УДК 536.12:620.198

Аналітичний роз’вязок крайової задачі теплопровідності для системи півпростір-багатошарове покриття з неоднорідною початковою умовою за конвективного теплообміну з середовищем

Віктор Шевчук[1], Олександр Гаврись[2]

[1] к. ф.-м. н., ст. н. с., Інститут прикладних проблеми механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3-б, Львів, 79060, e-mail: shevchuk@iapmm.lviv.ua
[2] к. ф.-м. н., Інститут прикладних проблеми механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3-б, Львів, 79060, e-mail: dept11@iapmm.lviv.ua

З використанням інтегрального перетворення Лапласа та узагальнених граничних умов отримано аналітичний розв’язок одновимірної крайової задачі теплопровідності з неоднорідною початковою умовою за конвективної взаємодії півпростору з довкіллям через багатошарове покриття.

Ключові слова: півпростір, багатошарове покриття, конвективний теплообмін, неоднорідна початкова умова, узагальнена гранична умова, інтегральне перетворення Лапласа.

Вступ. Серед різноманітних способів зміцнення елементів конструкцій та деталей машин і механізмів з багатошаровими покриттями важливе місце займають термічні методи, які включають в себе певну кількість неперервних циклів нагрівання та охолодження таких об’єктів [1]. Якщо в момент початку нагрівання виробу з покриттям початковий розподіл температури вважається відомим і однорідним, то після закінчення деякого періоду нагрівання і початку процесу охолодження такий розподіл температури є, здебільшого, неоднорідним. Останній факт спричиняє виникнення певних математичних труднощів при побудові аналітичних розв’язків відповідних нестаціонарних крайових задач теплопровідності з неоднорідною початковою та некласичною граничною умовами.

Для побудови аналітичних розв’язків лінійних задач нестаціонарної теплопровідності широко застосовуються методи Фур’є, функцій Гріна, теплових потенціалів, інтегральних перетворень в скінчених і нескінченних межах та інші. Методи інтегральних перетворень мають низку переваг: стандартність методик застосування, отримання розв’язків у зручному для розрахунків вигляді, наявність таблиць відповідностей між зображеннями та оригіналами функцій [2]. Для випадків, коли складові тіла є безмежними або напівбезмежними областями, зручним є застосування методу інтегрального перетворення Лапласа [3].

Так, в [4] методом інтегрального перетворення Лапласа отримано розв'язки нестаціонарних крайових задач теплопровідності для тіл лише зі сталим розподілом початкової температури.

В [3] зазначається, що недоліком інтегрального перетворення Лапласа є труднощі, які виникають при розв'язуванні задач, коли початкова умова задається у вигляді функції просторових координат.

Спроба подолати вищезгаданий недолік інтегрального перетворення Лапласа реалізована в [5], де шляхом відповідної редукції задачу теплопровідності з неоднорідною початковою умовою зведено до задачі з нульовою початковою умовою та в [6], де використовується принцип суперпозиції. Такі підходи дозволяють використовувати вже відомі розв'язки для деяких конкретних заданих функцій потужностей джерел тепла [5] та простіших задач [6], але, однак, не вирішують проблеми для випадку довільної функції початкового розподілу температури.

В [7] для випадку довільної функції розподілу початкової температури саме інтегральним перетворенням Лапласа отримано аналітичні розв'язки задачі теплопровідності для тіл канонічної форми з граничною умовою третього роду.

Для випадку неоднорідного початкового розподілу температури в багатошарових тілах аналітичні розв'язки відповідних одновимірних задач теплопровідності отримано для двох- [8, 9], трьох- [10-12], n-шарових [13] тіл. Альтернативою застосуванню цих розв'язків для розрахунку температурних полів у тілах з тонкими покриттями є використання більш ефективного підходу, пов'язаного з моделюванням впливу таких покриттів узагальненими граничними умовами [14-18], який дозволяє отримувати простіші та зручніші для практичного використання аналітичні розв'язки.

З урахуванням низки переваг застосування інтегрального перетворення Лапласа до розв'язання нестаціонарних задач теплопровідності і для збереження єдності методології розв'язування задач теплопровідності для тіл з багатошаровими покриттями [19, 20], в даній роботі з використанням узагальненої граничної умови та інтегрального перетворення Лапласа отримано аналітичний розв'язок нестаціонарної одновимірної задачі теплопровідності для півпростору з неоднорідною початковою умовою за конвективного теплообміну з зовнішнім середовищем через тонке багатошарове покриття.

1. Постановка задачі теплопровідності

Розглядається процес конвективного теплообміну півпростору з середовищем через n-шарове покриття товщиною $\delta = \sum_{i=1}^{n} \delta_i$. Початок координати $z = 0$ розміщено на контактній поверхні покриття з півпростором, а додатний відлік такої координати спрямовано вглиб основи.

Рівняння теплопровідності має наступний вигляд

$$\frac{\partial t_j}{\partial \tau} = a_j \frac{\partial^2 t_j}{\partial z^2}, \; j = \mathrm{T}, 1, 2, 3, ..., n; \tag{1}$$

початкова умова

$$t_{\mathrm{T}|\tau=0} = f(z), \quad 0 \le z < \infty; \quad t_{i|\tau=0} = g_i(z), \; -\delta \le z \le 0, \; i = 1, 2, ..., n; \tag{2}$$

гранична умова конвективного теплообміну між покриттям і середовищем

$$\lambda_n \frac{\partial t_n}{\partial z} = \mu\left(t_n - t_C\right) \; \text{ при } \; z = z_n = -\delta; \tag{3}$$

умови ідеального теплового контакту на поверхнях розділу шарів покриття та покриття з тілом

$$t_i = t_{i-1}, \; \lambda_i \frac{\partial t_i}{\partial z} = \lambda_{i-1} \frac{\partial t_{i-1}}{\partial z} \; \text{ при } \; z = z_{i-1} = -\sum_{m=1}^{i-1} \delta_m, \; i = 2, ..., n;$$

$$t_1 = t_{\mathrm{T}}, \; \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial z} = \lambda_{\mathrm{T}} \frac{\partial t_{\mathrm{T}}}{\partial z} \; \text{ при } \; z = z_0 = 0; \tag{4}$$

умова на безмежності

$$\lim_{z \to \infty} t_{\mathrm{T}} = \lim_{z \to \infty} f(z). \tag{5}$$

У формулах (1)–(5) уведені наступні позначення: t, $a = \lambda / \omega$, λ, ω, τ — температура, температуропровідність, теплопровідність, теплоємність і час; μ — коефіцієнт теплообміну між поверхнею покриття і середовищем.

Індексами i, Т та С позначено величини, що відносяться до i-го шару покриття, тіла (півпростору) та середовища відповідно.

2. Розв'язування задачі теплопровідності в півпросторі

Для розв'язування задачі теплопровідності (1)-(5) використано підхід, який ґрунтується на моделюванні впливу покриття на теплоперенос у системі узагальненими граничними умовами [16, 18-20].

В даному випадку ця узагальнена гранична умова записана з урахуванням неоднорідності початкового розподілу температури в шарах покриття і має вигляд

$$\lambda_{\mathrm{T}} \left(1 + \frac{\mu}{H}\right) \frac{\partial t_{\mathrm{T}}}{\partial z} + \mu\left(t_{\mathrm{T}} - t_C\right) = \Omega \frac{\partial t_{\mathrm{T}}}{\partial \tau}, \; t_{\mathrm{T}|\tau=0} = t_0 \; \text{ при } \; z = 0, \tag{6}$$

де $t_0 = \frac{1}{\delta}\left(\sum_{i=1}^{n}\int_{z_{i-1}}^{z_i} g_i(\varsigma)d\varsigma\right)$, $\Omega = \sum_{i=1}^{n}\omega_i\delta_i$, $H^{-1} = \sum_{i=1}^{n}\delta_i/\lambda_i$ — усереднене значення початкової температури за товщиною багатошарового покриття, зведені теплоємність і термоопір покриття відповідно.

Розв'язок рівняння (1) в півпросторі з врахуванням умов (2), (5), (6) в трансформантах Лапласа $\tilde{t}_\text{T}(z.s) = \text{L}\left[t_\text{T}(z,\tau)\right] = \int_0^\infty t_\text{T}(z,\tau)e^{-s\tau}d\tau$ має наступний вигляд:

$$\tilde{t}_\text{T}(z,s) = \frac{q}{2s}\int_0^\infty f(\varsigma)e^{-q|z-\varsigma|}d\varsigma + \frac{e^{-qz}\left[t_\text{C} + \psi sf(0) - \frac{q}{2}\left(\psi s - h^{-1}q + 1\right)\int_0^\infty f(\varsigma)e^{-q\varsigma}d\varsigma\right]}{s\left(\psi s + h^{-1}q + 1\right)} \quad (7)$$

де $q = \sqrt{s/a_\text{T}}$; s — параметр перетворення Лапласа; $h^{-1} = \lambda_\text{T}\left(1 + \frac{\mu}{H}\right)/\mu$; $\psi = \Omega/\mu$.

В залежності від значень коренів характеристичного рівняння

$$\psi a_\text{T} q^2 + h^{-1}q + 1 = 0 \quad (8)$$

можливі наступні варіанти подання оригіналу зображення (7).

1) При $\Omega \neq 0$ і $h^{-2} - 4\psi a_\text{T} \neq 0$ рівняння (8) має два різні корені $\tilde{q}_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\psi a_\text{T} h^2}}{2\psi a_\text{T} h}$. Відповідно, трансформанта (7) матиме такий вигляд

$$\tilde{t}_\text{T}(z,s) = \frac{q}{2s}\int_0^\infty f(\varsigma)e^{-q|z-\varsigma|}d\varsigma + \frac{e^{-qz}\left(t_\text{C} + \psi sf(0)\right) - \frac{q}{2}\left(\psi s - h^{-1}q + 1\right)\int_0^\infty f(\varsigma)e^{-q(z+\varsigma)}d\varsigma}{\psi\sqrt{a_\text{T}}\left(\tilde{q}_1 - \tilde{q}_2\right)s} \times$$
$$\times\left(\frac{1}{\sqrt{s} - \sqrt{a_\text{T}}\,\tilde{q}_1} - \frac{1}{\sqrt{s} - \sqrt{a_\text{T}}\,\tilde{q}_2}\right). \quad (9)$$

Для знаходження оригіналу зображення (9) використаємо формули обернення [3]

$$L^{-1}\left[\frac{\text{e}^{-k\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\text{e}^{-\frac{k^2}{4\tau}}; \; L^{-1}\left[\frac{b\text{e}^{-k\sqrt{s}}}{s\left(b + \sqrt{s}\right)}\right] = \text{erfc}\frac{k}{2\sqrt{\tau}} - \text{e}^{bk + b^2\tau}\text{erfc}\left(b\sqrt{\tau} + \frac{k}{2\sqrt{\tau}}\right);$$

$$L^{-1}\left[\frac{\mathrm{e}^{-k\sqrt{s}}}{\sqrt{s}\left(b+\sqrt{s}\right)}\right]=\mathrm{e}^{bk+b^2\tau}\operatorname{erfc}\left(b\sqrt{\tau}+\frac{k}{2\sqrt{\tau}}\right);$$

$$L^{-1}\left[\frac{\mathrm{e}^{-k\sqrt{s}}}{1+\sqrt{s/b}}\right]=\sqrt{\frac{b}{\pi\tau}}\mathrm{e}^{-\frac{k^2}{4\tau}}-b\mathrm{e}^{k\sqrt{b}+b\tau}\operatorname{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{\tau}}+\sqrt{b\tau}\right).$$

Після їх застосування отримаємо вираз для визначення розподілу температури в півпросторі у безрозмірних величинах

$$\theta_{\mathrm{T}}(x,\mathrm{Fo})=\operatorname{erfc}\varphi-\frac{1}{2\Delta}\sum_{m=1}^{2}\alpha_m F(x,\mathrm{Fo},q_m)+ \\ +\int_0^{\infty}\theta_0(\gamma)\left\{\chi_-(x,\gamma,\mathrm{Fo})+\frac{1}{\Delta}\sum_{m=1}^{2}(-1)^m q_m F(x+\gamma,\mathrm{Fo},q_m)\right\}d\gamma. \tag{10}$$

Тут $\theta_{\mathrm{T}}=\frac{t_{\mathrm{T}}}{t_{\mathrm{C}}}$, $\theta_0=\frac{t_{\mathrm{T}}\big|_{\tau=0}}{t_{\mathrm{C}}}$ — безрозмірні температури; $x=\frac{z}{z_*}$, $\gamma=\frac{\varsigma}{z_*}$ — безрозмірні координати; z_* — масштабний параметр; $\mathrm{Fo}=\frac{a_{\mathrm{T}}\tau}{z_*^2}$ — число Фур'є; $\varphi=\frac{x}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}}$; $\Delta=\sqrt{1-4\psi a_{\mathrm{T}}h^2}=\sqrt{1-\frac{4\eta\mathrm{Bi}}{(1+\xi\mathrm{Bi})^2}}$; $\kappa=\frac{1+\xi\mathrm{Bi}}{2\eta}$; $\mathrm{Bi}=\frac{\mu z_*}{\lambda_{\mathrm{T}}}$ — критерій Біо; $\xi=\frac{H^{-1}}{z_*/\lambda_{\mathrm{T}}}$ — відносний ефективний термічний опір покриття; $\eta=\frac{\Omega}{\omega_{\mathrm{T}}z_*}$ — відносна ефективна теплоємність покриття;

$$F(x,\mathrm{Fo},p)=\exp\left(px+p^2\mathrm{Fo}\right)\operatorname{erfc}\left(\varphi+p\sqrt{\mathrm{Fo}}\right); \tag{11}$$

$$\alpha_m=(-1)^{m+1}+\Delta+\theta_0(0)\left((-1)^{m+1}-\Delta\right);$$

$$q_1=-\tilde{q}_1 z_*=(1-\Delta)\kappa,\ q_2=-\tilde{q}_2 z_*=(1+\Delta)\kappa;$$

$$\chi_\pm(x,\gamma,\mathrm{Fo})=\frac{e^{-\frac{(x-\gamma)^2}{4\mathrm{Fo}}}\pm e^{-\frac{(x+\gamma)^2}{4\mathrm{Fo}}}}{2\sqrt{\pi\mathrm{Fo}}}. \tag{12}$$

2) При $\Omega\neq 0$ і $h^{-2}-4\psi a_{\mathrm{T}}=0$ рівняння (8) має один дійсний двократний корінь $\tilde{q}_3=-\frac{1}{2\psi a_{\mathrm{T}}h}$. Для цього випадку трансформанту (7) подамо наступним чином

$$\tilde{t}_{\mathrm{T}}(z,s)=\frac{q}{2s}\int_0^\infty f(\varsigma)e^{-q|z-\varsigma|}d\varsigma+\frac{e^{-qz}\left(t_{\mathrm{C}}+\psi sf(0)\right)-\dfrac{q}{2}\left(\psi s-h^{-1}q+1\right)\displaystyle\int_0^\infty f(\varsigma)e^{-q(z+\varsigma)}d\varsigma}{\psi s\left(\sqrt{s}-\sqrt{a_{\mathrm{T}}}\tilde{q}_3\right)^2}. \quad (13)$$

Для знаходження оригіналу трансформанти (13) використаємо додатково формули обернення [3, 21]

$$L^{-1}\left[\frac{\mathrm{e}^{-k\sqrt{s}}}{\left(\sqrt{s}+b\right)^2}\right]=\left(2b^2\tau+bk+1\right)\mathrm{e}^{bk+b^2t}\operatorname{erfc}\left(b\sqrt{\tau}+\frac{k}{2\sqrt{\tau}}\right)-2b\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{k^2}{4\tau}};$$

$$L^{-1}\left[\frac{\mathrm{e}^{-k\sqrt{s}}}{\sqrt{s}\left(\sqrt{s}+b\right)^2}\right]=2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{k^2}{4\tau}}-(2b\tau+k)\mathrm{e}^{bk+b^2\tau}\operatorname{erfc}\left(b\sqrt{\tau}+\frac{k}{2\sqrt{\tau}}\right);$$

$$L^{-1}\left[\frac{\mathrm{e}^{-k\sqrt{s}}}{s\left(\sqrt{s}+b\right)^2}\right]=\frac{1}{b^2}\operatorname{erfc}\frac{k}{2\sqrt{\tau}}-\frac{2}{b}\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{k^2}{4\tau}}+$$
$$+\left(2\tau+\frac{k}{b}-\frac{1}{b^2}\right)\mathrm{e}^{bk+b^2\tau}\operatorname{erfc}\left(b\sqrt{\tau}+\frac{k}{2\sqrt{\tau}}\right).$$

Остаточно отримаємо вираз для температури в півпросторі для даного випадку в такому вигляді

$$\begin{aligned}\theta_{\mathrm{T}}(x,\mathrm{Fo})&=\operatorname{erfc}\varphi-2\left(1+\theta_0(0)\right)\frac{\beta_0}{\sqrt{\pi}}e^{-\varphi^2}-\\&-\left[1-\theta_0(0)-\left(2\beta_0^2+\kappa x\right)\left(1+\theta_0(0)\right)\right]F(x,\mathrm{Fo},\kappa)+\\&+\int_0^\infty\theta_0(\gamma)\left[\chi_-(x,\gamma,\mathrm{Fo})-\frac{4\kappa\beta_0}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(x+\gamma)^2}{4\mathrm{Fo}}}+\right.\\&\left.+2\kappa\left(1+2\beta_0^2+\kappa(x+\gamma)\right)F(x+\gamma,\mathrm{Fo},\kappa)\right]d\gamma;\end{aligned} \quad (14)$$

де $\beta_0=\kappa\sqrt{\mathrm{Fo}}$, а функція $F(x,\mathrm{Fo},\kappa)$ визначається формулою (11).

3) При $\Omega=0$ рівняння (8) має один дійсний корінь $\tilde{q}_4=-h$. Тоді трансформанту (7) представимо так:

$$\tilde{t}_{\mathrm{T}}(z,s)=\frac{q}{2s}\int_0^\infty f(\varsigma)e^{-q|z-\varsigma|}d\varsigma-\sqrt{a_{\mathrm{T}}}\tilde{q}_4\frac{e^{-qz}t_{\mathrm{C}}-\dfrac{q}{2}\left(1-h^{-1}q\right)\displaystyle\int_0^\infty f(\varsigma)e^{-q(z+\varsigma)}d\varsigma}{s\left(\sqrt{s}-\sqrt{a_{\mathrm{T}}}\tilde{q}_4\right)}, \quad (15)$$

а оригінал зображення (15) буде мати наступний вигляд:

$$\theta_{\mathrm{T}}(x,\mathrm{Fo}) = \operatorname{erfc}\varphi - F\left(x,\mathrm{Fo},\mathrm{Bi}^*\right) + \int_0^\infty \theta_0(\gamma)\left[\chi_+(x,\gamma,\mathrm{Fo}) - \mathrm{Bi}^* F\left(x+\gamma,\mathrm{Fo},\mathrm{Bi}^*\right)\right] d\gamma, \quad (16)$$

де $\mathrm{Bi}^* = \dfrac{\mathrm{Bi}}{1+\xi\mathrm{Bi}}$.

3. Визначення температури в покритті

Для розрахунку температури в довільному шарі багатошарового покриття через граничні значення температури та її похідної в півпросторі використаємо формулу відновлення [18, 19]

$$\theta_i(x,\mathrm{Fo}) = \theta_{\mathrm{T}}(0,\mathrm{Fo}) + r_i(x)\frac{\partial\theta_{\mathrm{T}}}{\partial x}(0,\mathrm{Fo}), \quad x_i \le x \le x_{i-1}, \quad i = 1,\dots,n; \quad (17)$$

де $r_i(x) = \lambda_{\mathrm{T}}\left(-\sum_{j=1}^{i-1}\delta_j / \left(z_*\lambda_j\right) + \left(x - x_{i-1}\right)/\lambda_i\right)$, $\theta_i = t_i / t_{\mathrm{C}}$, $x_i = z_i / z_*$.

Підставляючи (10), (14) та (16) в формулу відновлення (17), отримуємо вирази для температури в i-му шарі покриття.

1) При $\Omega \ne 0$ і $h^{-2} - 4\psi a_{\mathrm{T}} \ne 0$:

$$\begin{aligned}\theta_i(x,\mathrm{Fo}) = 1 &- \frac{r_i(x)}{\sqrt{\pi\mathrm{Fo}}}\left[\theta_0(0) - \int_0^\infty \theta_0(\gamma)\left(\frac{\gamma}{2\mathrm{Fo}} - 2\kappa\right)e^{-\frac{\gamma^2}{4\mathrm{Fo}}}d\gamma\right] - \\ &- \frac{1}{\Delta}\sum_{m=1}^{2} d_{im}(x)\left[\frac{\alpha_m}{2}F\left(0,\mathrm{Fo},q_m\right) - (-1)^m q_m \int_0^\infty \theta_0(\gamma) F\left(\gamma,\mathrm{Fo},q_m\right)d\gamma\right],\end{aligned} \quad (18)$$

де $d_{im}(x) = 1 + r_i(x)q_m$, $m = 1,2$.

2) При $\Omega \ne 0$ і $h^{-2} - 4\psi a_{\mathrm{T}} = 0$:

$$\begin{aligned}\theta_i(x,\mathrm{Fo}) = 1 &- 2\left(1+\theta_0(0)\right)d_{i3}(x)\frac{\beta_0}{\sqrt{\pi}} - \\ &- \left[1 - \left(1 + 2\kappa r_i(x)\right)\theta_0(0) - 2\beta_0^2\left(1+\theta_0(0)\right)d_{i3}(x)\right]F\left(0,\mathrm{Fo},\kappa\right) - \\ &- \frac{r_i(x)}{\sqrt{\pi\mathrm{Fo}}}\left[\theta_0(0) - \int_0^\infty \theta_0(\gamma)\left(\gamma\left(\frac{1}{2\mathrm{Fo}} - 2\kappa^2\right) - 2\kappa\left(1+2\beta_0^2\right)\right)e^{-\frac{\gamma^2}{4\mathrm{Fo}}}d\gamma\right] - \\ &- 2\kappa\int_0^\infty \theta_0(\gamma)\left[\frac{\beta_0}{\sqrt{\pi}}\left(2 - \frac{r_i(x)\gamma}{\mathrm{Fo}}\right)e^{-\frac{\gamma^2}{4\mathrm{Fo}}} + \left(1 - \left(2\left(1+\beta_0^2\right) + \kappa\gamma\right)d_{i3}(x)\right)F\left(\gamma,\mathrm{Fo},\kappa\right)\right]d\gamma,\end{aligned} \quad (19)$$

де $d_{i3}(x) = 1 + r_i(x)q_3 = 1 + r_i(x)\kappa$.

3) При $\Omega = 0$:

$$\theta_i(x,\mathrm{Fo}) = 1 - \left(1 + \mathrm{Bi}^* r_i(x)\right)\left\{F\left(0,\mathrm{Fo},\mathrm{Bi}^*\right) - \right.$$
$$\left. - \int_0^{\infty} \theta_0(\gamma)\left[\frac{1}{\sqrt{\pi \mathrm{Fo}}} e^{-\frac{\gamma^2}{4\mathrm{Fo}}} - \mathrm{Bi}^* F\left(\gamma,\mathrm{Fo},\mathrm{Bi}^*\right)\right] d\gamma\right\}. \tag{20}$$

4. Експоненційний початковий розподіл температури

Зауважимо, що при $\theta_0(x) = \theta_0(0) = \mathrm{const}$ і з урахуванням співвідношення $\theta_j = \tilde{\theta}_j + \theta_0(0)\left(1 - \tilde{\theta}_j\right)$ $(j = \mathrm{T}, 1, 2, 3, ..., n)$, де $\theta_j = t_j / t_\mathrm{C}$, $\tilde{\theta}_j = \left(t_j - t_0\right)/\left(t_\mathrm{C} - t_0\right)$ — безрозмірні температури, що використовуються у даній статті і [19] відповідно, формули (10), (14), (16), (18)-(20) співпадають з такими формулами, отриманими в [19]. В якості прикладу отримання розрахункових формул для визначення розподілу температури в системі півпростір-багатошарове покриття розглянемо випадок, коли початковий розподіл температури задається у вигляді експоненти

$$\theta_0(x) = \theta_\infty + \left(\theta_0 - \theta_\infty\right)\exp(-lx), \;\; \theta_\infty = \lim_{x\to\infty} \theta_0(x), \;\; \theta_0 = \theta_0(0), \;\; l = \mathrm{const} \tag{21}$$

1) При $\Omega \neq 0$ і $h^{-2} - 4\psi a_\mathrm{T} \neq 0$

температура в півпросторі:

$$\theta_\mathrm{T}(x,\mathrm{Fo}) = \theta_\infty + \left(1 - \theta_\infty\right)\mathrm{erfc}\varphi - \frac{1}{\Delta}\sum_{m=1}^{2}\left[\frac{\alpha_m}{2} + (-1)^m\left(\theta_\infty + \frac{q_m\left(\theta_0 - \theta_\infty\right)}{q_m - l}\right)\right] F\left(x,\mathrm{Fo},q_m\right) +$$
$$+ \left(\theta_0 - \theta_\infty\right)\left\{\frac{F(-x,\mathrm{Fo},l) - F(x,\mathrm{Fo},l)}{2} + \frac{F(x,\mathrm{Fo},l)}{\Delta}\sum_{m=1}^{2}(-1)^m \frac{q_m}{q_m - l}\right\}, \tag{22}$$

температура в i-му шарі покриття:

$$\theta_i(x,\mathrm{Fo}) = 1 - \frac{1}{\Delta}\sum_{m=1}^{2}\left[\frac{\alpha_m}{2} + (-1)^m\left(\theta_\infty + \frac{q_m\left(\theta_0 - \theta_\infty\right)}{q_m - l}\right)\right] d_{im}(x) F\left(0,\mathrm{Fo},q_m\right) +$$
$$+ \left(\theta_0 - \theta_\infty\right)\left[\frac{1}{\Delta}\sum_{m=1}^{2}(-1)^m d_{im}(x)\frac{q_m}{q_m - l} + \left(l + 2\kappa\right) r_i(x)\right] F(x,\mathrm{Fo},l). \tag{23}$$

2) При $\Omega \neq 0$ і $h^{-2} - 4\psi a_\mathrm{T} = 0$

температура в півпросторі:

$$\theta_T(x,\mathrm{Fo}) = \theta_\infty + (1-\theta_\infty)\,\mathrm{erfc}\varphi - \left[1-\theta_0 - 2(\theta_0-\theta_\infty)\frac{l}{\kappa - l}\right]\frac{2\beta_0}{\sqrt{\pi}}e^{-\varphi^2} -$$
$$-\left[(1-\theta_0)\left(1-\kappa x - 2\beta_0^2\right) + \frac{2(\theta_0-\theta_\infty)l}{\kappa-l}\left(2\beta_0^2+\kappa x - \frac{\kappa}{\kappa-l}\right)\right]F(x,\mathrm{Fo},\kappa) +$$
$$+(\theta_0-\theta_\infty)\left[\frac{F(-x,\mathrm{Fo},l)-F(x,\mathrm{Fo},l)}{2} - \right. \tag{24}$$
$$\left. -2\left(2\beta_0^2 - \frac{\left(1+2\beta_0^2+\kappa x\right)\kappa}{\kappa-l} + \frac{\left[1+(x+2l\mathrm{Fo})(\kappa-l)\right]\kappa^2}{(\kappa-l)^2}\right)F(x,\mathrm{Fo},l))\right],$$

температура в i –му шарі покриття:

$$\theta_i(x,\mathrm{Fo}) = 1 - \left[1-\theta_0 - \frac{2(\theta_0-\theta_\infty)l}{\kappa-l}\right]\frac{2d_{i3}(x)\beta_0}{\sqrt{\pi}} - \left[(1-\theta_0)\left(1-2\beta_0^2 d_{i3}(x)\right) - \right.$$
$$\left. -2(\theta_0-\theta_\infty)\frac{l}{\kappa-l}\left[1-d_{i3}(x)\left(2\beta_0^2 - \frac{l}{\kappa-l}\right)\right]\right]F(0,\mathrm{Fo},\kappa) - \tag{25}$$
$$-(\theta_0-\theta_\infty)\left[(2\kappa+l)r_i(x) + \frac{2\kappa}{\kappa-l}\left(1-d_{i3}(x)\frac{\kappa-2l}{\kappa-l}\right)\right]F(0,\mathrm{Fo},l).$$

3) При $\Omega = 0$ температура в півпросторі:

$$\theta_T(x,\mathrm{Fo}) = \theta_\infty + (1-\theta_\infty)\,\mathrm{erfc}\varphi - \left(1-\theta_\infty - (\theta_0-\theta_\infty)\frac{\mathrm{Bi}^*}{\mathrm{Bi}^*-l}\right)F\left(x,\mathrm{Fo},\mathrm{Bi}^*\right) +$$
$$+(\theta_0-\theta_\infty)\left[\frac{F(-x,\mathrm{Fo},l)+F(x,\mathrm{Fo},l)}{2} - \frac{\mathrm{Bi}^*}{\mathrm{Bi}^*-l}F(x,\mathrm{Fo},l)\right], \tag{26}$$

температура в i–му шарі покриття:

$$\theta_i(x,\mathrm{Fo}) = 1 - \left(1+\mathrm{Bi}^* r_i(x)\right)\left[(1-\theta_\infty)F\left(0,\mathrm{Fo},\mathrm{Bi}^*\right) - \right.$$
$$\left. -(\theta_0-\theta_\infty)\frac{\mathrm{Bi}^* F\left(0,\mathrm{Fo},\mathrm{Bi}^*\right) - lF(0,\mathrm{Fo},l)}{\mathrm{Bi}^*-l}\right]. \tag{27}$$

Висновки. В статті з використанням узагальнених граничних умов та інтегрального перетворення Лапласа отримано аналітичний розв'язок одновимірної нестаціонарної крайової задачі теплопровідності для системи півпростір-багатошарове тонке покриття з неоднорідною початковою умовою за конвективного теплообміну з оточуючим середовищем. Отримано розрахункові формули для визначення температури в півпросторі та температури в довільному шарі покриття. Наведено такі співвідношення для випадку експоненційного розподілу початкової температури.

Отримані аналітичні співвідношення є відносно простими і зручними для практичного застосування. Вони будуть використані для розрахунку раціональних режимів термоциклічної обробки для зміцнення виробів з багатошаровими покриттями.

Література

[1] *Полевой С. Н., Евдокимов В. Д.* Упрочнение металлов: Справочник. — М.: Машиностроение, 1986. — 320 с.
[2] *Беляев Н. М.* Основы теплопередачи. — Киев: Вища школа, 1989. — 344 с.
[3] *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. — М.: Высш. шк., 1967. — 600 с.
[4] *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. — М.: Наука, 1964. — 488 с.
[5] *Кривобок Э. Н.* Об одном решении уравнения нестационарной теплопроводности с неоднородным начальным условием // Збірник наукових праць Полтавського національного технічного університету ім. Ю. Кондратюка. Сер. Галузеве машинобудування, будівництво. — 2010. — Вип. 2. — С. 171—175.
[6] *Пехович А. И., Жидких В. М.* Расчеты теплового режима твердых тел. — Ленинград: Энергия, 1976. — 352 с.
[7] *Вигак В. М.* Оптимальное управление нестационарными температурными режимами. — Киев: Наук. думка, 1979. — 360 с.
[8] *Кирсанов Ю. А.* Тепловое состояние твердых тел с покрытием при несимметричном циклическом теплообмене с внешними средами // Инж.-физ. журн. — 1996. — **69**, № 1. — С. 123-128.
[9] *de Monte F.* Transient heat conduction in one-dimensional composite slab. A `natural' analytic approach // Int. J. Heat Mass Transf. — 2000. — **43**, No. 19. — P. 3607–3619.
[10] *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М., Семерак М. М.* Температурные поля и напряжения в элементах электровакуумных приборов. — К.: Наук. думка, 1981. — 344 с.
[11] *Процюк Б. В., Верба І. І.* Нестаціонарне одновимірне температурне поле трьохшарових тіл з плоскопаралельними границями розділу // Вісник Львів. ун.-ту. Сер. прикл. математика та інформатика. — 1999. — Вип. 1. — С. 200–205.
[12] *Процюк Б. В., Горун О. П.* Термопружний стан кусково-однорідного тіла під час остигання за різних початкових температур складових // Прикл. проблеми механіки і математики. — 2013. — Вип. 11. — С. 90-100.
[13] *de Monte F.* An analytic approach to the unsteady heat conduction processes in one-dimensional composite media // Int. J. Heat Mass Transf. — 2002. — **45**, No. 6. — P. 1333–1343.
[14] *Подстригач Я. С., Шевчук П. Р.* Температурные поля и напряжения в телах с тонкими покрытиями // Тепловые напряжения в элементах конструкций. — 1967. — Вып. 7. — С. 227-233.
[15] *Швець Л. П., Яцків О. І.* До побудови розв'язку крайової задачі дифузії із некласичними граничними умовами // Вісник державного університету «Львівська політехніка». Сер. Прикл. математика. — 1998. — Вип. 346. — С. 165-168.
[16] *Шевчук В. А.* До побудови узагальнених граничних умов конвективного теплообміну тіл із середовищем через тонкі неплоскі покриття // Доп. НАН України. — 2011. — № 7. — С. 76-82.
[17] *Moulton D., Pelesko J. A.* Thermal boundary conditions: an asymptotic analysis // Heat Mass Transf. — 2008. — **44**, No. 7. — P. 795–803.
[18] *Shevchuk V. A.* Generalized boundary conditions to solving thermal stress problems for bodies with thin coatings // In: *R. B. Hetnarski* (Ed.). Encyclopedia of Thermal Stresses. — Springer, 2014. — Vol. 4. — P. 1942–1953.

[19] *Шевчук В. А.* Аналитическое решение нестационарной задачи теплопроводности для полупространства с многослойным покрытием // Инж.-физ. журн. — 2013. — **86**, № 2. — С. 423-431.

[20] *Шевчук В., Гаврись О.* Дослідження температурного поля півпростору з багатошаровим покриттям за променево-конвективного теплообміну // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2014. — Вип. 20. — С. 229-239.

[21] *Диткин В. А., Прудников А. П.* Справочник по операционному исчислению. — Москва: Высш. шк., 1965. — 466 с.

The analytical solution of boundary value problem for a system "half-space with a multilayer coating" with the inhomogeneous initial condition at convective heat exchange with the environment

Victor Shevchuk, Olexandr Gavrys'

With the use of the Laplace integral transformation and generalized boundary conditions, an analytical solution of the boundary heat conduction problem with non-uniform initial condition for convective interaction of a half with the environment through a thin multilayer coating has been obtained.

Аналитическое решение краевой задачи теплопроводности для системы полупространство-многослойное покрытие с неоднородным начальным условием при конвективном теплообмене со средой

Виктор Шевчук, Александр Гаврись

С использованием интегрального преобразования Лапласа и обобщенных граничных условий получено аналитическое решение краевой задачи теплопроводности с неоднородным начальным условием при конвективном взаимодействии полупространства с окружающей средой через тонкое многослойное покрытие.

Отримано 28.11.12