варіації сталих отримаємо

$$\bar{c}_{ch} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(e^{\lambda_1 x} \int c_{11} e^{-\lambda_1 y} dy + e^{-\lambda_2 x} \int c_{11} e^{-\lambda_2 y} dy \right). \quad (3)$$

Якщо функція c_{11} стала, то частковий розв'язок $\bar{c}_{ch} = -c_{11}/(\lambda_1 \lambda_2)$. За сталих крайових умов загальний розв'язок задачі буде

$$\bar{c}_z = -\frac{c_{11}}{\lambda_1 \lambda_2} + c_{31} e^{\lambda_{11} x} \frac{\text{sh}(\lambda_{12}(l-x))}{\text{sh}(\lambda_{12}l)} + c_{21} e^{\lambda_{11}(l-x)} \frac{\text{sh}(\lambda_{12}x)}{\text{sh}(\lambda_{12}l)}. \quad (4)$$

$$\text{Тут } c_{31} = \bar{c}(0, s) + \frac{c_{11}}{\lambda_1 \lambda_2}, \quad c_{21} = \bar{c}(l, s) + \frac{c_{11}}{\lambda_1 \lambda_2}.$$

Загальний розв'язок у зображеннях Лапласа має такий вигляд:

$$\bar{c}_z = \frac{c_1}{s} + (c_3 - c_1) \frac{1}{s} e^{\lambda_{11} x} \frac{\text{sh}(\lambda_{12}(l-x))}{\text{sh}(\lambda_{12}l)} + (c_2 - c_1) \frac{1}{s} e^{\lambda_{11}(l-x)} \frac{\text{sh}(\lambda_{12}x)}{\text{sh}(\lambda_{12}l)}. \quad (5)$$

Позначимо $\Phi(a, b, s) = \frac{1}{s} \frac{\text{sh}(aq)}{\text{sh}(bq)}$. Тоді

$$\bar{c}_z = \frac{c_1}{s} + (c_3 - c_1) e^{\lambda_{11} x} \Phi(l-x, l, s) + (c_2 - c_1) e^{\lambda_{11}(l-x)} \Phi(x, l, s). \quad (6)$$

Оригінал зображення $\Phi(a, b, s)$ будемо шукати шляхом розкладу його на прості дроби

$$\Phi(a, b, s) = \frac{1 \operatorname{sh}(aq)}{s \operatorname{sh}(bq)} = \frac{a}{b} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin \frac{k\pi a}{b} \frac{q^2}{q^2 + (k\pi/b)^2}.$$

Оскільки

$$q^2 = s + \frac{v^2}{4D}, \quad b = \frac{l}{\sqrt{D}}, \quad a = \left\{ \frac{l-x}{\sqrt{D}}, \frac{x}{\sqrt{D}} \right\}, \quad \frac{a}{b} = \left\{ \frac{l-x}{l}, \frac{x}{l} \right\},$$

то оригіналом зображення

$$\frac{1}{s} \frac{q^2}{q^2 + (k\pi/b)^2} = \frac{1}{s} \frac{s + \lambda_{13}^2}{s + \lambda_{lx}^2},$$

де $\lambda_{lx}^2 = \lambda_{13}^2 + (k\pi/b)^2$, $\lambda_{13} = v/(2\sqrt{D})$, є функція $e^{-\lambda_{lx}^2 t} + \lambda_{13}^2 \frac{1 - e^{-\lambda_{lx}^2 t}}{\lambda_{lx}^2} = e^{-\lambda_{lx}^2 t} + \frac{\lambda_{13}^2}{\lambda_{lx}^2} (1 - e^{-\lambda_{lx}^2 t})$. Тоді

$$\phi(a, b, t) = \frac{a}{b} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin \left(\frac{k\pi a}{b} \right) \left[e^{-\lambda_{lx}^2 t} + \frac{\lambda_{13}^2}{\lambda_{lx}^2} (1 - e^{-\lambda_{lx}^2 t}) \right]$$

та остаточно

$$c_z = c_1 + (c_3 - c_1) e^{\lambda_{11} x} \phi(l-x, l, t) + (c_2 - c_1) e^{\lambda_{11}(l-x)} \phi(x, l, t). \quad (7)$$

2. Знаходження розподілу тиску у воді

Розрахунок розподілу тиску води $p(x, t)$ у плоскому безмежному середовищі завтовшки l визначається як розв'язок одновимірного рівняння фільтрації [5, 6]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{kh}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \right) \right] = 2\alpha m h \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (8)$$

де k — проникність пласту, μ — динамічна в'язкість води, α — коефіцієнт водонасиченості, m — пористість пласту. Оскільки товщина пласту є незначна та вважається сталою, то рівняння (8) матиме вигляд

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 2\alpha m \frac{\partial p}{\partial t}.$$

Сформулюємо крайові умови задачі. Вважаємо, що на нижній межі шару тиск сталий, рівний гідростатичному p_n , а на верхній межі сталі значення тиску p_v розраховуємо на основі гідравлічної ув'язки ГЗП–вибійна зона–ГВК [1-3].

Початковий розподіл тиску води у водяному шарі

$$p(x, 0) = \rho g x, \quad 0 < x < l.$$

Розв'язок сформульованої задачі шукаємо як частковий випадок розв'язку загальнішої.

Розглядаємо безмежний шар завтовшки l , $0 < x < l$. Значення тисків на границях рівні $\varphi_1(t)$ та $\varphi_2(t)$. Початковий тиск $f(x)$. У цьому випадку задача полягає у такому:

знайти розв'язок рівняння

$$\kappa \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial t} \quad (0 < x < l) \quad (9)$$

за крайових умов

$$p(0, t) = \varphi_1(t), \quad p(l, t) = \varphi_2(t), \quad p(x, 0) = f(x).$$

Тут $\kappa = k / (2\mu\alpha m)$.

Розв'язком сформульованої задачі є функція

$$p(x, t) = \frac{2}{l} \sum_1^{\infty} \exp\left(-\frac{\kappa n^2 \pi^2 t}{l^2}\right) \sin \frac{n\pi x}{l} \left[\int_0^l f(y) \sin \frac{n\pi y}{l} dy + \right. \\ \left. + \frac{n\pi \kappa}{l} \int_0^t \exp\left(\frac{\kappa n^2 \pi^2 y}{l^2}\right) \left[\varphi_1(y) - (-1)^n \varphi_2(y) \right] dy \right].$$

Стосовно фільтрації води за згаданих вище крайових умов значення інтегралів в останній формулі будуть за сталих граничних умов такими

$$p(0, t) = \varphi_1 \equiv const, \quad p(l, t) = \varphi_2 \equiv const.$$

Розв'язок матиме вигляд

$$p(x, t) = \varphi_1 + (\varphi_2 - \varphi_1) \frac{x}{l} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \varphi_2 - \varphi_1}{n} \exp\left(-\frac{\kappa n^2 \pi^2 t}{l^2}\right) \sin \frac{n\pi x}{l} + \\ + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\kappa n^2 \pi^2 t}{l^2}\right) \sin \frac{n\pi x}{l} \int_0^l f(y) \sin \frac{n\pi y}{l} dy. \quad (10)$$

Оскільки $f(x) = \rho g x$, то

$$\int_0^l f(y) \sin \frac{n\pi y}{l} dy = \rho g \int_0^l y \sin \frac{n\pi y}{l} dy = \rho g \frac{(-1)^{n+1} l^2}{n\pi}.$$

Тоді остаточно отримаємо таку формулу

$$p(x,t) = \varphi_1 + (\varphi_2 - \varphi_1) \frac{x}{l} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \varphi_2 - \varphi_1}{n} \exp\left(-\frac{\kappa n^2 \pi^2 t}{l^2}\right) \sin \frac{n\pi x}{l} + \frac{2\rho g l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \exp\left(-\frac{\kappa n^2 \pi^2 t}{l^2}\right) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (11)$$

3. Знаходження маси дифундованого газу у воді

Розглянемо шар води площею S та товщиною L . Маса дифундованого газу у воді залежить від концентрації газу у воді, розподілу тиску та об'єму шару води. У загальному випадку, маса речовини обчислюється за формулою

$$M = \int_V \rho dv. \quad (12)$$

Оскільки $dM_x = m\rho dV = \rho m S dx$, то для шару площею S та завтовшки L

$$M_x = S \int_0^x \rho m c(y) dy. \quad (13)$$

Далі, з рівняння стану маємо $\rho = p/(zRT)$. Приймаючи параметри m та S сталими, отримаємо

$$M_x = \int_0^x \rho m S c dx = m S \int_0^x \frac{p(x)}{zRT} c(x) dx, \quad (14)$$

де z — коефіцієнт стисливості газу, R — універсальна газова стала, T — абсолютна температура, $p(x)$ — розподіл тиску у воді, $c(x)$ — концентрація дифундованого газу у воді.

Враховуючи газодинамічні параметри, за яких працюють ГТС, коефіцієнт стисливості газу доцільно обчислювати за формулою [4, 6] $z = (1 + fp)^{-1}$. Тут $f = (24 - 0,21t^\circ C) \cdot 10^{-4}$, а $p(x)$ вимірюється в атмосферах.

4. Обчислювальний експеримент

Обчислення проводилися за таких вхідних параметрів: $p_0 = 6864655 \text{ Н/м}^2$; $p_{gzp} = 5393657,5 \text{ Н/м}^2$; $\Delta h = 500 \text{ м}$; $\lambda = 0,01$; $z = 0,9$; $R = 8,3144621 \text{ Дж/моль} \cdot \text{К}$; $\rho_0 = 0,68 \text{ кг/м}^3$; $\mu = 0,0008 \text{ м}^2/\text{с}$; $g = 9,8 \text{ м/с}^2$; $\alpha = 0,8$; $m = 0,28$; $k = 4 \cdot 10^{-15}$; $\rho = 998 \text{ кг/м}^3$; $q = 70 \text{ м}^3/\text{с}$.

Розподіл тиску у воді знаходимо за умов $p_2 = p_0$, а p_1 обчислюємо на основі гідравлічної ув'язки системи “пласт підземного газосховища – газозбірний пункт”. Для знаходження концентрації дифундованого газу у воді приймали такі крайові умови: $c(0, t) = 0$, $c(l, t) = 0,9$. Площа $S = 15000 \text{ м}^2$. Результати обчислень подано у вигляді таблиць і графіків.

Таблиця 1

Розподіл маси дифундованого газу M_x (кг) на кожному шарі води товщиною l (м) та відношення (у відсотках) маси дифундованого газу до маси води M_V (кг)

l	M_x	M_x/M_V (%)
0	0	0
1	2002262	4,79
2	3312344	7,93
3	4169171	9,98
4	4728977	11,31
5	5093797	12,19
6	5330051	12,75
7	5480637	13,12
8	5572714	13,34
9	5622586	13,45

Таблиця 2

Залежність маси дифундованого газу M_x (кг) від коефіцієнта дифузії D на заданому шарі води товщиною l (м)

D	M_x
1E-10	96807
5E-10	109020
1E-09	122470
5E-09	198887
1E-08	264706
5E-08	560938
1E-07	788871
5E-07	1769030
1E-06	2516971
5E-06	5638552

Таблиця 3

Залежність маси дифундованого газу M_x (м^3) від значення тиску на нижній границі p_1 (ат) на заданому шарі води завтовшки $x = 5$ м та крайовій умові на верхній границі $p_2 = 50$ ат

p_1	M_x
10	1716852
20	3405324
30	5093797
40	6782270
45	7626506

Таблиця 4

Залежність маси дифундованого газу M_x (м^3) від значення тиску на верхній границі p_2 (ат) на заданому шарі води товщиною $l = 10$ м для $x = 5$ м і крайовій умові на верхній границі $p_1 = 30$ ат

D	M_x
1E-10	96807
5E-10	109020
1E-09	122470
5E-09	198887
1E-08	264706
5E-08	560938
1E-07	788871
5E-07	1769030
1E-06	2516971
5E-06	5638552

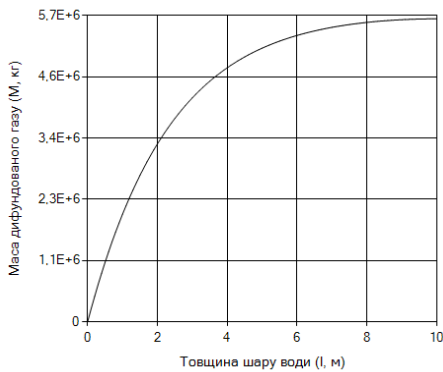


Рис. 1. Розподіл маси дифундованого газу M_x (кг) на кожному шарі води завтовшки l (м)

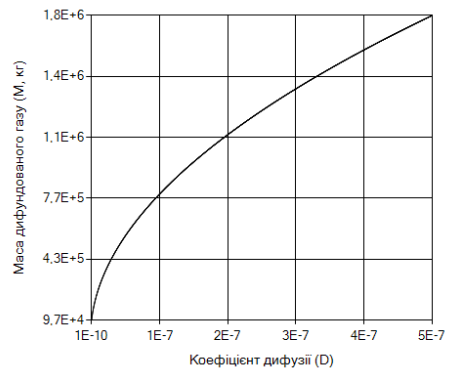


Рис. 2. Залежність маси дифундованого газу M_x (кг) від коефіцієнта дифузії D

Висновки. У роботі досліджено процес дифузії газу у воду та розчинність у ній. Показано, що дифундований газ, зазвичай, розміщений у верхній частині шару води. Досліджено вплив тиску на концентрацію газу у воді. Показано, що на кількість дифундованого газу значно впливає коефіцієнт дифузії та розміри пласту. Значний вплив на кількість газу має також тиск на границі газ – вода та незначний вплив — тиск на нижній границі для підтримування витіснення газу.

Література

- [1] *Притула Н. М., П'янило Я. Д., Притула М. Г.* Підземні сховища газу(математичні моделі та методи). — Львів: РАСТР-7, 2015. — 266 с.
- [2] *П'янило Я. Д., Вавричук П. Г.* Визначення швидкості руху газо-водяного контакту в процесі роботи підземних сховищ газу. — 2013. — Вип. 18. — С. 165-172.
- [3] *П'янило Я., Гладун С., П'янило Г.* Аналітичний спосіб розрахунку параметрів гідравлічної ув'язки колекторного збору газу // Вісник Національного університету “Львівська політехніка”: Комп'ютерна інженерія та інформаційні технології. — Львів, — 2011. — № 652. — С. 239-243.
- [4] *Вечерік Р. Л., П'янило Я. Д., Притула М. Г., Хасцький Ю. Б.* Математичне моделювання процесу руху газу в системі пласт підземного сховища газу–магістральний газопровід // Нефть и газ. — 2004. — № 6. — С. 83-89.
- [5] *Schuck A., Rost F., Szoble P. and Klafki M.* Time lapse seismic for the development of an underground gas storage. EAGE 64th Conference & Exhibition. — Florence, Italy, 27-30 May 2000. — P. 1-4.
- [6] *Вечерік Р. Л., П'янило Я. Д., Притула М. Г., Хаєцький Ю. Б.* Математичне моделювання процесу руху газу в системі пласт підземного сховища газу–магістральний газопровід // Нефть и газ. — 2004. — № 6. — С. 83-89.

Петро Вавричук
Дослідження впливу тиску на наявність газу у воді...

The influence of pressure on the availability of gas in water in layers of underground gas storage

Petro Vavrychuk

The approach to assessing the quantity of the diffuse gas in water that is available in almost all layers underground gas storage is proposed. The influence of the diffusion coefficient, the pressure on the "gas – water" border and the pressure on the lower boundary water on the quantity of diffuse gas is investigated. The theoretical results are tested on the model problem in the computational experiment.

Исследование влияния давления на наличие газа в воде в пласте подземных хранилищ газа

Петро Вавричук

Предложен подход к оценке количества газа в воде, наличествует почти во всех пластах подземных хранилищ. Исследовано влияние коэффициента диффузии, давления на границе газ-вода и давления на нижней границе воды на количество газа. Полученные теоретические результаты апробированы на модельной задаче в ходе вычислительного эксперимента.

Представлено доктором технічних наук Я. П'янилом

Отримано 14.04.16