

## Чисельний розв'язок задачі про контакт пружних тіл під дією нормального і дотичного навантажень

Юрій Стреляєв

Запорізький національний університет, вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, 69600, e-mail: strelkiny@gmail.com

*Розглянуто квазістатичну контактну задачу про взаємодію двох ідентично пружних тіл під дією нормальних і дотичних сил з урахуванням тертя Кулона. Задача зведена до серії однотипних систем нелінійних граничних інтегральних рівнянь, кожна з яких відповідає певному кроку навантажування тіл. Для знаходження контактних напружень на кожному кроці навантажування використовувався метод наближеного розв'язання системи інтегральних рівнянь цього кроку, що складався з дискретизації цієї системи рівнянь і застосування ітераційного процесу для отримання розв'язку дискретизованої системи. На прикладі задачі про взаємодію пружної кулі і пружного півпростору досліджено вплив історії навантажування на розподіл дотичних контактних напружень.*

**Ключові слова:** пружне тіло, контактна задача, тертя Кулона, дотичне навантаження, історія навантажування, чисельний розв'язок.

**Вступ.** При контактній взаємодії пружних тіл виникає тертя, що викликає появу дотичних контактних напружень, а також зон проковзування і зчеплення на взаємодіючих поверхнях тіл. При використанні закону тертя Кулона в класичному формулюванні [1] природно очікувати, що розподіл контактних напружень істотно залежить від історії прикладання зовнішнього навантаження. Для дослідження цієї залежності природно для початку розглянути задачу про контакт двох пружних тіл, матеріали яких однакові. Для подібних задач були отримані наближені аналітичні [2, 3] і чисельні [4-7] розв'язки без урахування історії навантажування, що природно породжує питання, якій історії навантажування відповідають отримані розв'язки. Спроби врахувати історію навантаження при фрикційній взаємодії пружних тіл робилися в роботах [8-11] за певних обмежень на умови контакту тіл. Автори цих робіт розглядали плоскі [8, 10, 11] і осесиметричні [9] задачі. В роботі [8] роль історії навантаження досліджена на прикладі задачі про контакт двох ідентичних пружних дисків під дією простого навантаження, коли нормальні зусилля і крутний момент, що діють на диски, зростають одночасно з постійним коефіцієнтом пропорційності. Врахування історії навантаження при взаємодії сферичних тіл за умов повного зчеплення здійснено в роботі [9] за допомогою інкрементального підходу. В роботах [10, 11] проаналізовано вплив історії навантаження на контактні напруження двох пружних тіл з узгодженими поверхнями, що мають локальні

нерівності, при їх послідовному [11] і пропорційному [10, 11] навантаженні стискальними і зсувними зусиллями. Залежність розв'язків просторових контактних задач від історії навантаження при більш загальних умовах контакту тіл і більш складних законах їх навантаження вивчено мало.

Мета даної роботи полягає в дослідженні впливу історії прикладання зовнішніх навантажень на розподіл дотичних контактних напружень при взаємодії двох твердих тіл, що мають однакові пружні властивості. При цьому для перевірки правильності отриманих результатів доцільно знайти таку історію навантажування взаємодіючих тіл, яка відповідає статичному розв'язку [3] для задачі про контакт пружної кулі з пружним півпростором.

### 1. Постановка контактної задачі

Розглянемо спочатку статичну постановку задачі. Нехай два однорідних лінійно-пружних ізотропних тіла в ненапруженому стані дотикаються в точці  $O$ . Нехай поверхні тіл мають в точці  $O$  загальну дотичну площину  $\Pi$  і загальну нормаль  $\eta$ . Введемо у просторі прямокутну декартову систему координат з початком в точці  $O$ , осями  $x, y$ , що лежать в площині  $\Pi$  і віссю  $z$ , спрямованою за нормаллю  $\eta$  (рис. 1). Нехай під дією спрямованої вздовж осі  $z$  стискаючою сили  $P_z$  тіла вступають у контакт через невелику поверхню в околі точки  $O$ . Припустимо, що до тіл прикладається також додаткова система сил таких, що кожне тіло діє на інше через поверхню контакту з перпендикулярною осі  $z$  силою  $P_\tau$ . Потрібно знайти поверхню контакту і розподіл контактних напружень на цій поверхні.

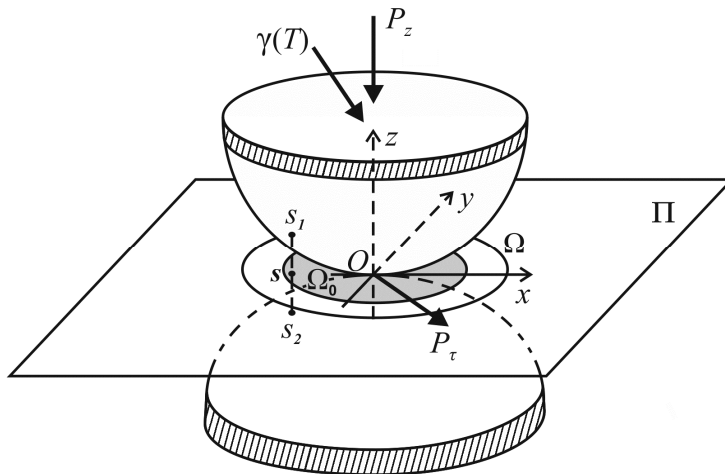


Рис. 1 — Схема взаємодії пружних тіл

Нехай взаємодіючі тіла мають однакові пружні властивості. Приймаючи відносно цих тіл основні гіпотези Герца [1], будемо додатково вважати, що на

поверхні контакту виникає тертя, що підкоряється закону Кулона. З урахуванням цих припущень поверхнею контакту є частина площини  $Oxy$ , обмежена еліпсом [3]. При цьому нормальні контактні напруження можна знайти за формулами Герца незалежно від дотичних контактних напружень [1]. Випадок коли  $P_z = P_x$ , де  $P_x$  — дотична сила, що діє на ділянку контакту уздовж осі  $Ox$ , було розглянуто Міндліним [3], який показав, що в області контакту утворюються зона зчеплення і зона проковзування. Для розподілу дотичних поверхневих напружень в цих зонах, у випадку кругової ділянки контакту, Міндлін отримав наступні формули:

$$X_\eta = \begin{cases} \frac{3\mu P_z}{2\pi a^2} \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}, & \text{если } a' \leq \rho \leq a; \\ \frac{3\mu P_z}{2\pi a^2} \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{3\mu P_z a'}{2\pi a^3} \left(1 - \frac{\rho^2}{a'^2}\right)^{\frac{1}{2}}, & \text{если } \rho \leq a'; \end{cases} \quad (1)$$

де  $X_\eta$  — проекція на вісь  $Ox$  вектора поверхневого напруження, що діє в точці ділянки контакту з координатами  $(x, y)$ ;  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  — відстань від точки  $(x, y)$  до точки  $O$ ;  $a$  — радіус ділянки контакту;  $a'$  — радіус зони зчеплення;  $\mu$  — коефіцієнт тертя. Зв'язок між радіусами  $a$  і  $a'$  виражається формулою [3]:

$$a' = a \left(1 - \frac{P_x}{\mu P_z}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Зауважимо, що формули (1) не дозволяють враховувати історію навантажування тіл, при якій були досягнуті задані значення сил  $P_z$  і  $P_x$ .

Для того щоб оцінити вплив історії прикладання зовнішнього навантаження на розподіл дотичних напружень на поверхні контакту будемо розглядати задачу в квазістатичній постановці. Будемо вважати, що тіла зчеплені з жорсткими опорами [12] і під дією невідомого заздалегідь зовнішнього навантаження, що змінюється у часі, опора верхнього тіла здійснює задане залежне від часу  $t$  переміщення  $\gamma(t)$ , а опора нижнього тіла залишається нерухомою. Вважаючи, що  $\gamma(t)$  повільно змінюється при зміні часу  $t$  від 0 до фіксованого значення  $T$ , будемо нехтувати інерційними і хвильовими ефектами. Будемо також вважати, що в кінцевий момент часу, тіла діють одне на одне через ділянку контакту з силами  $P_z$  і  $P_x$ . Слід зазначити, що заданим кінцевим значенням  $P_z$  і  $P_x$  можуть відповідати різні закони навантажування  $\gamma(t)$ . Таким чином, змінюючи закон  $\gamma(t)$  можна дослідити залежність розв'язку задачі від історії прикладання зовнішнього навантаження.

Граничні умови контактної взаємодії тіл в фіксований момент часу  $t$  будемо задавати в деякій плоскій обмеженій області  $\Omega \subset \Pi$ , що містить у собі невідому ділянку контакту  $\Omega_0$  (див. рис. 1), наступною системою співвідношень:

$$\begin{cases} p_1(s,t) \geq 0, v_1(s,t) \geq 0, p_1(s,t) \cdot v_1(s,t) \geq 0, \\ \sqrt{p_2^2(s,t) + p_3^2(s,t)} \leq \mu \cdot p_1(s,t), \\ \sqrt{\dot{v}_2^2(s,t) + \dot{v}_3^2(s,t)} \cdot p_2(s,t) = -\mu \cdot p_1(s,t) \cdot \dot{v}_2(s,t), \\ \sqrt{\dot{v}_2^2(s,t) + \dot{v}_3^2(s,t)} \cdot p_3(s,t) = -\mu \cdot p_1(s,t) \cdot \dot{v}_3(s,t), \end{cases} \quad s \in \Omega, t \in [0, T], \quad (2)$$

де  $s = (x, y)$  — довільна точка області  $\Omega$ , яка визначає пару протилежних точок  $s_1, s_2$  поверхонь верхнього і нижнього тіл (див. рис. 1);  $p_1(s, t), p_2(s, t), p_3(s, t)$  — складові розподіленого контактного навантаження, що передається в момент часу  $t$  від нижнього тіла до верхнього через точки області  $\Omega$  (тут і нижче індекси 1, 2 і 3 відповідають напрямом осей  $z, x$  і  $y$ );  $v_1(s, t), v_2(s, t), v_3(s, t)$  — зміщення точки  $s_1$  відносно точки  $s_2$ ;  $\mu > 0$  — коефіцієнт тертя;  $\dot{v}_2(s, t), \dot{v}_3(s, t)$  — компоненти вектора швидкості проковзування точки  $s_1$  відносно точки  $s_2$ . Перше з співвідношень (2) виражає невід'ємність контактної тиску, друге означає відсутність взаємного проникнення тіл, третє — відсутність контактної тиску за межами ділянки контакту. Останні три співвідношення системи (2) виражають закон тертя Кулона. У кінцевий момент часу  $T$  для невідомих контактних напружень  $p_1, p_2, p_3$  повинні виконуватися наступні умови:

$$P_z = \int_{\Omega} p_1(s, T) ds; \quad P_\tau = \int_{\Omega} \sqrt{p_2^2(s, T) + p_3^2(s, T)} ds.$$

Відзначимо, що з співвідношень (2) випливає, що при відмінності від нуля в момент часу  $t$  швидкості відносного проковзування в точці  $s$ , в цій точці виконується рівність  $\sqrt{p_2^2(s, t) + p_3^2(s, t)} = \mu \cdot p_1(s, t)$ , а вектори  $p_\tau(s, t) = (p_2(s, t), p_3(s, t))$  і  $\dot{v}_\tau(s, t) = (\dot{v}_2(s, t), \dot{v}_3(s, t))$  мають протилежні напрями.

## 2. Нелінійні інтегральні рівняння контактної задачі

Розіб'ємо відрізок  $[0, T]$  системою точок  $t_i$  таких, що  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_l = T$ . Процес взаємодії тіл будемо розглядати як кінцеве число  $l$  послідовних станів рівноваги (кроків навантажування) в моменти часу  $t_i$ . При певних припущеннях [12] система (2) на кожному  $i$ -му кроці навантажування еквівалентна наступній системі нелінійних інтегральних рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{1i}(s) = h \left( p_{1i}(s) - E \cdot \left( \sum_{j=1}^3 A_{1j}(p_{ji})_s + \delta_0(s) + \Delta_{1i} \right) \right); \\ p_{2i}(s) = q \left( p_{2i}(s) - E \cdot \left( \sum_{j=1}^3 A_{2j}(p_{ji})_s + \tilde{\Delta}_{2i}(s) \right), \right. \\ \quad \left. p_{3i}(s) - E \cdot \left( \sum_{j=1}^3 A_{3j}(p_{ji})_s + \tilde{\Delta}_{3i}(s) \right), \mu \cdot p_{1i-1}(s) \right); \\ p_{3i}(s) = q \left( p_{3i}(s) - E \cdot \left( \sum_{j=1}^3 A_{3j}(p_{ji})_s + \tilde{\Delta}_{3i}(s) \right), \right. \\ \quad \left. p_{2i}(s) - E \cdot \left( \sum_{j=1}^3 A_{2j}(p_{ji})_s + \tilde{\Delta}_{2i}(s) \right), \mu \cdot p_{1i-1}(s) \right); \\ s \in \Omega; \quad i = \overline{1, l}; \end{array} \right. \quad (3)$$

де  $p_{1i}(s), p_{2i}(s), p_{3i}(s)$  — невідомі функції з простору  $L_2(\Omega)$  [13], що задають розподіл контактного навантаження в області  $\Omega$  на  $i$ -му кроці навантажування;  $\Delta_{1i}, \Delta_{2i}, \Delta_{3i}$  — компоненти вектора  $\gamma(t_i)$ ;  $\delta_0(s) \in L_2(\Omega)$  — відома функція, яка визначає початковий зазор між тілами;  $E$  — довільне додатне число;  $A_{kj} : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$  — інтегральні оператори впливу поверхневих напружень на поверхневі пружні переміщення, що задаються співвідношеннями

$$A_{kj}(x)_s = \int_{\Omega} K_{kj}(s, s') \cdot x(s') ds', \quad (k, j = \overline{1, 3}).$$

Ядра  $K_{kj}(s, s')$  цих операторів визначаються з розв'язку Буссінеска-Черруті [1].

Функції  $\tilde{\Delta}_{2i}(s), \tilde{\Delta}_{3i}(s) \in L_2(\Omega)$ , що входять в (3), визначаються співвідношеннями:

$$\tilde{\Delta}_{2i}(s) = \Delta_{2i} - \sum_{j=1}^3 A_{2j}(p_{ji-1})_s - \Delta_{2i-1}; \quad \tilde{\Delta}_{3i}(s) = \Delta_{3i} - \sum_{j=1}^3 A_{3j}(p_{ji-1})_s - \Delta_{3i-1}.$$

Допоміжні функції  $h$  і  $q$ , що входять в (3), мають наступний вигляд:

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0; \\ 0, & \text{если } x < 0; \end{cases} \quad q(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{если } \sqrt{x^2 + y^2} \leq z; \\ x \cdot \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{если } \sqrt{x^2 + y^2} > z. \end{cases}$$

Таким чином, контактна задача зводиться до послідовного розв'язування серії систем однотипних нелінійних інтегральних рівнянь (3) відносно невідомих функцій  $p_{1i}(s), p_{2i}(s), p_{3i}(s)$ .

### 3. Алгоритм чисельного розв'язання інтегральних рівнянь контактної задачі

Для отримання на кожному кроці навантажування чисельного розв'язку системи (3) задамо область  $\Omega$  у вигляді відкритого квадрата з центром в точці  $O$  і сторонами, паралельними осям  $x, y$ . Розіб'ємо  $\Omega$  на  $n^2$  однакових квадратів  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n^2}$ , орієнтованих подібно  $\Omega$ . Будемо вважати, що при кожному фіксованому значенні  $i$  на кожному квадраті  $\omega_k$  невідомі функції  $p_{1i}(s), p_{2i}(s), p_{3i}(s)$  приймають невідомі сталі значення  $x_{3k-2i}, x_{3k-1i}, x_{3ki}$ . Тоді для серії систем (3) можна отримати дискретний аналог цієї серії у вигляді наступної сукупності систем нелінійних скалярних рівнянь [12]:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{3k-2i} = h(x_{3k-2i} - E \cdot (\sum_{j=1}^{3n^2} a_{3k-2j} \cdot x_{ji} - b_{3k-2i})); \\ x_{3k-1i} = q(x_{3k-1i} - E \cdot (\sum_{j=1}^{3n^2} a_{3k-1j} \cdot x_{ji} - b_{3k-1i})), \\ x_{3ki} - E \cdot (\sum_{j=1}^{3n^2} a_{3kj} \cdot x_{ji} - b_{3ki}), \mu \cdot x_{3k-2i-1}); \\ x_{3ki} = q(x_{3ki} - E \cdot (\sum_{j=1}^{3n^2} a_{3kj} \cdot x_{ji} - b_{3ki})), \\ x_{3k-1i} - E \cdot (\sum_{j=1}^{3n^2} a_{3k-1j} \cdot x_{ji} - b_{3k-1i}), \mu \cdot x_{3k-2i-1}); k = \overline{1, n^2}, i = \overline{1, l}. \end{array} \right. \quad (4)$$

У системах (4) числові параметри  $a_{kj}$  є елементами матриці податливості взаємодіючих тіл, а  $b_{ki}$  визначають умови навантаження і конфігурацію взаємодіючих тіл на  $i$ -му кроці навантажування [12].

Для отримання наближеного розв'язку системи (4) на кожному  $i$ -му кроці навантажування можна запропонувати ітераційний процес

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( x_{1i}^{(0)}, x_{2i}^{(0)}, \dots, x_{3n^2 i}^{(0)} \right) \in R^{3n^2}; \quad i = \overline{1, l}; \quad k = \overline{1, n^2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \\ x_{3k-2i}^{(m+1)} = h \left( x_{3k-2i}^{(m)} - E \cdot \left( \sum_{j=1}^{3n^2} a_{3k-2j} x_{ji}^{(m)} - b_{3k-2i} \right) \right); \\ x_{3k-1i}^{(m+1)} = q \left( x_{3k-1i}^{(m)} - E \cdot \left( \sum_{j=1}^{3n^2} a_{3k-1j} x_{ji}^{(m)} - b_{3k-1i} \right) \right); \\ x_{3ki}^{(m)} - E \cdot \left( \sum_{j=1}^{3n^2} a_{3kj} x_{ji}^{(m)} - b_{3ki} \right), \mu \cdot x_{3k-2i-1}^{(m)}; \\ x_{3ki}^{(m+1)} = q \left( x_{3ki}^{(m)} - E \cdot \left( \sum_{j=1}^{3n^2} a_{3kj} x_{ji}^{(m)} - b_{3ki} \right) \right); \\ x_{3k-1i}^{(m)} - E \cdot \left( \sum_{j=1}^{3n^2} a_{3k-1j} x_{ji}^{(m)} - b_{3k-1i} \right), \mu \cdot x_{3k-2i-1}^{(m)}; \end{array} \right. \quad (5)$$

Збіжність ітераційного процесу (5) до розв'язку системи (4) буде мати місце незалежно від вибору початкового наближення  $(x_{1i}^{(0)}, x_{2i}^{(0)}, \dots, x_{3n^2 i}^{(0)})$  в  $3n^2$ -вимірному евклідовому просторі  $R^{3n^2}$  за умови, що матриця  $A_0 = \{a_{kj}\}$   $k, j = \overline{1, 3n^2}$  є симетричною і додатновизначеною, а додатна константа  $E$ , що входить в (5), задовольняє нерівності  $E < \left( \max_{1 \leq i \leq 3n^2} \sum_{j=1}^{3n^2} |a_{ij}| \right)^{-1}$  [12].

#### 4. Чисельні результати

Для дослідження впливу історії навантажування на розподіл контактних напружень була розглянута задача про взаємодію пружної кулі і пружного півпростору. Використовувалися наступні вихідні дані: радіус кулі —  $0,3 \text{ м}$ ; кінцеві значення нормальної і дотичної сили —  $P_z = 71,5 \text{ кН}$ ,  $P_x = 11,2 \text{ кН}$ ; модулі Юнга —  $E_1 = E_2 = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ; коефіцієнти Пуассона —  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ . Коефіцієнт тертя  $\mu$  був прийнятий рівним  $0,2$ . Для виконання чисельних розрахунків використовувалося розбиття  $\Omega$  на  $41 \times 41 = 1681$  однакових квадратних граничних елемента площею  $6,76 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2$ . Розрахунки виконувалися в наступному порядку. Спочатку, при одному кроці навантажування, згідно статичної постановки контактної задачі [14, 15], були визначені величини жорстких зміщень кулі, які відповідають заданим значенням сил  $P_z$  і  $P_x$ . Знайдені величини жорстких зміщень склали:  $\Delta_1 = 8,947 \cdot 10^{-5} \text{ м}$ ,  $\Delta_2 = 1,389 \cdot 10^{-5} \text{ м}$ ,  $\Delta_3 = 0$ . Потім, розглядалися різні багатокрокові історії навантажування, для яких кінцеві значення жорстких

зміщень  $\Delta_{1l}, \Delta_{2l}$  і  $\Delta_{3l}$  співпадали зі знайденими значеннями  $\Delta_1, \Delta_2$  і  $\Delta_3$ . Отримані в центрах граничних елементів наближені значення дотичних контактних напружень з'являлися зі значеннями цих напружень, знайденими за формулами (1) при  $\frac{P_x}{\mu P_z} = 0,78$  і  $\frac{a'}{a} = 0,6$ . Основні числові результати проілюстровані на рис. 2.

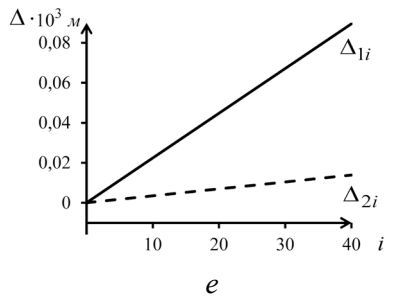
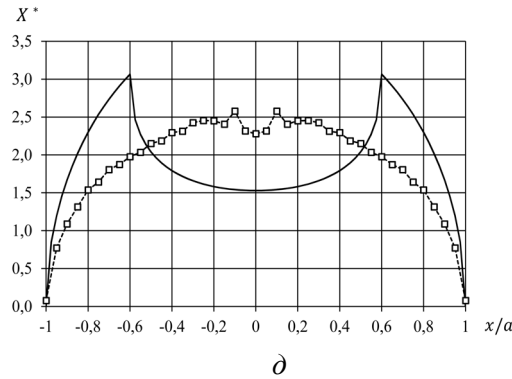
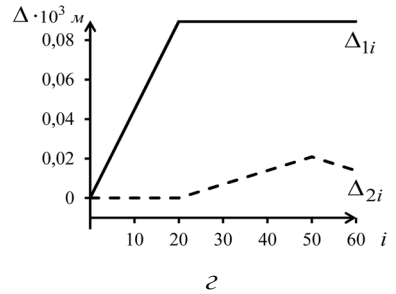
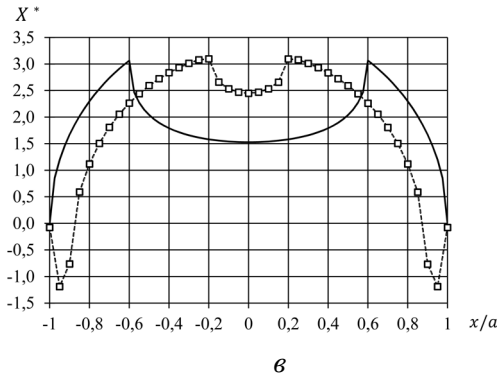
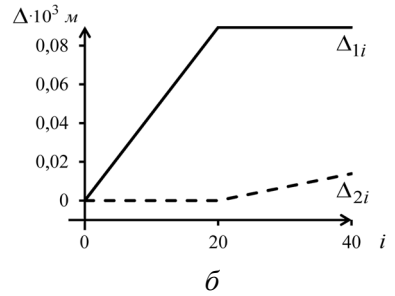
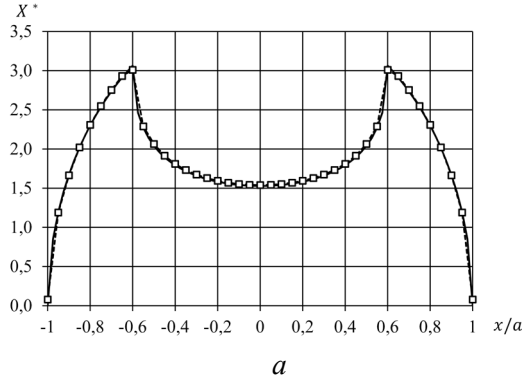


Рис. 2 — Розподіли безрозмірних дотичних напружень  $X^*$  (а, в, д) при відповідних історіях навантажування (б, з, е).



Тут безрозмірна величина  $X^* = \frac{2\pi a^2 X_\eta}{P_z}$  визначає дотичні контактні напруження

в центрах граничних елементів, що лежать на осі  $Ox$  (в аналітичному розв'язку [3]  $X_\eta$  визначається формулою (1) за умови, що  $y=0$ , в численних розв'язках  $X_\eta = p_{2l}$ );  $x/a$  — безрозмірна координата точки на осі  $Ox$ ;  $i$  — номер кроку навантажування;  $\Delta \cdot 10^3$  — абсолютна величина нормального  $\Delta_{1i}$  (суцільна лінія на рис. 2 б, г, е) і дотичного  $\Delta_{2i}$  (пунктирна лінія на рис. 2 б, г, е) жорстких зміщень кулі на  $i$ -му кроці навантажування ( $\Delta_{3i} = 0 \forall i = \overline{1, l}$  для всіх історій навантажування). Суцільна лінія на рис. 2 а, в, д відповідає розв'язку Міндліна, що визначається формулами (1); пунктирна лінія з квадратами відповідає отриманим чисельним розв'язкам.

Дані наведені на рис. 2 а свідчать про хорошу відповідність аналітичного розв'язку [3] і чисельного розв'язку квазістатичної задачі у випадку, якщо історія навантажування складається з двох послідовних етапів: початкового нормального вдавнення кулі в півпростір (1-20 кроки навантажування на рис. 2 б) і наступного дотичного зсуву кулі (21-40 кроки навантажування на рис. 2 б) при постійній стискаючій силі. Максимальна відносна похибка отриманого розв'язку по відношенню до максимального значення величини  $X^*$ , знайденої згідно [3], склала приблизно 2%.

Результати, наведені на рис. 2 в, показують, що у випадку немонотонного дотичного навантажування («навантаження — розвантаження» — рис. 2 г) отриманий розв'язок істотно відрізняється від розв'язку [3] (відносна похибка порівнюваних величин  $X^*$  склала приблизно 67%). Слід також зазначити, що наявність етапу дотичного розвантаження призводить до того, що точки максимуму дотичних напружень значно зміщуються до центру ділянки контакту, а поблизу її межі ці напруження змінюють знак. На рис. 2 д, е наведені результати, що відповідають навантажуванню, при якому нормальна і дотична сили зростають до заданих значень одночасно. У цьому випадку розподіл дотичних напружень є приблизно пропорційним розподілу нормальних контактних тисків. Похибка по відношенню до розв'язку Міндліна тут склала приблизно 30%.

**Висновки.** Досліджено вплив історії навантажування на розв'язок квазістатичної контактної задачі про взаємодію двох ідентично пружних тіл під дією нормального і дотичного навантажень з урахуванням тертя Кулона. Отримані результати свідчать про те, що якісні характеристики контакту тіл неможливо встановити за кінцевими значеннями діючих на тіла нормальної і дотичної сил, не враховуючи, яким чином ці кінцеві значення були досягнуті у процесі навантажування. Встановлено, що розв'язок даної задачі збігається з розв'язком Міндліна [3] лише за умови, що історія навантажування тіл складається з двох

послідовних монотонних етапів: етапу зростання нормальної сили і наступного етапу зростання дотичної сили при незмінній нормальній силі. Для інших історій навантажування результати істотно відрізняються від розв'язку Міндліна.

## Література

- [1] Джонсон К. Механика контактного взаимодействия / Пер. с англ. В. Э. Наумова, А. А. Спектора под ред. Р. В. Гольдштейна. — М.: Мир, — 1989. — 510 с.
- [2] Cattaneo C. Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli stozzi // Rend. Dell'Accademia nazionale dei Lincei. — 1938. — Vol. 27, Ser. 6. — P. 342-348, 434-436, 474-478.
- [3] Mindlin R.D. Compliance of elastic bodies in contact // Trans. ASME, J. Appl. Mech. — 1949. — Vol. 16, №3. — P 259-268.
- [4] Munisamy R.L., Hills D.A., Nowell D. Static axisymmetric Hertzian contacts subject to shearing forces // Journal of Applied Mechanics. — 1994. — Vol. 61. P. 278-283.
- [5] Keer L.M., Ahmadi N., Mura T. Tangential loading of elastic bodies in contact // Comput. Struct. — 1984. — Vol. 19. P. 93-101.
- [6] Bjorklund S., Andersson S. A numerical method for real elastic contacts subjected to normal and tangential loading // Wear. — 1994. — 179. P. 117-122.
- [7] Liu C. H., Yih-Hong Lin, Po-Hsuan Lin A numerical analysis of partial slip problems under Hertzian contacts // Meccanica. — 2007. — Vol. 42. P. 197-206.
- [8] Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. Роль истории нагружения в механике контактного взаимодействия при учете сил трения в зоне контакта // Изв. РАН. Механика твердого тела. — 2002. — № 4. — С. 16-25.
- [9] Моссаковский В. И. Сжатие упругих тел в условиях сцепления // Прикл. ма- тематика и механика. — 1963. — 27, вып. 3. — С. 418-427.
- [10] Мартиняк Р.М., Маланчук Н.І., Монастирський Б.С. Пружна взаємодія двох півплощин за локального зсуву границь на ділянці міжконтактного просвіту // Мат. методи та фіз. — мех. поля. — 2005. — 48, № 3. — С. 101-109.
- [11] Маланчук Н.І. Вплив історії навантаження на контактні напруження тіл з узгодженими поверхнями // Прикл. пробл. мех. і мат. — 2009. — Вип. 7 — С. —167-171.
- [12] Стреляев Ю.М. Решение квазистатической контактной задачи теории упругости с учетом трения / Ю.М. Стреляев // Вісник ЗНУ. Математичне моделювання і прикладна механіка. Фізико-математичні науки. — 2014. — № 2. — С.161-172.
- [13] Канторович Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. — М.: Наука, — 1984. — 752 с.
- [14] Александров А.И. Метод нелинейных граничных интегральных уравнений для решения пространственных контактных задач о взаимодействии упругих тел при наличии трения / А. И. Александров // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. — 2010. — Вип. 5, т. 18. — С. 26-38.
- [15] Александров А.И. Метод решения пространственной контактной задачи о взаимодействии двух упругих тел при наличии трения между ними / А. И. Александров // Математичні методи і фізико-механічні поля. — 2013. — Т.56, № 3. — С. 29-42.

## Numerical solution of contact problem for elastic bodies under the action of normal and tangential loadings

Yurii Streliaiev

*The quasistatic contact problem of two identically elastic bodies' interaction with Coulomb friction under the action of normal and tangential forces is considered. The problem is reduced to a series of similar systems of nonlinear boundary integral equations. Each of the systems in this series corresponds to a step of bodies loading. A method of an approximate solution of the integral equations is applied to obtaining the contact stresses at the each step of loading. This method*

Юрій Стреляєв

Чисельний розв'язок задачі про контакт пружних тіл під дією нормального...

*consists in discretization of the system of equations and the use of an iterative process for solving discretized system. The influence of loading history on the distribution of tangential contact stresses is studied for a problem of the interaction of an elastic sphere and an elastic half-space.*

## **Численное решение задачи о контакте упругих тел под действием нормальной и касательной нагрузок**

Юрий Стреляев

*Рассмотрена квазистатическая контактная задача о взаимодействии двух идентично упругих тел под действием нормальных и касательных сил с учетом трения Кулона. Задача сведена к серии однотипных систем нелинейных граничных интегральных уравнений, каждая из которых соответствует определенному шагу нагружения тел. Для нахождения контактных напряжений на каждом шаге нагружения использован метод приближённого решения системы интегральных уравнений этого шага, состоящий в дискретизации этой системы уравнений и применении итерационного процесса для получения решения дискретизированной системы. На примере задачи о взаимодействии упругого шара и упругого полупространства исследовано влияние истории нагружения на распределение касательных контактных напряжений.*

Отримано 15.10.16