

Вплив міжповерхневих рідинних містків на контактну взаємодію тіл з хвилястим рельєфом

Олег Козачок¹, Богдан Слободян², Ростислав Мартиняк³

¹ Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060, e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

² к. ф.-м. н., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060, e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

³ д. ф.-м. н., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060, e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

Розглянуто безфрикційний контакт двох півбезмежних пружних тіл, одне з яких має хвилясту поверхню, коли на краях міжповерхневих зазорів міститься нестислива рідина, яка змочує поверхні тіл, а в середніх частинах — газ, що перебуває під сталим тиском. Внаслідок поверхневого натягу рідини виникає перепад тисків в рідині й газі, що описується формулою Лапласа. Сформульовану контактну задачу зведено до сингулярного інтегрального рівняння (СІР) з ядром Гільберта, яке трансформовано у СІР з ядром Коші відносно похідної від висоти зазорів. З умови обмеженості на кінцях відрізка інтегрування розв'язку цього СІР і з умови збереження кількості рідини отримано та числово розв'язано систему трансцендентних рівнянь для визначення ширини зазорів та ділянок з газом. Проаналізовано залежності ширини і форми зазорів, ширини ділянок з газом, контактного зближення тіл від прикладеного навантаження та поверхневого натягу рідини.

Ключові слова: контактна взаємодія, хвилястий рельєф, міжповерхневі зазори, нестислива рідина, поверхневий натяг, сингулярне інтегральне рівняння.

Вступ. З метою покращення функціональних характеристик контактних пар розроблені й успішно застосовуються різноманітні технології модифікування їх поверхонь, зокрема мікротекстурування, які полягають у формуванні на них регулярного мікрорельєфу. Під час контакту між тілами з такими поверхнями виникають періодично розташовані зазори, які у реальних умовах експлуатації можуть бути заповнені певною речовиною (мастилом, охолоджуючим середовищем, рідиною або газом), що чинить додатковий тиск на контактуючі поверхні і може істотно впливати на фактичну площу контакту, контактні напруження і міцність тіл.

В останні десятиліття активно проводяться наукові дослідження взаємодії деформівних тіл з урахуванням рідини, яка змочує чи не змочує їх поверхні. У першому випадку під дією поверхневого натягу вона збирається у найвужчих місцях зазорів між тілами, де утворює міжповерхневі містки, а у другому — у найширших місцях зазорів. Саме з цим пов'язаний ефект капілярної адгезії,

вплив якого на контактну поведінку стає відчутнішим зі зменшенням їх розмірів, що засвідчують експериментальні дані [1-5].

Контактні задачі для тіл з періодичним рельєфом за відсутності заповнювача зазорів між ними розглянуто у працях [6-10]. Вивчено [11-19] контакт тіл за наявності між ними поодиноких або періодично розташованих зазорів, цілком заповнених рідиною або газом. У працях [20-22] досліджено фрикційні ефекти під час взаємодії тіл з регулярним рельєфом. Контакт плоскої і хвилястої поверхонь, зазори між якими заповнені стисливою рідиною або ідеальним газом, досліджено у працях [23-25].

У працях [26, 27] розпочато дослідження взаємодії випуклих тіл з урахуванням рідинних міжповерхневих містків. Вивчено [28, 29] вплив капілярних ефектів на контакт шорстких тіл. Досліджено взаємодію тіл, які мають локальні виїмки гладкої форми, частково заповнені рідиною, що змочує [30-32] або не змочує [33] їх поверхні, та тіл, межа одного з яких має періодичний рельєф, за наявності на краях зазорів містків рідини, яка змочує поверхні [34] або не змочує їх [35, 36]. Контакт пружного тіла та жорсткої основи з мілкими виїмками прямокутної форми, коли рідинний місток розташований в середній частині просівів, а крайні його частини містять газ, який перебуває під сталим тиском, досліджено у разі поодинокі виїмки [37] та у разі періодично розташованих виїмок [38].

Нижче досліджується взаємодія двох пружних тіл, одне з яких має хвилясту поверхню, за наявності на краях міжповерхневих зазорів рідини, що змочує поверхні тіл, а в середніх частинах — газу, що перебуває під сталим тиском.

1. Формулювання задачі

Розглянемо безфрикційну контактну взаємодію двох пружних півнескінченних тіл D_1 і D_2 за умов плоскої деформації. Межа одного з тіл прямолінійна, а

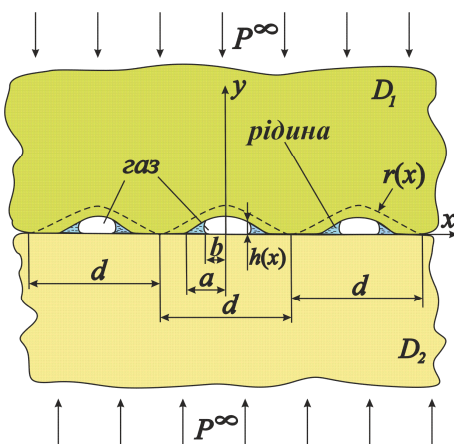


Рис. 1

іншого — хвиляста, що задана періодичною функцією

$$r(x) = A \cos^2(\pi x/d), \quad x \in [-\infty, \infty], \quad (1)$$

зображеною штриховою лінією на рис. 1. Максимальна висота хвилястої межі A значно менша від періоду d ($A \ll d$).

Тіла контактують під дією рівномірно розподілених на нескінченності стискальних навантажень P^∞ . Внаслідок нерівності межі одного з тіл їх контакт неповний і між ними виникають міжповерхневі зазори висоти $h(x)$. Вважаємо, що вони частково заповнені нестисливою рідиною, яка змочує поверхні тіл, а частково газом, що перебуває під сталим тиском P_1 . Кількість рідини в

тіл, а частково газом, що перебуває під сталим тиском P_1 . Кількість рідини в

кожному зазорі однакова і залишається незмінною при навантаженні. Тому виконується умова збереження рідини

$$l \int_b^a h(x) dx = \frac{1}{2} V_0 + \frac{(h(b))^2}{8} \pi, \quad (2)$$

де $l = 1$ м, V_0 — об'єм рідини, що припадає на одиницю довжини кожного зазору у поздовжньому напрямі.

Рідина під дією поверхневого натягу σ збиратиметься в найвужчих місцях зазорів і формуватиме міжповерхневі рідинні містки на краях зазорів на ділянках $(-a + kd; -b + kd) \cup (b + kd; a + kd)$, а газ — у середній частині зазорів на ділянках $(-b + kd; b + kd)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Меніск — бічна поверхня рідини, яка межує з газом, у перерізі має форму півкола [30], радіус якого R дорівнює половині висоти зазорів у точках $x = \pm b$: $R = h(b)/2$. На менісках діє поверхневий натяг рідини σ . Внаслідок цього тиск в рідині P_2 менший, ніж тиск газу P_1 , і перепад тисків визначається формулою Лапласа [39]

$$\Delta P = P_1 - P_2 = 2\sigma/h(b). \quad (3)$$

Тиск рідини P_2 , ширина $2a$ і висота $h(x)$ зазорів та ширина $2b$ ділянок з газом змінюються при навантаженні.

Контактно-крайові умови сформульованої плоскої контактної задачі мають вигляд:

$$\tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^- = 0, \quad |x - kd| < a, \quad (4)$$

$$\sigma_{yy}^+ = \sigma_{yy}^-, \quad |x - kd| < a, \quad (5)$$

$$\sigma_{yy}^+ = -P_2, \quad b \leq |x - kd| < a, \quad (6)$$

$$\sigma_{yy}^+ = -P_1, \quad |x - kd| < b \quad (7)$$

уздовж зазорів $|x - kd| < a$, ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$);

$$\tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^- = 0, \quad (8)$$

$$\sigma_{yy}^+ = \sigma_{yy}^-, \quad (9)$$

$$v^+ = v^- - r(x) \quad (10)$$

на ділянках контакту $a \leq |x - kd| \leq d/2$, ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$);

$$\sigma_{yy} = -P^\infty, \quad \sigma_{xx} = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad (11)$$

на нескінченності. Тут σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} — компоненти тензора напружень; v — складова вектора переміщення вздовж осі Oy ; значками “+”, “-” позначено граничні значення функції за прямування точки до осі Ox у верхній і нижній півплощинах ($y \rightarrow \pm 0$).

2. Методика розв'язування задачі

Напруження і похідні від переміщень у півплощинах D_n ($n=1,2$) подамо [34] в комплексному вигляді через форму хвилястої межі $r(x)$ і заздалегідь невідому висоту міжконтактних зазорів $h(x)$:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} - i\tau_{xy} &= \Phi_n(z) - \Phi_n(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi_n'(z)} - P^\infty, \quad z \in D_n, \\ 2G_n(u' + iv') &= \kappa_n\Phi_n(z) + \Phi_n(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi_n'(z)} + \frac{3 - \kappa_n}{4}P^\infty, \quad z \in D_n, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\Phi_n(z) = \frac{(-1)^{3-n}}{dK} \left(\int_{-a}^a h'(t) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi(t-z)}{d} \right) dt - \int_{-d/2}^{d/2} r'(t) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi(t-z)}{d} \right) dt \right), \quad (13)$$

де $K = 2(1 - \nu_1)/G_1 + 2(1 - \nu_2)/G_2$; $\kappa_n = 3 - 4\nu_n$; G_n, ν_n — відповідно модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона матеріалу півплощини $D_n, n=1,2$.

Для визначення функції $h'(x)$ отримуємо [34] сингулярне інтегральне рівняння (СІР) з ядром Гільберта:

$$\frac{2}{d} \int_{-a}^a h'(t) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi(t-x)}{d} \right) dt = K(P^\infty - P(x)) + \frac{2}{d} \int_{-d/2}^{d/2} r'(t) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi(t-x)}{d} \right) dt, \quad (14)$$

$$\text{де, врахувавши (3), } P(x) = \begin{cases} P_1, & |x - kd| < b, \\ P_1 - 2\sigma/h(b), & b \leq |x - kd| < a \end{cases}$$

Функція $h(x)$ задовольняє умови плавного змикання берегів зазорів

$$h(\pm a) = h'(\pm a) = 0. \quad (15)$$

Провівши заміну змінних $\xi = tg(\pi x/d)$, $\eta = tg(\pi t/d)$, $\alpha = tg(\pi a/d)$, СІР з ядром Гільберта (14) трансформуємо у СІР з ядром Коші:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{h'(\eta)}{\eta - \xi} d\eta = \frac{d}{2(1 + \xi^2)} K(P^\infty - P(\xi)) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r'(\eta)}{\eta - \xi} d\eta, \quad x \in [-\alpha, \alpha], \quad (16)$$

$$\text{де } P(\xi) = \begin{cases} P_1, & |\xi| < \beta, \\ P_1 - 2\sigma/h(\beta), & \beta \leq |\xi| < \alpha. \end{cases}$$

Умови (15) у нових змінних набувають вигляду:

$$h(-\alpha) = h(\alpha) = 0, \quad h'(-\alpha) = h'(\alpha) = 0. \quad (17)$$

Функція (1), що описує хвилясту межу, у нових змінних має вигляд $r(\xi) = A/(1 + \xi^2)$. Підставивши її в інтеграл у правій частині СІР (16), запишемо його так:

$$\frac{2}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{h'(\eta)}{\eta - \xi} d\eta = \frac{dK(P^\infty - P(\xi))}{\pi(1 + \xi^2)} + \frac{2A(\xi^2 - 1)}{(1 + \xi^2)^2}, \quad \xi \in [-\alpha, \alpha]. \quad (18)$$

Згідно з теорією сингулярних інтегральних рівнянь [40], рівняння з ядром Коші може мати необмежений або обмежений на кінцях відрізка інтегрування розв'язок. З огляду на другу умову (17) шукатимемо обмежений розв'язок рівняння (18):

$$h'(\xi) = \left[\frac{Kd(P^\infty - P_1)}{2\pi} + \frac{K\sigma d}{\pi h(\beta)} - \frac{2K\sigma d}{\pi^2 h(\beta)} \arcsin\left(\frac{\beta\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha\sqrt{\beta^2+1}}\right) \right] \frac{\xi\sqrt{\alpha^2-\xi^2}}{(1+\xi^2)\sqrt{\alpha^2+1}} - \frac{K\sigma d}{2\pi^2 h(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha, \xi, \beta) - \Gamma(\alpha, \xi, -\beta)}{1+\xi^2} - \frac{A}{\sqrt{1+\alpha^2}} \left[\frac{2}{1+\xi^2} + \frac{1}{1+\alpha^2} \right] \frac{\xi\sqrt{\alpha^2-\xi^2}}{1+\xi^2}, \quad (19)$$

$$\text{де } \Gamma(\alpha, \xi, \beta) = \ln \frac{\alpha^2 - \beta\xi + \sqrt{(\alpha^2 - \xi^2)(\alpha^2 - \beta^2)}}{\alpha^2 - \beta\xi - \sqrt{(\alpha^2 - \xi^2)(\alpha^2 - \beta^2)}}.$$

Обмежений розв'язок СІР (18) існує за виконання додаткової умови на його праву частину [40], з якої отримуємо рівняння

$$\frac{Kd(P^\infty - P_1)}{2\pi} + \frac{K\sigma d}{\pi h(\beta)} - \frac{2K\sigma d}{\pi^2 h(\beta)} \arcsin\left(\frac{\beta\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha\sqrt{\beta^2+1}}\right) - \frac{A}{1+\alpha^2} = 0. \quad (20)$$

Підставивши вираз (20) у співвідношення (19), отримаємо:

$$h'(\xi) = -\frac{K\sigma d}{2\pi^2 h(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha, \xi, \beta) - \Gamma(\alpha, \xi, -\beta)}{1+\xi^2} - \frac{2A}{\sqrt{1+\alpha^2}} \frac{\xi\sqrt{\alpha^2-\xi^2}}{(1+\xi^2)^2}, \quad |\xi| \leq \alpha. \quad (21)$$

Вхідними параметрами даної задачі є максимальна висота хвилястої межі A , поверхневий натяг рідини σ , об'єм рідини в зазорі V_0 , тиск газу P_1 і прикладене навантаження P^∞ , а шуканими — тиск рідини P_2 , півширина зазорів α та півширина ділянки з газом β . Для визначення невідомих P_2 , α , β використовуємо формулу Лапласа (3), додаткову умову, за якої існує обмежений розв'язок СІР (20), та умову збереження кількості рідини (2). Бачимо, що у всі ці три рівняння, окрім шуканих величин, входить ще й невідома висота меніска $h(\beta)$. Щоб її визначити, потрібно проінтегрувати співвідношення (21). У зв'язку з тим, що з виразу (21) не вдається аналітично визначити висоту зазорів $h(\xi)$ і шукана невідома α входить у рівняння (2) та (20), як аргумент складних функцій, пропонується наступна ітераційна процедура розв'язання системи рівнянь (2), (3), (20)

- за невідомі вибираємо зовнішнє навантаження P^∞ , тиск рідини P_2 та півширину ділянки з газом β ;
- півширину зазорів α вважаємо відомою величиною, що змінюється в діапазоні $0 < \varepsilon < \alpha \leq \text{tg}(\pi(d - \varepsilon)/d)$;
- щоб визначити з рівняння (2) півширину ділянки з газом β , будемо використовувати метод послідовних наближень:

- за початкове наближення $h_0(\xi)$ вибираємо аналітичний розв'язок задачі, коли нехтуємо поверхневим натягом рідини ($\sigma = 0$), тобто за сталого тиску заповнювача P_1 в зазорах:

$$h_0(\xi) = \frac{A}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \frac{\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}}{1 + \xi^2} - \frac{A}{2(\alpha^2 + 1)} \ln \left(\frac{\sqrt{\alpha^2 + 1} + \sqrt{\alpha^2 - \xi^2}}{\sqrt{\alpha^2 + 1} - \sqrt{\alpha^2 - \xi^2}} \right), \quad \xi \in [-\alpha, \alpha]. \quad (22)$$

- підставивши $h_0(\xi)$ (22) в умову збереження кількості рідини $\frac{2}{\pi} \int_{\beta_0}^{\alpha} \frac{h_0(\xi)}{1 + \xi^2} d\xi = V_0 + \frac{(h(\beta))^2}{4} \pi$, отримаємо трансцендентне рівняння відносно початкового наближення півширини ділянки з газом β_0 :

$$\begin{aligned} & - \frac{\beta_0 \sqrt{\alpha^2 - \beta_0^2}}{(\beta_0^2 + 1) \sqrt{\alpha^2 + 1}} + \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 1} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin \left(\frac{\beta_0 \sqrt{\alpha^2 + 1}}{\alpha \sqrt{\beta_0^2 + 1}} \right) \right] - \\ & - \frac{1}{\alpha^2 + 1} \int_{\beta_0}^{\alpha} \ln \left(\frac{\sqrt{\alpha^2 + 1} + \sqrt{\alpha^2 - \xi^2}}{\sqrt{\alpha^2 + 1} - \sqrt{\alpha^2 - \xi^2}} \right) \frac{d\xi}{1 + \xi^2} - \frac{\pi V_0}{2l} + \frac{\pi^2 (h(\beta))^2}{8l} = 0, \end{aligned}$$

яке розв'язуємо числово методом поділу відрізка пополам з точністю $\varepsilon = 10^{-5}$;

- похідну від висоти зазорів на кожному наступному i -му кроці ($i \geq 1$) визначаємо за формулою:

$$h'_i(\xi) = - \frac{K \sigma d}{2\pi^2 h_{i-1}(\beta_{i-1})} \frac{\Gamma(\alpha, \xi, \beta_{i-1}) - \Gamma(\alpha, \xi, -\beta_{i-1})}{1 + \xi^2} - \frac{2A}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \frac{\xi \sqrt{\alpha^2 - \xi^2}}{(1 + \xi^2)^2}; \quad (23)$$

- функцію $h'_i(\xi)$ (21) подамо у вигляді скінченної суми ряду за поліномами Чебишова 1-го роду $T_{2l+1}(\xi/\alpha)$:

$$h'_i(\xi) = -\alpha \sum_{l=0}^L \Theta_l^{(i)} (2l+1) T_{2l+1}(\xi/\alpha) / \sqrt{\alpha^2 - \xi^2}, \quad (24)$$

де $\Theta_l^{(i)}$ — невідомі коефіцієнти, які знаходимо з системи $L+1$ лінійних алгебраїчних рівнянь, яку отримуємо, прирівнявши вирази (23) та (24) у точках $\xi_j = \alpha \cos(\pi j / (2L+3))$, $j = 1, \dots, L+1$:

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^L \Theta_l^{(i)} (2l+1) T_{2l+1}(\xi_j/\alpha) &= \frac{2A}{\alpha \sqrt{1 + \alpha^2}} \frac{\xi_j (\alpha^2 - \xi_j^2)}{(1 + \xi_j^2)^2} + \\ &+ \frac{K \sigma d}{2\alpha \pi^2 h_{i-1}(\beta_{i-1})} \frac{\Gamma(\alpha, \xi_j, \beta_{i-1}) - \Gamma(\alpha, \xi_j, -\beta_{i-1})}{1 + \xi_j^2} \sqrt{\alpha^2 - \xi_j^2}, \quad \xi \in [-\alpha, \alpha]; \quad (25) \end{aligned}$$

▪ проінтегрувавши вираз (24), з урахуванням першої з умов (17) знаходимо висоту зазорів $h_i(\xi) = \sqrt{\alpha^2 - \xi^2} \sum_{l=0}^L \Theta_l^{(i)} U_{2l}(\xi/\alpha)$;

▪ підставивши функцію $h_i(\xi)$ в умову збереження кількості рідини, отримаємо трансцендентне рівняння для визначення невідомої півширини ділянки з рідиною β_i :

$$\int_{\beta_i}^{\alpha} \frac{\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}}{1 + \xi^2} \sum_{l=0}^L \Theta_l^{(i)} U_{2l}(\xi/\alpha) d\xi = \frac{A\pi}{4l} V_0 + \frac{(h(\beta_i))^2 \pi^2}{8l}; \quad (26)$$

▪ ітераційний процес завершуємо, коли $(\beta_i - \beta_{i-1})/\beta_i < 10^{-5}$;

- враховуючи значення β у рівнянні (20), знаходимо зовнішній тиск P^∞ , за якого досягаються вибрані значення ширини зазорів;
- з формули Лапласа (3) визначаємо тиск рідини P_2 .

З подань (12), використовуючи співвідношення (21), знайдемо вираз для контактних напружень:

$$\sigma_{yy}^+ = \frac{2\pi(1 + \xi^2)}{dK \sqrt{\frac{\xi^2}{\alpha^2} - 1}} \sum_{l=0}^L (2l+1) \theta_l \left[\frac{|\xi|}{\alpha} - \sqrt{\frac{\xi^2}{\alpha^2} - 1} \right]^{2l+1} - \frac{2A\pi(\xi^2 - 1)}{dK(1 + \xi^2)} - P^\infty. \quad (27)$$

Для інженерних розрахунків контактної взаємодії текстурованих тіл важливу роль відіграє контактне зближення матеріалів Δv^∞ , яке виражається через висоту міжповерхневих зазорів за формулою [34]

$$\Delta v^\infty = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} (r(x) - h(x)) dx. \quad (28)$$

Підставивши висоту зазорів у вираз (28), отримаємо

$$\Delta v^\infty = \frac{A}{2} - \sum_{l=0}^L \Theta_l \alpha^{-2l} (-1)^l \left(\sqrt{\alpha^2 + 1} - 1 \right)^{2l+1}. \quad (29)$$

3. Аналіз результатів

Розрахунки проведено для безрозмірних величин: висоти міжконтактного зазору $\tilde{h} = h/d$; півширини ділянки міжконтактного зазору $\tilde{a} = a/d$; ширини ділянки контакту $\tilde{c} = 1 - \tilde{a}$; півширини ділянки з газом $\tilde{b} = b/d$; поверхневого натягу рідини $\tilde{\sigma} = K\sigma/d$; тиску на нескінченості $\tilde{P}^\infty = KP^\infty$; тиску газу $\tilde{P}_1 = KP_1$; амплітуди хвилястої поверхні $\tilde{A} = A/d$; контактного зближення $\tilde{\Delta v}^\infty = \Delta v^\infty/d$;

об'єму рідини в зазорі $\tilde{V}_0 = V_0/V$, де V — об'єм виїмки. Числовий аналіз здійснено для амплітуди хвилястої поверхні $\tilde{A} = 0,001$ та тиску газу $\tilde{P}_1 = 10^{-3}$.

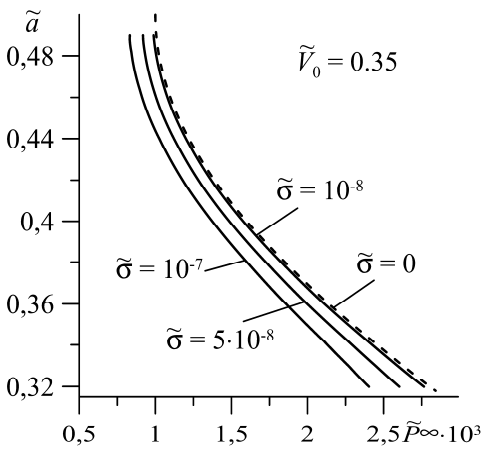


Рис. 2

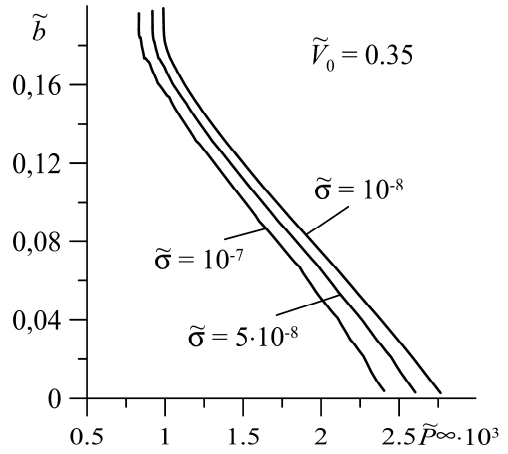


Рис. 3

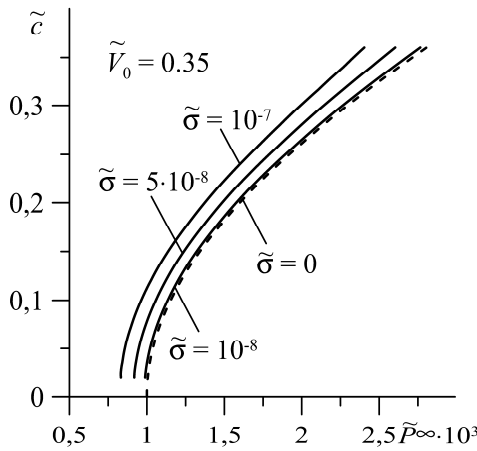


Рис. 4

Залежність півщини міжконтактних зазорів \tilde{a} , півщини ділянок дії газу \tilde{b} та ширини ділянки контакту двох тіл \tilde{c} від зовнішнього навантаження \tilde{P}^∞ за різних значень поверхневого натягу рідини $\tilde{\sigma} = 10^{-8}$, $\tilde{\sigma} = 5 \cdot 10^{-8}$, $\tilde{\sigma} = 10^{-7}$ та фіксованого об'єму рідини $\tilde{V}_0 = 0,35$ проілюстровано на рис. 2, рис. 3 та рис. 4 відповідно. Півширина міжконтактних зазорів \tilde{a} та півширина ділянок дії газу \tilde{b} монотонно спадають зі збільшенням навантаження, а ширина ділянки контакту \tilde{c} зростає. Збільшення поверхневого натягу рідини $\tilde{\sigma}$ зумовлює зменшення півщини міжконтактних зазорів \tilde{a} і півщини ділянок дії газу \tilde{b} та збільшення ширини ділянки контакту \tilde{c} .

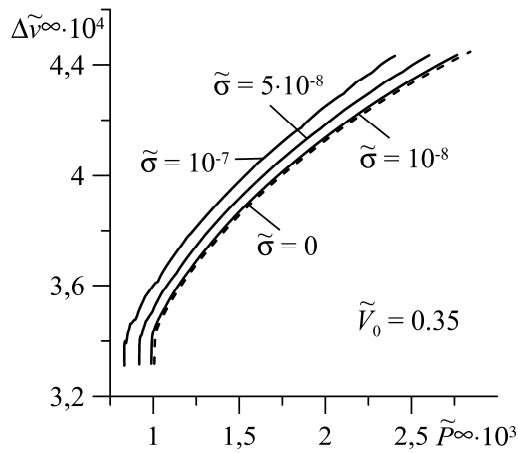


Рис. 5

На рис. 6 зображено висоту зазорів $\tilde{h}(\tilde{x})$ за фіксованого об'єму рідини $\tilde{V}_0 = 0,35$ для різних значень поверхневого натягу рідини $\tilde{\sigma}$ при фіксованому зовнішньому навантаженні $\tilde{P}^\infty = 0,002$. Збільшення поверхневого натягу рідини $\tilde{\sigma}$ зумовлює зменшення висоти міжконтактних зазорів, яке найбільше проявляється у центральній частині зазорів.

На рис. 7 подано розподіл тиску поверхонь тіл $\tilde{P}(\tilde{x})$ для різних поверхневих натягів рідини $\tilde{\sigma}$ за навантаження $\tilde{P}^\infty = 0,002$. Дві горизонтальні ділянки на графіках відображають розподіл тиску вздовж зазору: перша — на його середній частині, що заповнена газом, де тиск рівний \tilde{P}_1 , друга — на його крайніх ділянках, які заповнені рідиною, де тиск є найменшим. При віддаленні від зазору контактний тиск монотонно зростає, набуваючи максимуму в точках $x = \pm 0,5$, в яких досягається максимальна висота виступів хвилястої межі.

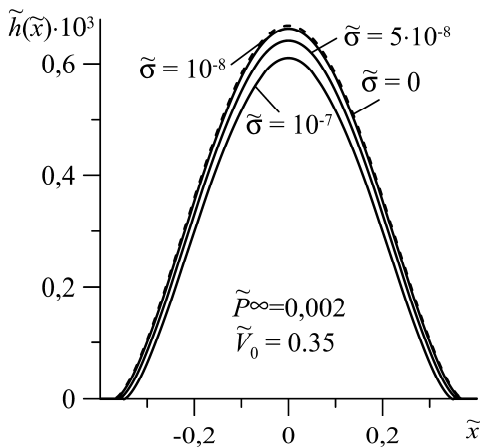


Рис. 6

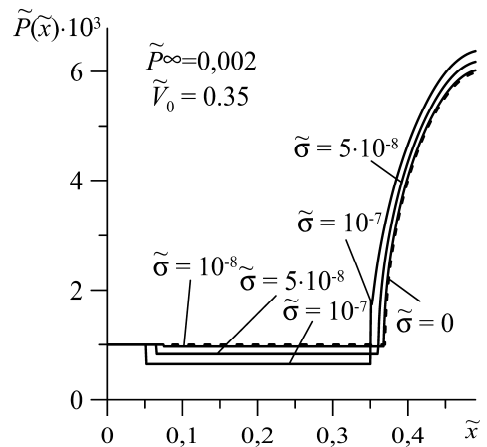


Рис. 7

За більшого поверхневого натягу рідини $\tilde{\sigma}$ тиск заповнювача в зазорі менший, а контактний тиск поза зазором — більший. Коли нехтуємо поверхневим натягом рідини ($\sigma = 0$), то контактний тиск є найменшим.

Залежність контактної зближенні тіл $\Delta\tilde{\nu}^\infty$ від навантаження \tilde{P}^∞ та поверхневого натягу рідини $\tilde{\sigma}$ за фіксованого об'єму рідини $\tilde{V}_0 = 0,35$ зображено на рис. 5. Зі збільшенням зовнішнього навантаження \tilde{P}^∞ контактне зближення тіл $\Delta\tilde{\nu}^\infty$ монотонно збільшується. Що більший поверхневий натяг рідини, то більше контактне зближення тіл $\Delta\tilde{\nu}^\infty$. Коли нехтуємо поверхневим натягом рідини ($\sigma = 0$), то контактне зближення тіл є найменшим.

Висновки. Досліджено контакт двох пружних ізотропних півнескінчених тіл, поверхня одного з яких прямолінійна, а іншого — хвиляста. Внаслідок нерівності однієї межі контакт тіл неповний і між ними виникають зазори, що містять газ та нестисливу рідину, яка змочує поверхні тіл. Перепад тисків в рідині та газі описується формулою Лапласа. Ширини зазорів та ділянок дії газу заздалегідь невідомі та залежать від навантаження. Сформульовану контактну задачу зведено до сингулярного інтегрального рівняння з ядром Гільберта відносно похідної від висоти міжконтактних зазорів та системи двох трансцендентних рівнянь відносно ширини зазорів та ділянки з газом. Запропоновано аналітично-числову процедуру розв'язання цієї системи рівнянь з використанням методу послідовних наближень і досліджено залежності ширини та висоти зазорів, ширини ділянки з газом, контактної зближенні тіл від прикладеного навантаження, об'єму рідини і її поверхневого натягу. Встановлено, що збільшення поверхневого натягу рідини зумовлює спадання ширини зазорів та ділянок з газом. Наявність рідинних містків зумовлює зменшення висоти зазору — чим більший поверхневий натяг рідини, тим менший зазор. Контактний тиск набуває максимуму в точках, в яких досягається максимальна висота виступів хвилястої межі.

Література

- [1] *Kato Takahisa, Watanabe Souta, Matsuoka Hiroshige.* Dynamic characteristics of an in-contact headslider considering meniscus force: Part 1 — Formulation and application to the disk with sinusoidal undulation // *J. Tribology.* — 2000. — Vol. 122. — P. 633–638.
- [2] *Kato Takahisa, Watanabe Souta, Matsuoka Hiroshige.* Dynamic characteristics of an in-contact headslider considering meniscus force: Part 2 — Application to the disk with random undulation and design conditions // *J. Tribology.* — 2001. — Vol. 123. — P. 168–174.
- [3] *Kobatake S., Kawakubo Y., Suzuki S.* Laplace pressure measurement on laser textured thin-film disk // *Tribology Int.* — 2003. — Vol. 36. — P. 329–333.
- [4] *Shi L., Majumdar A.* Thermal transport mechanisms at nanoscale point contacts // *J. Heat Transfer.* — 2001. — Vol. 124 (2). — P. 329–337.
- [5] *Zitzler L.* Capillary forces in tapping mode atomic force microscopy / L. Zitzler, S. Herminghaus, F. Mugele // *Physical review.* — 2002. — В 66. — P. 155436 (8 pages).
- [6] *Максимук О. В.* Періодична контактна задача про взаємодію зубчастої та плоскої поверхонь // *Машинознавство.* — 2001. — № 2. — С. 13-17.

- [7] *Маланчук Н.* Локальне фрикційне проковзування пружних тіл із хвилястим рельєфом поверхонь // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2013. — Вип. 17. — С. 112-119.
- [8] *Block J. M., Keer L. M.* Periodic contact problems in plane elasticity // J. Mech. Mater. Struct. — 2008. — Vol. 3, No 7. — P. 1207-1237.
- [9] *Goryacheva I. G., Martynyak R.M.* Contact problems for textured surfaces involving frictional effects // Proc. Inst. Mech. Eng., Part J: J. Eng. Tribol. — 2014. — Vol. 228, No 7. — P. 707-716.
- [10] *Kryshchak A., Martynyak R.* Frictional contact of two elastic half-planes with wavy surfaces // J. Friction and Wear. — 2000. — Vol. 21, No 5. — P. 1-8.
- [11] *Martynyak R. M.* The contact of a half-space and an uneven base in the presence of an intercontact gap filled by an ideal gas // Journal of Mathematical Sciences. — 2001. — Vol. 107, No 1. — P. 3680-3685.
- [12] *Martynyak R. M., Chumak K. A.* Thermoelastic contact of half-spaces with equal thermal distortivities in the presence of a heat-permeable intersurface gap // J. Math. Sciences. — Vol. 165, No 3, — P. 355-370.
- [13] *Kit G. S., Martynyak R. M., Machishin I. M.* The effect of a fluid in the contact gap on the stress state of conjugate bodies // International Applied Mechanics. — 2003. — Vol. 39, No 3. — P. 292-299.
- [14] *Martynyak R. M.* Mechanothermodiffusion interaction of bodies with regard for the filler of intercontact gaps // Materials Science. — 2000. — Vol. 36, No 2. — P. 300-304.
- [15] *Martynyak R., Chumak K.* Effect of heat-conductive filler on interface gap on thermoelastic contact of solids // Int. J. Heat Mass Transfer. — 2012. — Vol. 55, No 4. — P. 1170-1178.
- [16] *Shvets R.N., Martynyak R.M.* Integral-equations of the contact thermoelasticity problem for rough bodies // Dopovidi Akademii Nauk Ukrainskoi RSR. Seriya A-Fiziko-Matematichni ta Technichni Nauki. — 1985. — No 11. — P. 37-40.
- [17] *Martynyak R., Chumak K.* Thermoelastic delamination of bodies in the presence of a heat-conducting filler of the intercontact gap // Materials Science. — 2009. — Vol. 45, No 4. — P. 513-522.
- [18] *Martynyak R. M., Slobodyan B. S.* Contact of elastic half spaces in the presence of an elliptic gap filled with liquid // Materials Science. — 2009. — Vol. 45, No 1. — P. 66-71.
- [19] *Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М.* Взаємодія двох пружних тіл за наявності між ними періодично розташованих зазорів, заповнених реальним газом // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2015. — Т. 58, № 1. — С. 103-111.
- [20] *Goryacheva I. G., Martynyak R. M.* Contact problems for textured surfaces involving frictional effects // Proc. Inst. Mech. Eng., Part J: J. Eng. Tribol. — 2014. — Vol. 228, No 7. — С. 707-716.
- [21] *Горячева И., Мартыняк Р.* Периодические контактные задачи с трением и изнашиванием поверхностей // "Развитие идей Л.А. Галина в механике". — 2012. — С. 305-335.
- [22] *Goryacheva, I.G., Malanchuk, N.I., Martynyak, R.M.* Contact interaction of bodies with a periodic relief during partial slip. // J. Appl. Math. Mech. — 2012 — Vol. 76 (5). — P. 621-630.
- [23] *Кузнецов Е. А.* О контакте шероховатых тел при наличии сжимаемой смазки // Прикл. механика. — 1988. — Vol. 24, No 12. — С. 85-94.
- [24] *Kuznetsov Ye. A.* Effect of fluid lubricant on the contact characteristics of rough elastic bodies in compression // Wear. — 1985. — Vol. 102, No 3. — P. 177- 194.
- [25] *Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М.* Вплив ідеального газу у міжповерхневих зазорах на контакт двох пружних тіл із хвилястим рельєфом поверхні // Прикл. проблеми мех. і мат. — 2015. — Вип. 13. — С.135-140.
- [26] *Горячева И. Г., Маховская Ю. Ю.* Адгезионное взаимодействие упругих тел // Прикл. математика и механика — 2001. — Т. 65, Вып. 2. — С. 279-289.
- [27] *Zhehg Jie., Streutor J. L.* A liquid bridge between two elastic half-spaces: A theoretical study of interface instability // Tribology Lett. — 2004. — Vol. 16, No 1-2. — P. 1-9.
- [28] *Чекина О. Г.* О трении шероховатых поверхностей, разделенных тонким слоем жидкости // Трение и износ. — 1998. — 19, № 3. — С. 306-311.

- [29] *Чирик С. А.* Капиллярный механизм адгезии и трения шероховатых поверхностей, разделенных тонким слоем жидкости // Трение и износ. — 1994. — 15, № 1. — С. 11–26.
- [30] *Мартиняк Р. М., Слободян Б. С.* Взаємодія двох тіл за наявності капілярів у міжконтактному зазорі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2006. — Т. 49, № 1. — С. 164–173.
- [31] *Мартиняк Р. М., Слободян Б. С., Чирик С. А.* Контактна взаємодія тіл за наявності в між поверхневому зазорі ідеального газу та рідинних містків // Фіз.-мат. модел. та інформаційні технології. — 2013. — Вип. 18. — С. 189–197.
- [32] *Martynyak R. M., Slobodyan B. S.* Influence of liquid bridges in the interface gap on the contact of bodies made of compliant materials // Materials Science. — 2008. — Vol. 44, No 2. — P. 147–155.
- [33] *Slobodyan B. S.* Pressure of an elastic body on a rigid base with a recess partially filled with a liquid that does not wet their surfaces // Materials Science. — 2011. — Vol. 47, No 4. — P. 561–568.
- [34] *Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М.* Взаимодействие упругих тел с периодическим рельефом при наличии жидкостных мостиков в межконтактных зазорах // Теоретическая и прикладная механика. — 2013. — Вып. 7 (53). — С. 45–52.
- [35] *Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М.* Контакт пружних тіл за наявності газу та незмочувальної рідини у періодичних міжповерхневих просвітах // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 2015. — №6. — С.50–57.
- [36] *Kozachok O. P., Slobodyan B. S., Martynyak R. M.* Contact of elastic bodies in the presence of gas and incompressible liquid in periodic interface gaps // Materials Science. — 2016. — Vol. 51, No. 6. — P. 804–813.
- [37] *Martynyak R.M., Slobodyan B.S., Zelenyak V.M.* Pressure of an elastic half space on a rigid base with rectangular hole in the case of a liquid bridge between them. // J. Math. Sci. — 2009 — Vol. 160 (4). — P. 470–477.
- [38] *Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М.* Вплив міжповерхневих рідинних містків на контакт пружного тіла і жорсткої основи з періодичною системою прямокутних виїмок // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2015. — Вип. 22. — С.67–76.
- [39] *Арцыбашев С.А.* Курс физики. Ч. 1. Механика и теплота — М.: Гос. уч.-пед. изд-во мин. просвещения РСФСР, 1951. — 672 с.
- [40] *Мухомеливили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968. — 514 с.

Influence of interstitial liquid bridges on contact interaction between bodies with wavy relief

Oleg Kozachok, Bogdan Slobodian, Rostyslav Martynyak

The frictional contact between two semi-infinite elastic bodies, one of which has a wavy surface, is considered for the case when there are an incompressible liquid wetting the surfaces of the bodies at the edges of the intersurface gaps and a gas under constant pressure in the central parts of the gaps. Due to the surface tension of the liquid, a pressure drop occurs in the liquid and the gas, which is described by the Laplace formula. The formulated contact problem is reduced to a singular integral equation (SIE) with the Hilbert kernel, which is transformed into a SIE with the Cauchy kernel for a derivative of a height of the gaps. A system of transcendental equations for widths of gaps and regions with the gas is obtained from the condition of boundedness of the SIE solution at the integration interval ends and the condition of liquid's amount conservation, and then it is solved numerically. The dependences of the width and shape of the gaps, the width of the regions with the gas, the contact approach of the bodies on the applied load and the surface tension of the liquid are analyzed.

Влияние межповерхностных жидкостных мостиков на контактное взаимодействие тел с волнистым рельефом

Олег Козачок, Богдан Слободян, Ростислав Мартыняк

Рассмотрен безфрикционный контакт двух полубесконечных упругих тел, одно из которых имеет волнистую поверхность, когда на краях межповерхностных зазоров содержится несжимаемая жидкость, которая смачивает поверхности тел, а в средних частях — газ, находящийся под постоянным давлением. Вследствии поверхностного натяжения жидкости возникает перепад давлений в жидкости и газе, который описывается формулой Лапласа. Сформулированная контактная задача сведена к сингулярному интегральному уравнению (СИУ) с ядром Гильберта, которое трансформировано в СИУ с ядром Коши относительно производной от высоты зазоров. Из условия ограниченности на концах отрезка интегрирования решения этого СИУ и из условия сохранения количества жидкости получена и численно решена система трансцендентных уравнений для определения ширины зазоров и участков с газом. Проанализированы зависимости ширины и формы зазоров, ширины участков с газом, контактного сближения тел от приложенной нагрузки и поверхностного натяжения жидкости.

Отримано 22.11.16