УДК 517.5

Дослідження стійкості спектрального методу визначення розподілу тиску вздовж трубопроводу в нестаціонарному випадку в базисі біортогональних поліномів

Ярослав П'янило[1], Валентина Собко[2]

[1] д. т. н., с. н. с., Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: pjanylo@cmm.lviv.ua
[2] Міжнародний економіко-гуманітарний університет імені академіка Степана Дем'янчука, вул. акад. Степана Дем'янчука, 4, Рівне, 33027, e-mail: vg_sobko@ukr.net

В праці на базі побудованих авторами біортогональних поліномів досліджено стійкість запропонованого методу розв'язування задач математичної фізики, зокрема для розрахунку нестаціонарного руху газу в трубопроводах. Досліджено спосіб розв'язування задачі методом розділення змінних в базисі біортогональних поліномів. Рішення задачі побудовано у вигляді суми ряду біортогональних та квазіспектральних поліномів. Проведений порівняльний аналіз рішення для різних значень параметрів. Вивчено вплив параметрів методів, зокрема порядку часткової суми, розрядної сітки та похибки обчислення на точність отриманого розв'язку. Результати обчислень подано у вигляді таблиць.

Ключові слова: спектральні методи, математична модель, нестаціонарний рух газу, лінеаризація, біортогональні та квазіортогональні поліноми.

Вступ. Спектральні методи використовують як в теоретичних дослідженнях, так і для розв'язування широкого класу задач математики і механіки. Їх суть полягає в тому, що функції, які входять у модель, подають у вигляді ортогональних рядів за вибраним базисом. Знаходження розв'язку зводиться до обчислення коефіцієнтів ортогонального ряду шуканого розв'язку. Показано [6, 7], що вибір ортогонального базису слід узгоджувати з областю визначення шуканого розв'язку. Позитивними сторонами є те, що багато ортогональних базисів достатньо добре досліджені, прості у використанні та побудовані на їх основі алгоритми розв'язування легко піддаються автоматизації. До негативних сторін можна віднести те, що сумування відповідних рядів, як правило, є некоректною задачею. Далі, не всі критерії, які ставляться до рішень задач, можна задовольнити застосуванням одного ортогонального базису. У зв'язку з тим для більш широкого задоволення критеріїв або модифікуються існуючі базиси, або будуються нові. Одним із шляхів врахування згаданих зауважень є застосування біортогональних розкладів. На сьогодні небагато праць, присвячених їх дослідженню та практичному використанню. Це, в основному, викликано тим, що побудова біортогональних базисів пов'язана зі значними обчислювальними труднощами і вони недостатньо вивчені.

1. Формулювання задачі

В ізотермічному випадку поширеною математичною моделлю руху газу в трубопроводі є система взаємопов'язаних диференціальних рівнянь у частинних похідних

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p(y,t)}{\partial y} + \alpha\rho \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\upsilon^2(y,t)}{2}\right) + \rho g \dfrac{\partial h(y,t)}{\partial y} + \dfrac{\lambda\rho\upsilon^2(y,t)}{2D} + \dfrac{\partial(\rho\upsilon(y,t))}{\partial t} = 0, \\ \dfrac{\partial(\rho\upsilon(y,t))}{\partial y} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial p(y,t)}{\partial t} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

де $\omega = \rho\upsilon$ — масова витрата (швидкість) газу; c — швидкість звуку в газі; α — коефіцієнт Коріоліса; ρ, υ, p — густина, швидкість руху та тиск газу відповідно; λ — коефіцієнт гідравлічного опору; D — діаметр трубопроводу; g — прискорення вільного падіння; h — відносна висота залягання трубопроводу; $t > 0$ — час; $y \in [0,l]$ — лінійна координата, l — довжина трубопроводу.

На практиці граничні умови формулюються на входах і виходах компресорних станцій. Як звичайно, вихідним станом на початку нестаціонарного процесу є стаціонарний розподіл тиску. Тому задача математичної фізики в цьому випадку полягає в такому.

Знайти розв'язок системи (1) за початкового стаціонарного розподілу тиску

$$p(y,0) = \sqrt{p_0^2 - \frac{\lambda zRT}{D}\left(\frac{\rho_s q_s}{s}\right)^2 y} \tag{2}$$

та граничних умов на об'ємні витрати газу

$$q_0(t) = q_{0n} + (q_0 - q_{0n})\,\ell^{-\gamma_0 t}; \tag{3}$$

$$q_l(t) = q_{ln} + (q_l - q_{ln})\,\ell^{-\gamma_l t}, \tag{4}$$

відповідно, на вході та виході трубопроводу.

У цьому випадку p_0 — значення тиску на початку трубопроводу; ρ_s, q_s — значення густини й об'ємної витрати за стандартних умов, $s = \pi D^2/4$; q_0, q_{0n} — об'ємної витрати газу у вихідному та новому стаціонарному стані течії газу і параметр γ_0, який характеризує швидкість переходу з одного стану в інший на початку трубопроводу; q_l, q_{ln}, γ_l — аналогічні параметри в кінці трубопроводу. У разі переходу до масових швидкостей граничні умови такі [9]:

$$\omega_0 = \omega(0,t) = \frac{\rho_s}{s} q_0(t), \ \omega_l = \omega(l,t) = \frac{\rho_s}{s} q_l(t). \tag{5}$$

2. Лінеаризація вихідної нелінійної системи

Лінеаризований варіант системи (1) [9] має вигляд

$$\begin{cases} c_0 \dfrac{\partial p(y,t)}{\partial y} + c_1 \dfrac{\partial \omega(y,t)}{\partial y} + \dfrac{\partial \omega(y,t)}{\partial t} + c_2 \omega(y,t) + c_3 p(y,t) = -c_4, \\ \dfrac{\partial \omega(y,t)}{\partial y} + \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial p(y,t)}{\partial t} = 0. \end{cases} \tag{6}$$

де $a_p = p_1(1 + fp_1) - b_p p_1$, $c_0 = 1 - \alpha \upsilon_c^2 \rho_0 T_0 b_p / (p_0 T)$, $c_1 = \alpha \upsilon_c$, $a_\upsilon = \upsilon_1 + \upsilon_2$, $b_\upsilon = -\upsilon_1 \upsilon_2 - \,$ $-\dfrac{1}{8}(\upsilon_2 - \upsilon_1)^2$, $c_2 = \alpha b_\upsilon / (2D)$, $c_3 = \dfrac{\rho_0 T_0}{p_0 T} b_p \left(g \dfrac{\delta h}{\delta y} + \dfrac{\lambda a_\upsilon}{2D} \right)$, $c_4 = \dfrac{\rho_0 T_0}{p_0 T} a_p \left(g \dfrac{\delta h}{\delta y} + \dfrac{\lambda a_\upsilon}{2D} \right)$, $p \in [p_1, p_2]$, де p_1 та p_2 — межі зміни тиску, υ_c — середня швидкість руху газу в трубопроводі, які приймають відомими; υ_1, υ_2 — межі зміни швидкості руху газу. Для обчислення коефіцієнта стисливості *z*, який описує відмінність від реального газу від ідеального, застосовубть емпіричну формулу $z = 1/(1 + fp)$, де p вимірюють в атмосферах, а $f = \left(24 - 0.21 t^\circ C\right) \cdot 10^{-4}$, $t^\circ C$ — температура газу за Цельсієм; R — газова стала.

Зазначимо, що початковий розподіл тиску (2) отриманий у стаціонарному випадку з нелінійної системи диференціальних рівнянь. Тому для знаходження коректного розв'язку системи (6) необхідно мати його параметричне зображення в стаціонарному випадку. Отже, задача математичної фізики полягає в такому: знайти розв'язок системи (6) за початкових умов (2) та граничних умов (5).

3. Розв'язування задачі

Не зменшуючи загальності, будемо розглядати горизонтальні трубопроводи без врахування сили Коріоліса при постійному значенні коефіцієнта стисливості, тобто $\alpha = 0$ і відповідно $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$. Тому систему (6) запишемо у вигляді

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p(\mathrm{y},t)}{\partial y} + \dfrac{\partial \omega(y,t)}{\partial t} + c_3 p(y,t) = -c_4, \\ \dfrac{\partial \omega(y,t)}{\partial y} + \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial p(y,t)}{\partial t} = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Оскільки, довжина трубопроводу рівна l, тобто $0 \le y \le l$, а функції, за допомогою яких ми будемо розв'язувати дану задачу розглядаються на проміжку $[-1,1]$, то зробимо заміну

$$y = \frac{l(x+1)}{2}, \qquad w(y,t) = w\left(\frac{l(x+1)}{2}, t \right) = W(x,t),$$

$$p(y,t) = p\left(\frac{l(x+1)}{2}, t \right) = P(x,t). \tag{8}$$

Враховуючи (8), систему (7) та умови (2), (5) запишемо у вигляді

$$\begin{cases} \frac{2}{l} c_0 \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial W(x,t)}{\partial t} + c_3 P(x,t) = -c_4, \\ \frac{2}{l} \frac{\partial W(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = 0, \end{cases} \tag{9}$$

$$P(x,0) = \sqrt{p_0^2 - \frac{\lambda z R T}{D} \left(\frac{\rho_s q_s}{s} \right)^2 \frac{l(x+1)}{2}}, \tag{10}$$

$$W_0 = W(-1,t) = \frac{\rho_s}{s} q_0(t), \; W_l = W(1,t) = \frac{\rho_s}{s} q_l(t). \tag{11}$$

Розв'язками системи (9) при умовах (10), (11) будуть функції [12]

$$W(x,t) = \ell^{-\frac{lc_3}{4}x} \sum_{i=1}^{n+2} V_i^{n+\bar{i}}(x) G_i(t),$$

$$P(x,t) = -\frac{2c^2}{l} \ell^{-\frac{lc_3}{4}x} \sum_{i=1}^{n+2} \left(-\frac{lc_3}{4} V_i^{n+\bar{i}}(x) + U_{i-(-1)^{\bar{i}}}^{n-\bar{i}-(-1)^{\bar{i}}}(x) \right) \int_0^t G_i(t) dt + P(x,0),$$

де $V(x)$ — базисні біортогональні функції [10, 11], $V_{n+1}^{n+1}(x) = T'_{n+2}(x)$, $V_{n+2}^{n}(x) = T'_{n+1}(x)$, $\bar{i} = 0$ — для парних значень i, та $\bar{i} = 1$ — для непарних значень i. $T_{n+1} = T_{n+1}(x)$ та $T_{n+2} = T_{n+2}(x)$ поліноми Чебишева степеня $n+1$ та $n+2$, $U(x)$ — квазіортогональні поліноми [10, 11], $G(t)$ — функції по часу [12].

Якщо в отриманих розв'язках повернутися до змінної y, то дістанемо розв'язки системи (7) [12]

$$\omega(y,t) = \ell^{-\frac{lc_3}{4}\frac{2y-l}{l}} \sum_{i=1}^{n+2} V_i^{n+\bar{i}}(y) G_i(t),$$

$$p(y,t) = -\frac{2c^2}{l} \ell^{-\frac{lc_3}{4}\frac{2y-l}{l}} \sum_{i=1}^{n+2} \left(-\frac{lc_3}{4} V_i^{n+\bar{i}}(y) + U_{i-(-1)^{\bar{i}}}^{n-\bar{i}-(-1)^{\bar{i}}}(y) \right) \int_0^t G_i(t) dt + p(y,0).$$

4. Результати обчислень та висновки

Рішення системи рівнянь (7) проводилось за наступних значень параметрів: $l = 100000 м$, $\lambda = 0.01$, $z = 0.908$, $R = 500\, Дж/кг{}^\circ К$, $D = 1.4 м$, $T = 300{}^\circ К$, $q_0 = 894\, м^3/с$, $q_{0n} = 993\, м^3/с$, $q_l = 894\, м^3/с$, $q_{ln} = 993\, м^3/с$, $p_0 = 70 атм$, $p_1 = 58.4 атм$, $\rho_s = \rho_0 = 0.682\; кг/м^3$, $\upsilon_1 = 6\; м/с$, $\upsilon_2 = 12\; м/с$, $\gamma_0 = 0.00069$, $\gamma_l = 0.00075$, $c = 500\; м/с$, $\Delta x = 5000 м$, $\Delta t = 600 с$.

Таблиця 1

Значення масової витрати за різних значень часу t, координати y та n (t у секундах)

t	y = 10000			y = 30000	y = 60000	y = 90000		
	n = 2, 4, 6, 10, 14	n = 18	n = 20	n = 2, 4, 6, 10, 14, 18, 20	n = 2, 4, 6, 10, 14, 18, 20	n = 2, 4, 6, 10, 14	n = 18	n = 20
0	396.11	395.83	395.71	396.17	396.18	396.12	395.83	395.71
600	411.07	410.77	410.65	411.31	411.63	411.89	411.59	411.47
3600	436.35	436.04	435.91	436.50	436.71	436.92	436.60	436.47
5400	438.91	438.59	438.46	438.97	439.06	439.14	438.82	438.69
6000	439.26	438.94	438.81	439.30	439.36	439.43	439.11	438.98
7200	439.64	439.32	439.19	439.66	439.69	439.73	439.41	439.28
9600	439.88	439.56	439.43	439.88	439.89	439.90	439.58	439.45
12000	439.92	439.60	439.47	439.92	439.93	439.93	439.61	439.48

Таблиця 2

Значення тиску за різних значень часу t, координати y та n (t у секундах)

t	y = 10000	y = 30000	y = 60000	y = 90000
	n = 2, 4, 6, 10, 14, 18, 20	n = 2, 4, 6, 10, 14, 18, 20	n = 2, 4, 6, 10, 14, 18, 20	n = 2, 4, 6, 10, 14, 18, 20
0	68.93	66.74	63.31	59.68
600	68.92	66.73	63.30	59.68
3600	68.83	66.64	63.22	59.60
4200	68.82	66.63	63.21	59.59
6000	68.80	66.62	63.20	59.58

Таблиця 3

Значення масової витрати вздовж трубопроводу для різних значень гідравлічного опору

λ	t	y				
		3000	20000	60000	80000	95000
0.00995	0	396.08752	396.14511	396.18335	396.14750	396.09618
	300	404.30520	404.45958	404.74473	404.84299	404.89723
	600	410.98249	411.19387	411.62855	411.81018	411.93092
0.01005	300	404.30518	404.45961	404.74472	404.84300	404.89722
	600	410.98249	411.19390	411.62855	411.81019	411.93092
0.0099	300	404.30519	404.45957	404.74473	404.84299	404.89722
	600	410.98250	411.19385	411.62855	411.81019	411.93092
0.0101	300	404.30520	404.45958	404.74473	404.84300	404.89721
	600	410.98250	411.19387	411.62855	411.81018	411.93092

Таблиця 4

Значення тиску вздовж трубопроводу для різних значень гідравлічного опору

λ	t	y				
		3000	20000	60000	80000	95000
0.00995	0	69.682333	67.854142	63.344721	60.965058	59.117482
	300	69.677020	67.849796	63.342758	60.964343	59.117729
	600	69.668498	67.842060	63.336944	60.959532	59.113689
0.01005	300	69.673821	67.827885	63.272319	60.866734	58.998171
	600	69.665299	67.820149	63.266505	60.861923	58.994131
0.0099	300	69.678621	67.860749	63.377949	61.013089	59.177418
	600	69.670099	67.853012	63.372135	61.008278	59.173378
0.0101	300	69.672222	67.816928	63.237070	60.817870	58.938300
	600	69.663700	67.809191	63.231256	60.813059	58.934260

Таблиця 5

Значення масової витрати та тиску вздовж трубопроводу
для різних значень вхідного тиску

p_0	t	y				
		3000	20000	60000	80000	95000
70.35	0	396.08752	396.14511	396.18335	396.14750	396.09620
	300	404.30520	404.45958	404.74473	404.84298	404.89725
	600	410.98249	411.19387	411.62855	411.81017	411.93093
69.30	300	404.30519	404.45956	404.74472	404.84300	404.89721
	600	410.98249	411.19386	411.62855	411.81020	411.93092
70.70	300	404.30517	404.45961	404.74473	404.84299	404.89722
	600	410.98248	411.19391	411.62856	411.81019	411.93092
69.65	300	69.323810	67.477656	62.920344	60.513043	58.642710
	600	69.315288	67.469920	62.914530	60.508232	58.638670
70.35	300	70.027018	68.199911	63.694322	61.317430	59.472413
	600	70.018496	68.192175	63.688508	61.312619	59.468372
69.30	300	68.972182	67.116354	62.532702	60.109870	58.226581
	600	68.963660	67.108617	62.526888	60.105059	58.222541
70.70	300	70.378597	68.560865	64.080673	61.718669	59.886021
	600	70.370075	68.553129	64.074859	61.713858	59.881980

Висновки.

1. З результатів обчислень випливає, що зміна границь зміни швидкості руху газу υ_1 та υ_2 практично не впливає на кінцевий результат.
2. У таблицях 1 та 2 подані значення масової витрати та тиску за різних значень часу t, координати y та порядків n поліномів Чебишева, на базі яких будуються біортогональні поліноми. Оскільки порядок поліномів n мають незначний вплив, то для зменшення часу обчислень доцільно вибирати поліноми Чебишева невеликих порядків.
3. У таблицях 3-5 показано вплив зміни гідравлічного опору λ та вхідного тиску на результати обчислень розподілу масової витрати та тиску вздовж трубопроводу. Як показує аналіз цих результатів, побудований метод розв'язування задач математичної фізики є стійким до похибок вхідних даних.

Література

[1] *Абрамович М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. — М.: Наука, 1979. — 832 с.
[2] *Глетчер К.* Численные методы на основе метода Галеркина. — М.: Мир, 1988. — 352 с.
[3] *Дзядык В. К.* Аппроксимационные методы решения дифференциальных и инте- гральных уравнений. — К.: Наук. думка, 1998. — 370 с.
[4] *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций поли- номами. — М.: Наука, 1977. — 512 с.
[5] *Канторович Л В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1984. — 752 с.
[6] *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. — М.: Наука, 1987. — 424 с.
[7] *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа. — М.: Гос. изд-во. физ.- мат. лит., 1961. — 524 с.
[8] *Диткин В. А., Прудников А. П.* Операционное исчисление. М.: Высшая школа, 1975. 407 с.

[9] Алгоритми розрахунку гідродинамічних параметрів течії газу в трубопроводах / *Н. Лопух, М. Притула, Я. П'янило, Я. Савула* // Вісник Львів. Ун-ту. Сер.прикл.матем. та інформ. — 2007. — Вип. 12. — С.108-117.

[10] *П'янило Я. Д., Собко В. Г.* Побудова та дослідження біортогональних поліномів на базі многочленів Чебишева // Прикл. проблеми мех. і мат. — 2013. — Вип. 11. — С. 135-141.

[11] *П'янило Я. Д., Собко В. Г.* Дослідження властивостей спектральних розкладів у базисах ортогональних, квазіортогональних і біортогональних поліномів // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — 2014. — Вип. 19. — С. 146-156.

Stability investigation of the spectral method for determining pressure distribution along the pipeline in the non-stationary case in the basis of biorthogonal polynomials

Yaroslaw P'yanylo, Valentyna Sobko

In this paper on the basis of constructed biorthogonal polynomials authors investigated the stability of the proposed method for solving problems of mathematical physics, in particular for calculating unsteady gas flow in pipelines. The way of the problem solving is investigated by the method of separation of variables in the basis of biorthogonal polynomials. The solution of the problem is constructed as a sum of a series of biorthogonal and quasispectral polynomials. The comparative analysis of the solution is carried out for different values of the input parameters. The influence of the method parameters, including the order of partial sum, the functional grid, and the error of calculations on the accuracy of obtained solution is studied. The calculation results are presented in the form of tables.

Исследование устойчивости спектрального метода определения распределения давления вдоль трубопровода в нестационарном случае в базисе биортогональных полиномов

Ярослав Пьяныло, Валентина Собко

В работе на базе построенных авторами биортогональных полиномов исследована устойчивость предложенного метода решения задач математической физики, в частности для расчета нестационарного движения газа в трубопроводах. Исследован способ решения задачи методом разделения переменных в базисе биортогональных полиномов. Решение задачи построено в виде суммы ряда биортогональных и квазиспектральных полиномов. Проведен сравнительный анализ решения для различных значений параметров задачи. Изучено влияние параметров методов, в частности порядка частичной суммы, разрядной сетки и погрешности вычисления на точность полученного решения. Результаты вычислений представлены в виде таблиц.

Отримано 12.12.16