

Поздовжній зсув біматеріалу з нелінійно пружним міжфазним тонким включенням

Йосиф Піскозуб

К.ф.-м.н., доцент Українська академія друкарства, вул. Підголюско, 19, Львів, e-mail: piskozub@uad.lviv.ua, piskozub@pancha.lviv.ua

Розглянуто задачу поздовжнього зсуву біматеріалу з тонким нелінійно пружним включенням на межі поділу матеріалів матриці. Розв'язок сформульованої задачі побудовано методом задачі спряження граничних значень аналітичних функцій із застосуванням методу функції стрибка. Побудована модель тонкого включення з нелінійними пружними характеристиками. Розв'язок задачі зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь із змінними коефіцієнтами. Запропоновано збіжний ітераційний метод розв'язування такої системи для різних варіантів нелінійного деформування, зокрема закону Рамберга-Осгуда. Розвинуто інкрементальну методику розрахунку напружено-деформованого стану тіла при багатокроковому (в т.ч. циклічному) навантаженні. Здійснено числові розрахунки для різних значень параметрів нелінійності пружних характеристик матеріалу включення. Проаналізовано їх вплив на напружено-деформований стан матриці за навантаження зсувом на безмежності та збалансованою системою зосереджених сил.

Ключові слова: поздовжній зсув, антиплоска деформація, тонке включення, біматеріал, функції стрибка

Вступ. Більшість матеріалів містять численні тонкі дефекти у вигляді тріщин та включень різноманітного походження [1–4]. Доволі часто включення використовують як конструкційні елементи для підкріплення деталей машин та споруд, зокрема і як наповнювач композиційних матеріалів. Одним із характерних прикладів композиційного матеріалу є шаруваті структури, властиві, зокрема, й ґрунтам [5]. Такі тонкі структурні неоднорідності переважно мають складну термомеханічну будову з врахуванням можливої в'язкості, пластичності та інших нелінійних ефектів. Врахування нелінійності істотно ускладнює процес розв'язування задач і вимагає використання різноманітних наближених методів навіть для тіл простої геометрії [1, 6, 7].

Спроби врахувати різноманітну нелінійність у антиплоскій задачі для двох стиснених півпросторів із міжфазними дефектами було зроблено різними авторами в працях [8–13], в т.ч. розглядалися фрикційне проковзування контактуючих тіл [8, 9, 12], гранично-елементний підхід [10].

Метою даної публікації є розвиток методу функцій стрибка та побудова адекватних моделей тонких включень-прошарків, матеріал яких має істотно нелінійні пружні властивості за різного навантаження тіла, в тому числі багатокрокового чи циклічного.

1. Формулювання задачі

Вивчатимемо напружено-деформований стан (НДС) перерізу безмежного ізотропного масиву, що складається з двох півпросторів з пружними сталими G_1, G_2 , площиною xOy , перпендикулярною до напрямку z його поздовжнього зсуву. Перпендикулярні до цієї осі плоскі перерізи півпросторів утворюють дві півплощини S_k ($k=1,2$), а межі поділу між ними відповідає вісь абсцис $L \sim x$. На ній вздовж відрізка $L' = [-a; a]$ знаходиться тонке включення товщиною $2h$ ($h \ll a$) (рис. 1).

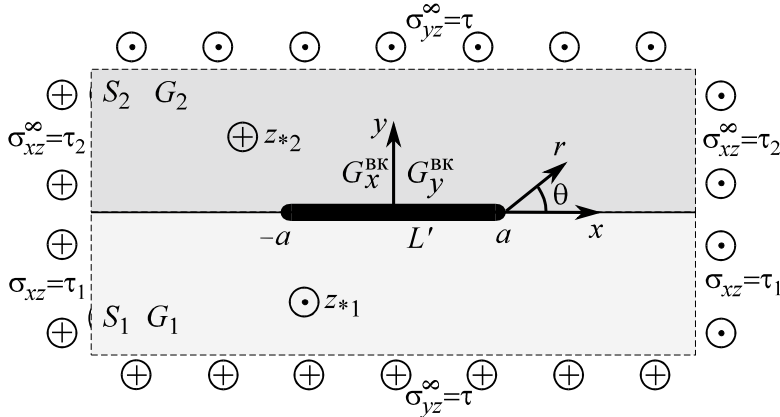


Рис. 1. Силова й геометрична схема задачі

Приймаємо, що матеріал включення ортотропно нелінійно пружний і задовольняє залежності

$$\frac{\partial W^{BK}}{\partial x} = A_x \sigma_{xz}^{BK} \left(1 + B_x \left(\sigma_{xz}^{BK} \right)^{M_x} \right), \quad \frac{\partial W^{BK}}{\partial y} = A_y \sigma_{yz}^{BK} \left(1 + B_y \left(\sigma_{yz}^{BK} \right)^{M_y} \right). \quad (1)$$

Співвідношення (1) в загальному випадку можна представити у вигляді

$$\sigma_{xz}^{BK} = G_x^{BK} \left(\sigma_{xz}^{BK} \right) \frac{\partial W^{BK}}{\partial x}, \quad \sigma_{yz}^{BK} = G_y^{BK} \left(\sigma_{yz}^{BK} \right) \frac{\partial W^{BK}}{\partial y} \quad (2)$$

із змінними модулями зсуву $G_x^{BK} \left(\sigma_{xz}^{BK} \right)$, $G_y^{BK} \left(\sigma_{yz}^{BK} \right)$, заданими певними залежностями. У випадку $M_s = m - 1$, $A_s = 1/G_{os}$, $B_s = K_s A_s^{m-1}$, $s = \{x; y\}$ співвідношення (1) співпадає з відомою моделлю деформування Рамберга — Осгуда [11], де G_{os} , m , K_s , $s = \{x; y\}$ - сталі матеріалу включення.

Припустимо, що величина і напрямок дії зовнішніх силових факторів, що здійснюють поздовжній зсув масиву, змінюються квазістатично. Зовнішнє навантаження визначають монотонно змінні в часових проміжках $[t_{(p-1)}; t_{(p)}]$ покрокові послідовності факторів: рівномірно розподілених на нескінченності

напружень $\sigma_{yz}^{\infty} = \sum_p \tau_{(p)}(t)$, $\sigma_{xz}^{\infty} = \sum_p \tau_{k(p)}(t)$, зосереджених сил інтенсивності $Q_k(t) = \sum_p Q_{k(p)}(t)$, гвинтових дислокацій із складовою вектора Бюргерса $b_k(t) = \sum_p b_{k(p)}(t)$ в точках $z_{*k} \in S_k$ ($k=1,2$), (p) — номер кроку навантажування. Для забезпечення прямолинійності межі розділу матеріалів на нескінченності напруження повинні в довільний момент часу задовольняти умові $\tau_{2(p)}(t)G_1 = \tau_{1(p)}(t)G_2$. Застосування під час розв'язування задачі однакового традиційного позначення для осі z та комплексної змінної $z = x + iy$ не повинно викликати непорозуміння.

Наявність тонкого включення в масиві моделюється на кожному кроці навантажування стрибком компонент векторів напружень і переміщень на $L' [1, 2]$:

$$\begin{aligned} [\sigma_{yz}]_{h(p)} &\cong \sigma_{yz}^- - \sigma_{yz}^+ = f_{3(p)}(x, t), \\ \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_{h(p)} &\cong \frac{\partial w^-}{\partial x} - \frac{\partial w^+}{\partial x} = \left[\frac{\sigma_{xz}}{G} \right]_{h(p)} \cong \frac{\sigma_{xz}^-}{G_1} - \frac{\sigma_{xz}^+}{G_2} = f_{6(p)}(x, t), \quad x \in L'; \end{aligned}$$

$$f_{3(p)}(x, t) = f_{6(p)}(x, t) = 0, \text{ якщо } x \notin L' \quad (3)$$

де (p) — номер кроку навантажування; t — момент часу. Тут і далі використовуються позначення $[\varphi]_h = \varphi(x, -h) - \varphi(x, +h)$, $\langle \varphi \rangle_h = \varphi(x, -h) + \varphi(x, +h)$; індекси "+" та "-" відповідають граничним значенням функцій на верхньому і нижньому краях лінії L .

Математична модель тонкого включення подається у вигляді умов взаємодії [1, 2], які еквівалентні умовам неідеального контакту між прилеглими до включення поверхнями матриці. В основі запропонованої методики моделювання тонкого об'єкту лежить принцип об'ємного інтегрування визначальних співвідношень, що описують фізико-механічний стан матеріалу включення, з наступним урахуванням малості одного з лінійних розмірів включення:

$$\begin{cases} G_x^{6K}(\sigma_{xz}^{6K}, t) \left\langle \frac{\partial w}{\partial x} \right\rangle_h(x, t) - 2\sigma_{xz}^{6K}(-a) - \frac{1}{h} \int_{-a}^x [\sigma_{yz}]_h(\xi, t) d\xi = 0, \\ G_y^{6K}(\sigma_{yz}^{6K}, t) [w]_h(x, t) + h \langle \sigma_{yz} \rangle_h(x, t) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Контакт між півпросторами уздовж лінії $L'' = L \setminus L'$ та між масивом і берегами включення вздовж L' вважаємо ідеальним

$$w^{\beta k}(x, \pm h) = w_k(x, \pm h), \quad \sigma_{yz}^{\beta k}(x, \pm h) = \sigma_{yzk}(x, \pm h) \quad x \in L' \quad (5)$$

2. Розв'язування задачі

Застосовуючи до розв'язування задачі методику [1, 12] можна отримати залежності, згідно з якими компоненти тензора напружень і похідні вектора переміщень на лінії L необмеженої площини S , а також всередині неї дорівнюють

$$\begin{aligned} \sigma_{yz(1)}^{\pm}(x, t) &= \mp p_k f_{3(1)}(x, t) - C g_{6(1)}(x, t) + \sigma_{yz(1)}^{0\pm}(x, t), \\ \sigma_{xz(1)}^{\pm}(x, t) &= \mp C f_{6(1)}(x, t) + p_k g_{3(1)}(x, t) + \sigma_{xz(1)}^{0\pm}(x, t), \\ g_{r(p)}(z, t) &\equiv \frac{1}{\pi} \int_{L'} \frac{f_{r(p)}(x, t) dx}{x - z}, \quad p_k = \frac{G_k}{G_1 + G_2}, \quad C = G_{3-k} p_k, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yz(1)}(z, t) + i\sigma_{xz(1)}(z, t) &= \sigma_{yz(1)}^0(z, t) + i\sigma_{xz(1)}^0(z, t) + ip_k g_{3(1)}^n(z, t) - \\ &- C g_{6(1)}^n(z, t) \quad (z \in S_k; r = 3, 6; k = 1, 2). \end{aligned}$$

Величини, відзначені індексом "0" зверху, відповідають НДС масиву без модельних неоднорідностей (включень, тріщин тощо) за відповідного зовнішнього навантаження (однорідний розв'язок). Тут і далі для кожного кроку навантажування використані позначення [12]:

$$\begin{aligned} \sigma_{yz(p)}^0(z, t) + i\sigma_{xz(p)}^0(z, t) &= \tau_{(p)}(t) + i \left\{ \tau_{k(p)}(t) + D_{k(p)}(z, t) + \right. \\ &+ \left. (p_k - p_j) \bar{D}_{k(p)}(z, t) + 2p_k D_{j(p)}(z, t) \right\}, \\ D_{k(p)}(z, t) &= - \frac{Q_{k(p)}(t) + iG_k b_{k(p)}(t)}{2\pi(z - z_{*k})} \quad (z \in S_k, k = 1, 2; j = 3 - k). \end{aligned} \quad (7)$$

Використовуючи (6), (7) та крайові умови (5) отримаємо з моделі (4) систему сингулярних інтегральних рівнянь (ССР)

$$\begin{cases} (G_2 - G_1) p f_{6(1)}(x, t) + 2p g_{3(1)}(x, t) - \frac{1}{h G_x^{\beta k}(\sigma_{xz}^{\beta k}, t)} \int_{-a}^x f_{3(1)}(\xi, t) d\xi = F_{3(1)}(x, \tau, t), \\ (p_1 - p_2) f_{3(1)}(x, t) - 2C g_{6(1)}(x, t) + \frac{G_y^{\beta k}(\sigma_{yz}^{\beta k}, t)}{h} \int_{-a}^x f_{6(1)}(\xi, t) d\xi = F_{6(1)}(x, \tau, t), \end{cases} \quad (8)$$

$$F_{3(1)}(x, \tau, t) = \frac{2}{G_x^{\beta k}(\sigma_{xz}^{\beta k}, t)} \sigma_{xz}^{\beta k}(-a) - \left(\sigma_{xz2}^0(x, t) / G_2 + \sigma_{xz1}^0(x, t) / G_1 \right),$$

$$F_{6(1)}(x, \tau, t) = \left\langle \sigma_{yz}^0 \right\rangle (x, t) - G_y^{\beta k}(\sigma_{yz}^{\beta k}, t) \left(\frac{\sigma_{yz2}^0(x, t)}{G_2} + \frac{\sigma_{yz1}^0(x, t)}{G_1} \right) - \frac{G_y^{\beta k}(\sigma_{yz}^{\beta k}, t)}{h} [w^0](-a)$$

з додатковими умовами силового балансу та однозначності переміщень при обході навколо тонкого дефекту

$$\int_{-a}^a f_{3(1)}(\xi, t) d\xi = 2h(\sigma_{xz}^{6K}(a) - \sigma_{xz}^{6K}(-a)), \quad \int_{-a}^a f_{6(1)}(\xi, t) d\xi = [w](a) - [w](-a). \quad (9)$$

До розв'язування (8) – (9) можна використати методику [1, 13] з урахуванням того, що характеристична частина ССІР не залежить від нелінійних коефіцієнтів.

Детальніший аналіз розв'язку задачі зробимо для часткового випадку рівності пружних характеристик півпросторів ($G_1 = G_2 = G$). Для застосування чисельно-аналітичного методу розв'язання ССІР (8), яка у цьому випадку розділяється на два незалежних СІР, зручно представити параметри задачі та шукані стрибки $f_{k(1)}(x, t)$ у знерозміреному вигляді

$$\begin{cases} \tilde{g}_{3(1)}(\tilde{x}, t) - \frac{1}{\tilde{h}\tilde{G}_{x(1)}^{6K}(\sigma_{xz}^{6K}, t)} \int_{-1}^{\tilde{x}} \tilde{f}_{3(1)}(\xi, t) d\xi = F_{3(1)}(x, \sigma_{xz}^{6K}, t), \\ \tilde{g}_{6(1)}(x, t) - \frac{\tilde{G}_{y(1)}^{6K}(\sigma_{yz}^{6K}, t)}{\tilde{h}} \int_{-1}^{\tilde{x}} \tilde{f}_{6(1)}(\xi, t) d\xi = -F_{6(1)}(x, \sigma_{yz}^{6K}, t) / G, \end{cases} \quad (10)$$

$$\tilde{f}_{3(1)}(x, t) = \frac{G}{\sqrt{1-\tilde{x}^2}} \phi_{3(1)}(x, t), \quad \tilde{f}_{6(1)}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1-\tilde{x}^2}} \phi_{6(1)}(x, t), \quad (11)$$

$$\tilde{x} = x/a, \quad \tilde{h} = h/a, \quad \tilde{G}_x^{6K}(\tau, t) = G_x^{6K}(\tau, t)/G, \quad \tilde{G}_y^{6K}(\tau, t) = G_y^{6K}(\tau, t)/G, \quad \tilde{d} = d/a,$$

де $\phi_{k(1)}(x, t)$ — регулярні на проміжку $[-1; 1]$ функції, які представимо у вигляді розвинень в ряди по поліномах Чебишова

$$\phi_{k(p)}(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n B_{j(p)}^k T_j(x). \quad (12)$$

Підставляючи (12) з використанням відомих інтегралів у (10)-(11) у множині точок $x_m = \cos \frac{m\pi}{n+1}$ ($m = \overline{1, n}$), з урахуванням додаткових умов (9) отримуємо дискретний аналог ССІР — дві незалежні системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) порядку $n+1$ на невідомі $B_{j(1)}^k$ ($k = 3, 6; j = \overline{0, n}$) з невідомими апіорі коефіцієнтами $G_{x(1)}^{6K}(\sigma_{xz}^{6K}, t)$, $G_{y(1)}^{6K}(\sigma_{yz}^{6K}, t)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n B_{j(1)}^3 U_{j-1}(x_m) \left\{ 1 + \frac{\sqrt{1-x_m^2}}{j\tilde{h}\tilde{G}_{xm(1)}^{6K}} \right\} - \frac{B_{0(1)}^3}{\tilde{h}\tilde{G}_{xm(1)}^{6K}} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin x_m \right) = F_{3(1)}(x_m, \tilde{G}_{xm(1)}^{6K}), \\ B_{0(1)}^3 = 2\tilde{h} \left(\sigma_{xz(1)}^{6K}(a) - \sigma_{xz(1)}^{6K}(-a) \right), \quad m = \overline{1, n} \end{array} \right. \quad (13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n B_{j(1)}^6 U_{j-1}(x_m) \left\{ 1 + \frac{\tilde{G}_{ym(1)}^{6K} \sqrt{1-x_m^2}}{j\tilde{h}} \right\} - \frac{B_{0(1)}^6}{\tilde{h}\tilde{G}_{ym(1)}^{6K}} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin x_m \right) = F_{6(1)}(x_m, \tilde{G}_{ym(1)}^{6K}), \\ B_{0(1)}^6 = [\tilde{w}]_{(1)}(a) - [\tilde{w}]_{(1)}(-a), \quad m = \overline{1, n}. \end{array} \right. \quad (14)$$

Залежність $G_{x(1)}^{6K}(\sigma_{xz}^{6K}, t)$, $G_{y(1)}^{6K}(\sigma_{yz}^{6K}, t)$ від поточного НДС масиву породжує істотні труднощі при розрахунку внаслідок його змінності вздовж L .

Введемо позначення: $\gamma_{xm}^j = G_{x(1)}^{6K}(\sigma_{xz}^{6K}(x_m))$, $\gamma_{ym}^j = G_{y(1)}^{6K}(\sigma_{yz}^{6K}(x_m))$ — величини змінних модулів зсуву в точках колокації x_m ($m = \overline{1, n}$), j — номер наближення. Далі пропонується наступна стратегія розв'язування:

- 1) На початковому кроці значення $\gamma_{xm}^0 = G_{xm(1)}^{6K}(0, 0)$, $\gamma_{ym}^0 = G_{ym(1)}^{6K}(0, 0)$ вибираються рівними G_{0x}^{6K} , G_{0y}^{6K} , що відповідають стартовому моменту процесу навантажування при відсутності якихось залишкових НДС. Ці значення однакові у всіх точках колокації x_m ($m = \overline{1, n}$).
- 2) Починаємо зовнішнє навантажування з деякого значення τ чи Q при вибраній схемі навантажування.
- 3) Розв'язуємо СЛАР (13) – (14). Підставимо отримані $B_{j(1)}^k$ ($k = 3, 6; j = \overline{0, n}$) у співвідношення (12), а потім у (6), обчислюючи НДС в кожній з точок колокації.
- 4) Обчислюємо з використанням (1), (2) наступне наближення модуля зсуву у кожній точці колокації

$$\gamma_{xm}^j = G_{xm(1)}^{6K}(\sigma_{xz}^{6K}(x_m, \gamma_{xm}^{j-1})), \quad \gamma_{ym}^j = G_{ym(1)}^{6K}(\sigma_{yz}^{6K}(x_m, \gamma_{ym}^j)) \quad (15)$$

- 5) Перевіряємо, чи виконується в кожній точці колокації задана точність. Якщо "так", то процес розрахунку завершено. Якщо "ні", то мінімізуємо відхилення розрахункового модуля пружності від заданого в (1), повторюючи схему розрахунку від пункту 3) з новими значеннями модулів у кожній точці колокації (15), відповідними для даного НДС.

Досліджено, що такий ітераційний процес є збіжним.

3. Загальна схема розв'язування задачі

Отримані на першому (початковому) кроці в момент часу $t_{(1)}$ його завершення значення НДС масиву будуть на другому кроці (додатковому навантаженні чи розвантаженні) мати зміст залишкових. Тому застосуємо для отримання розв'язку наступну методику [12].

Вважаємо, що постановка задачі на другому кроці відрізняється від постановки задачі на попередньому кроці лише наявністю вже заданих стрибків переміщень та напружень, спричинених попереднім кроком. Тоді подання загального поля напружень має вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}(z, t) + i\sigma_{xz}(z, t) = & \sigma_{yz(1)}(z, t_{(1)}) + i\sigma_{xz(1)}(z, t_{(1)}) + \sigma_{yz(2)}^0(z, t) + \\ & + i\sigma_{xz(2)}^0(z, t) + ip_k g_{3(2)}(z, t) - Cg_{6(2)}(z, t) \quad (z \in S_k; k = 1, 2; j = 3 - k). \end{aligned} \quad (16)$$

Переміщення та напруження повинні задовольняти крайові умови (6) на L' . Тоді з урахуванням (16) можна сформулювати таку локальну задачу для другого кроку:

$$\begin{aligned} \sigma_{yz(2)}(z, t) + i\sigma_{xz(2)}(z, t) = & \left\{ \sigma_{yz}(z, t) + i\sigma_{xz}(z, t) \right\} - \\ & - \left\{ \sigma_{yz(1)}(z, t_{(1)}) + i\sigma_{xz(1)}(z, t_{(1)}) \right\} \quad (z \in S_k; k = 1, 2; j = 3 - k) \end{aligned} \quad (17)$$

з крайовими умовами (5), які перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned} w_{(1)}^{6k}(x, \pm h) + w_{(2)}^{6k}(x, \pm h) = & w_{k(1)}(x, \pm h) + w_{k(2)}(x, \pm h), \quad x \in L' \\ \sigma_{yz(1)}^{6k}(x, \pm h) + \sigma_{yz(2)}^{6k}(x, \pm h) = & \sigma_{yzk(1)}(x, \pm h) + \sigma_{yzk(2)}(x, \pm h) \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} w_{(2)}^{6k}(x, \pm h) = & \left\{ w_{k(1)}(x, \pm h) - w_{(1)}^{6k}(x, \pm h) \right\} + w_{k(2)}(x, \pm h), \quad x \in L' \\ \sigma_{yz(2)}^{6k}(x, \pm h) = & \left\{ \sigma_{yzk(1)}(x, \pm h) - \sigma_{yz(1)}^{6k}(x, \pm h) \right\} + \sigma_{yzk(2)}(x, \pm h) \end{aligned} \quad (18)$$

Вирази у фігурних дужках дорівнюють нулю в силу (6) на першому кроці і, отже, умови (18) отримують ідентичний до (5) вигляд

$$w_{(2)}^{6k}(x, \pm h) = w_{k(2)}(x, \pm h), \quad \sigma_{yz(2)}^{6k}(x, \pm h) = \sigma_{yzk(2)}(x, \pm h) \quad x \in L' \quad (19)$$

Оскільки вигляд (17), (19) такий самий як вигляд (6), (5), то ССІР для визначення локальних (щодо досягнутого у момент часу $t_{(1)}$ НДС) стрибків переміщень та напружень $f_{3(2)}, f_{6(2)}$ від локального (для цього кроку) навантаження

$$\begin{aligned} \tau_{(2)}(t) = \tau(t) - \tau_{(1)}(t), \quad \tau_{k(2)}(t) = \tau_k(t) - \tau_{k(1)}(t), \\ Q_{k(2)}(t) = Q_k(t) - Q_{k(1)}(t_{(1)}) \quad (k = 1, 2; t > t_{(1)}) \end{aligned} \quad (20)$$

матиме аналогічний до (8), (10) вигляд.

Залежність $G_{x(1)}^{6k}(\sigma_{xz}^{6k}, t)$, $G_{y(1)}^{6k}(\sigma_{yz}^{6k}, t)$ від поточного локального НДС на цьому кроці не може бути обчислена так, як на першому кроці, бо вимагає врахування повного НДС. Тому пропонується наступний алгоритм їх визначення:

- 1) На наступному кроці як початкові вибираються значення $G_{x(1)}^{6k}(HDC_{(1)}, t_{(1)})$, $G_{y(1)}^{6k}(HDC_{(1)}, t_{(1)})$, що відповідають завершальному моменту процесу навантажування на початковому кроці.
- 2) Продовжуємо зовнішнє навантажування як локальне згідно з (20) при вибраній схемі навантажування.
- 3) Розв'язуємо СЛАР. Підставляємо отримані $B_{j(2)}^k$ ($k = 3, 6; j = \overline{0, n}$) у співвідношення (12), а потім у (6) обчислюючи локальне НДС в кожній з точок колокації.
- 4) Обчислюємо згідно з (16) повний НДС, вважаючи значення НДС з попереднього кроку залишковим.
- 5) Обчислюємо з використанням (1), (2), (15) наступне наближення модуля зсуву у кожній точці колокації.
- 6) Перевіряємо, чи виконується в кожній точці колокації задана точність. Якщо "так", то процес розрахунку на цьому кроці завершено і можна переходити до наступного кроку навантаження, вибравши відповідні для кожної точки колокації значення $G_{x(2)}^{6k}(HDC_{(2)}, t_{(2)})$, $G_{y(2)}^{6k}(HDC_{(2)}, t_{(2)})$ (на пункт 1). Якщо "ні", то мінімізуємо відхилення розрахункового модуля пружності від заданого в (1), повторюючи схему розрахунку від пункту 3) з новими значеннями модулів у кожній точці колокації (15), відповідними для даного НДС.

Такий інкрементальний процес можна продовжити на довільну кількість кроків.

4. Чисельний аналіз

Для визначеності приймаємо закон пружності у формі Рамберга - Осгуда і тоді з (2) отримуємо в знерозміреному вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{G}_x^{6k}(\sigma_{xz}^{6k}) &= \frac{\tilde{G}_{0x}}{1 + K_x \left(\tilde{\sigma}_{xz}^{6k} / \tilde{G}_{0x} \right)^{m-1}}, & \tilde{G}_{0x} &= \frac{G_{0x}}{G}, & \tilde{G}_x^{6k}(\sigma_{xz}^{6k}) &= \frac{G_x^{6k}(\sigma_{xz}^{6k})}{G}, \\ \tilde{G}_y^{6k}(\sigma_{yz}^{6k}) &= \frac{\tilde{G}_{0y}}{1 + K_y \left(\tilde{\sigma}_{yz}^{6k} / \tilde{G}_{0y} \right)^{m-1}}, & \tilde{G}_{0y} &= \frac{G_{0y}}{G}, & \tilde{G}_y^{6k}(\sigma_{yz}^{6k}) &= \frac{G_y^{6k}(\sigma_{yz}^{6k})}{G}. \end{aligned} \quad (21)$$

На рис. 2-4 проілюстровано вплив навантаження зосередженими силами інтенсивністю $\tilde{Q} = Q/aG$ (схема $Q_2 = -Q_1 = Q$, $z_2 = -z_1 = id$) та параметрів

нелінійної пружності на зміну значень $\tilde{G}_y^{\text{BK}}(\sigma_{yz}^{\text{BK}})$ та НДС вздовж L' . Досліджено, що зміна як m так і K_y робить більший внесок на характеристики НДС у "жорсткішому" включенні, хоча й не так значно як \tilde{G}_{0y} . Так, зростання m та K_y незначно зменшує $\tilde{G}_y^{\text{BK}}(\sigma_{yz}^{\text{BK}})$, $\tilde{\sigma}_{yz}^{\text{BK}}$ та збільшує $\partial\tilde{w}^{\text{BK}}/\partial y$ для "податного" включення на відміну від зворотного значно вагомішого ефекту для "жорсткого" включення

На рис.4, як приклад, проілюстровано вплив сценарію покрокового навантажування на результуючий НДС. Розрахунки проводилися згідно із запропонованим вище алгоритмом. Лінії 1-4 відповідають послідовному довантажуванню силами інтенсивністю по +0.5 — чотири кроки, з урахуванням попередніх станів НДС як залишкових. Тобто, лінія 4 — сумарний вплив сил $\tilde{Q}=2$; штрих-пунктир 5 — це одномоментне прикладання еквівалентної сумарній сили. Якщо розподіли $\tilde{G}_y^{\text{BK}}(\sigma_{yz}^{\text{BK}})$, \tilde{G}_{0y} нечутливі до адитивності сценарію навантажування (рис.4а, рис.4б) то $\partial\tilde{w}^{\text{BK}}/\partial y$ вздовж L' істотно на це реагує (неспівпадіння ліній 4 та 5 на рис.4в). При цьому на кожному кроці для забезпечення відносної точності 0.1% було достатньо 2 ітерації для більш податного від матриці включення та 3 — для більш жорсткого.

На рис. 5 проілюстровано вплив зсуву на безмежності $\tilde{\tau} = \tau_x^\infty / G$ та параметрів пружної нелінійності на зміну значень $\tilde{G}_x^{\text{BK}}(\sigma_{xz}^{\text{BK}})$, $\tilde{\sigma}_{xz}^{\text{BK}}$ та $\partial\tilde{w}^{\text{BK}}/\partial x$

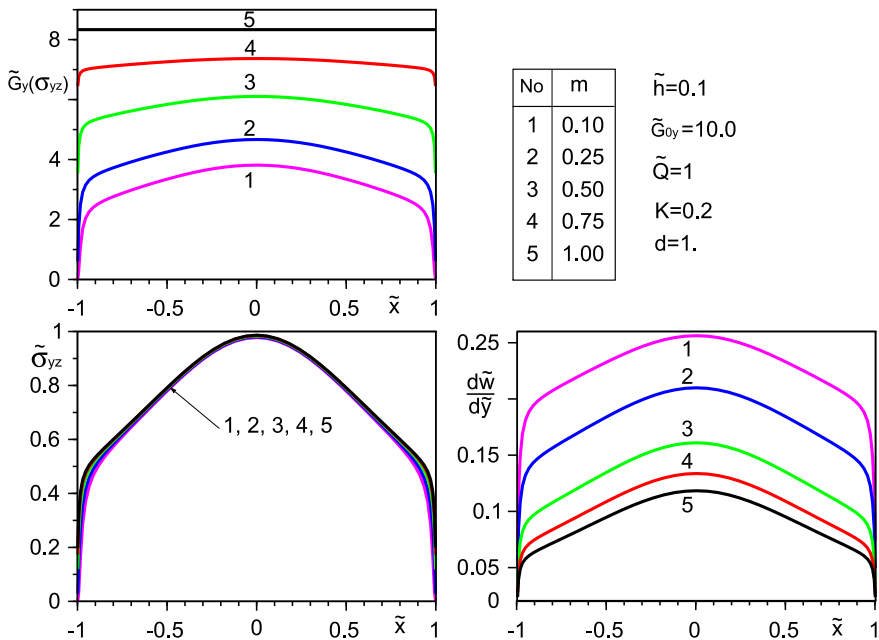


Рис. 2. Вплив параметру m у розподілі Рамберга-Осгуда для "жорсткого" включення

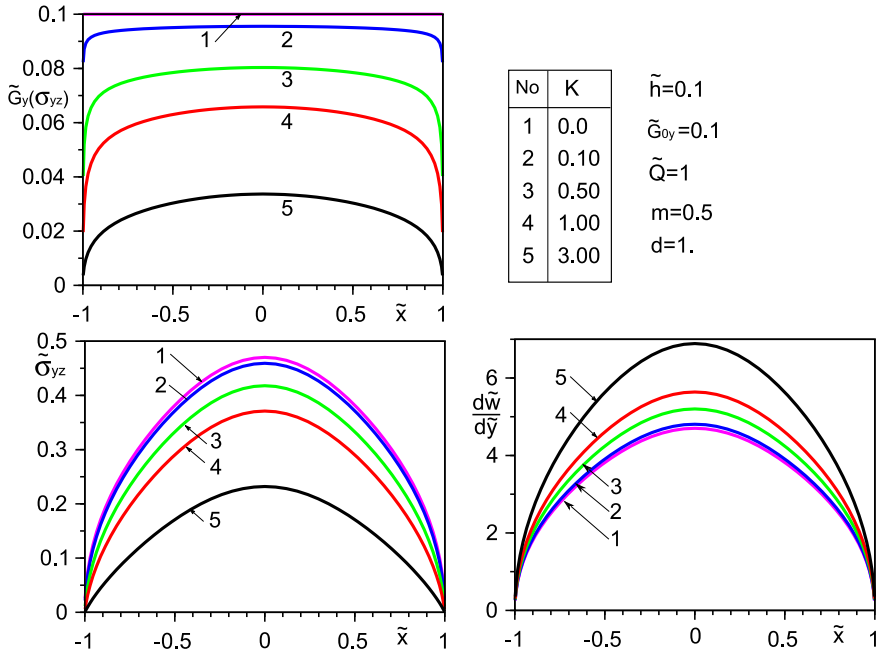


Рис. 3. Вплив параметру K , у розподілі Рамберга-Осгуда для "податного" включення

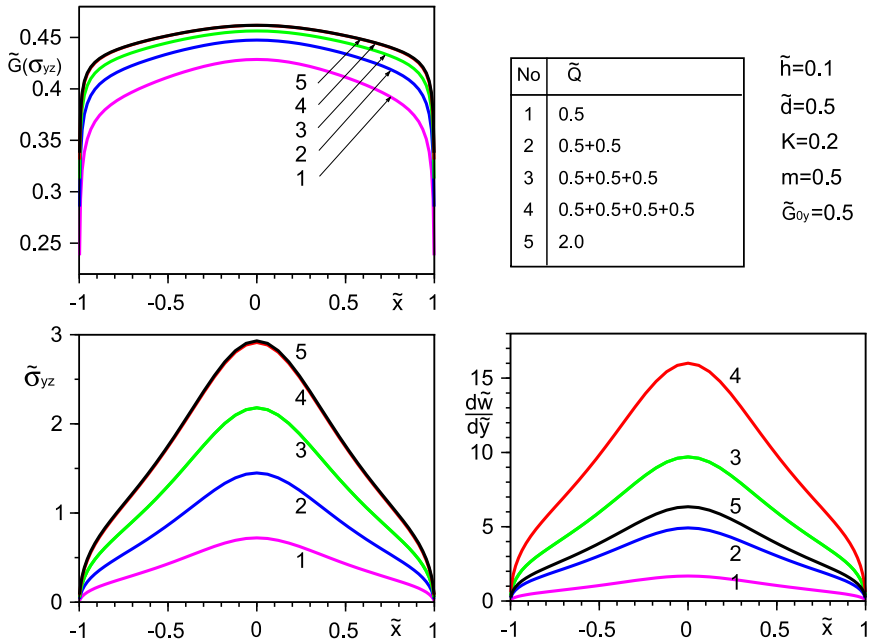


Рис. 4. Вплив інкрементальності процесу навантажування на НДС включення

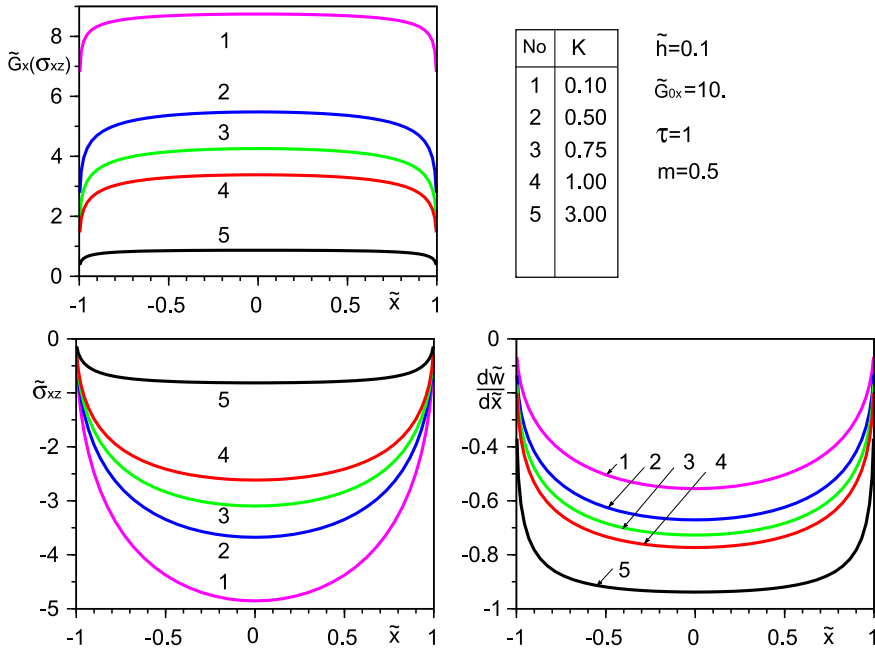


Рис. 5. Вплив параметру K у розподілі Рамберга-Осгуда для "жорсткого" включення

вздовж L' . Аналіз розрахунків показує, що вплив параметрів m та K_x нелінійності пружних характеристик включення відчутніший для "податного" включення. При цьому m практично не впливає на розподіл НДС у включенні на відміну від параметра K_x , вплив якого є порівняльним з \tilde{G}_{0x} .

Висновки. Побудовано модель тонкого включення з істотно нелінійними механічними властивостями. З її використанням методом задачі спряження граничних значень аналітичних функцій та методу функцій стрибка побудована ССІР із змінними коефіцієнтами, для розв'язування якої запропоновано збіжний ітераційний числово-аналітичний метод. Для випадків багатокрокового процесу навантажування розвинуто інкрементальну методику розрахунку НДС у тілі.

Числові розрахунки дали змогу проаналізувати вплив параметрів нелінійності згідно закону деформування Рамберга-Осгуда на НДС тіла при навантажуванні збалансованою системою зосереджених сил та зсувом на безмежності. У результаті для розглянутих конфігурацій задачі виявлені такі закономірності: 1) зростання m та K_y незначно зменшує $\tilde{G}_y^{\epsilon K}(\sigma_{yz}^{\epsilon K})$, $\tilde{\sigma}_{yz}^{\epsilon K}$ та збільшує $\partial \tilde{w}^{\epsilon K} / \partial y$ для "податного" включення на відміну від зворотного значно відчутнішого ефекту для "жорсткого" включення; 2) вплив параметрів з m та K_x на зміну значень $\tilde{G}_x^{\epsilon K}(\sigma_{xz}^{\epsilon K})$, $\tilde{\sigma}_{xz}^{\epsilon K}$ та $\partial \tilde{w}^{\epsilon K} / \partial x$ відчутніший для "податного" включення. При цьому m практично не впливає на розподіл НДС у включенні на відміну від параметра K_x , вплив якого є порівняльним з \tilde{G}_{0x} ; 3) при багатокроковому процесі

довантажування розподіли $\tilde{G}_y^{6k}(\sigma_{yz}^{6k})$, \tilde{G}_{0y} нечутливі до адитивності сценарію навантажування на відміну від деформацій $\partial\tilde{w}^{6k}/\partial y$, які істотно зростають порівняно з одномоментним сумарно ідентичним навантаженням.

Література

- [1] Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. Монографія. Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ. 2007. 716 с.
- [2] Сулим Г.Т., Піскозуб Й.З. Умови контактної взаємодії (огляд) // Мат. методи і фіз.-мех. поля, 2004, 47, №3. С. 110-125.
- [3] Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацишин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. –К.: Наукова думка, 1976. — 444 с.
- [4] Архипенко К.М., Кривий О.Ф. Міжфазна балка при різних типах контактної взаємодії з неоднорідною анізотропною площиною // машинознавство, 2008, №3 (129), С.16-21
- [5] Пелех Б. Л., Максимук А. В., Коровайчук И. М. Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями. — К.: Наук. думка, 1988. — 280 с.
- [6] Пастернак Я.М., Сулим Г.Т., Піскозуб Л.Г. Модели тонкого включения в условиях его идеального и неидеального контактного взаимодействия с окружающим материалом // Труды VI Междунар. симп. по трибофатике МСТФ 2010 (Минск, 25 окт. — 1 нояб. 2010 г.) В 2 ч. Ч. 2.– Минск; БГУ, 2010. — С. 399-404.
- [7] Черных К.Ф. Нелинейная сингулярная упругость (теория и приложения). — СПб., 1998.
- [8] Мартыняк Р.М., Криштафович А.А. Фрикционный контакт двух упругих полуплоскостей с локальными поверхностными выемками // Трение и износ. — 2000. — 21, №4. — С. 350-360.
- [9] Піскозуб Л.Г. Поздовжній зсув зосередженою силою біматеріалу з міжфазною тріщиною з урахуванням тертя // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології, 2014. — вип.20. — С. 160-172.
- [10] Пастернак Я. М., Сулим Г. Т., Пастернак Р. М. Поздовжній зсув тіла з тонкими стрічковими накладками та пружними включеннями змінної жорсткості при їхньому ідеальному та неідеальному контактах // Механіка і фізика руйнування будівельних конструкцій: збірник наукових праць. — Вип. 9. — Львів: Каменяр, 2012. — С. 98-113.
- [11] Rice J.R., Rosengren G.F. Plane strain deformation near a crack tip in power law hardening material // J. of the Mechanics and Physics of Solids. 1968. V. 16. P. 1-12.
- [12] Heorhiy Sulym, Lyubov Piskozub, Yosyf Piskozub, Iaroslav Pasternak Antiplane Deformation of a Bimaterial Containing an Interfacial Crack with the Account of Friction. 2. Repeating and Cyclic Loading // ACTA Mechanica et Automatica, 2015. — vol.9.— No.3, P.178-185.
- [13] Сулим Г.Т., Піскозуб Й.З. Асимптотика напружень в околі кінців тонкого міжфазного вкраплення // Фіз.-хім. механіка матеріалів, 1996. —Т. 32. — № 4. —С. 39-48.

Longitudinal shear of the bimaterial with nonlinear elastic thin interfacial inclusion

Yosyf Piskozub

The longitudinal shear problem for the bimaterial with thin nonlinear elastic inclusion at the interface matrix materials is discussed. Solution of the formulated problem is constructed by applying the problem linear conjugation of analytic functions and jump functions method. The model of thin inclusion with nonlinear elastic characteristics is constructed. The solution of problem is reduced to a system of singular integral equations with variable coefficients. A convergent iterative method for solving such a system due to the various law of nonlinear deformation, including Ramberg-Osgood law, is proposed. Incremental calculation method for calculating stress-strain state under

the multistep (including cyclic) loading is developed. Numerical calculations of the body stress-strain state for different values of the inclusion material nonlinearity parameters are made. Their influence on the mode of deformation of the matrix under the loading by the shift on the infinity and balanced system of concentrated forces is analyzed.

Продольный сдвиг биматериала с нелинейно упругим межфазным тонким включением

Иосиф Пискозуб

Рассмотрена задача продольного сдвига биматериала с тонким нелинейно упругим включением на границе раздела материалов матрицы. Решение сформулированной задачи построено методом задачи сопряжения предельных значений аналитических функций с применением метода функций скачка. Построена модель тонкого включения с нелинейными упругими характеристиками. Решение задачи сведено к системе сингулярных интегральных уравнений с переменными коэффициентами. Предложен сходящийся итерационный метод решения такой системы для различных вариантов нелинейного деформирования, в частности по закону Рамберга-Осгуда. Развита инкрементальная методика расчета напряженно-деформированного состояния тела при многошаговой (в т.ч. циклической) нагрузке. Осуществлены численные расчеты напряженно-деформированного состояния тела для различных значений параметров нелинейности упругих характеристик материала включения. Проанализировано их влияние на напряженно-деформированное состояние матрицы при нагружении сдвигом на бесконечности и сбалансированной системой сосредоточенных сил.

Отримано 06.12.16