УДК 519.6: 539.3

Диференціально-різницеві ітераційні алгоритми декомпозиції області для задач про односторонній контакт багатьох пружних тіл

Ігор Прокопишин[1], Степан Шахно[2]

[1]к. ф.-м. н., ст. н. с., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3*б*, Львів, e-mail: ihor84@gmail.com
[2]д. ф.-м. н., проф., Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, e-mail: sshakhno@hotmail.com

Запропоновано неявні двоточкові диференціально-різницеві паралельні ітераційні алгоритми декомпозиції області для розв'язування задач про контакт багатьох пружних тіл. На основі скінченноелементних апроксимацій здійснено їх програмну реалізацію для випадку плоских контактних задач. Досліджено вплив ітераційних параметрів на швидкість збіжності розроблених алгоритмів. Проведено порівняння числової ефективності двоточкових та одноточкових ітераційних методів декомпозиції області.

Ключові слова: задачі з недиференційовним оператором, контактні задачі теорії пружності, варіаційні нерівності, нелінійні варіаційні рівняння, метод штрафу, диференціально-різницеві ітераційні методи, напівгладкий метод Ньютона, методи декомпозиції області, метод скінченних елементів

Вступ. Проблема розв'язування нелінійних операторних і варіаційних рівнянь з недиференційовним оператором виникає у багатьох галузях сучасної науки, зокрема і в механіці деформівного твердого тіла. Такими рівняннями можна описувати математичні моделі теорії пластичності, а також механіки контактної взаємодії.

Ефективними ітераційними методами розв'язування згаданих рівнянь є різницеві методи [1-8] та напівгладкі методи Ньютона [9-11], які, зазвичай, мають надлінійну швидкість збіжності в околі розв'язку. Обидва класи методів є узагальненнями методу Ньютона, який безпосередньо не є застосовним до рівнянь з недиференційовним оператором. В ітераційних методах різницевого типу похідну оператора, яку використовують у класичному методі Ньютона, замінюють різними різницевими формулами, а у напівгладких методах Ньютона — узагальненою похідною.

У пропонованій роботі розглянуто задачу про односторонній контакт багатьох пружних тіл скінченних розмірів, яка у слабкій постановці описується нелінійним варіаційним рівнянням з недиференційовним оператором у гільбертовому просторі.

Ефективним підходом до розв’язування задач про контакт багатьох тіл є застосування методів декомпозиції за підобластями (тілами). Методи декомпозиції області (МДО) — це клас алгоритмів, які зводять розв’язування задач математичної фізики у складних багатокомпонентних областях до розв’язування послідовності задач в окремих підобластях. Це дозволяє організовувати розпаралелення обчислень та використовувати різні математичні моделі і методи в різних підобластях.

На жаль, застосування різницевих ітераційних методів та напівгладких методів Ньютона до розв’язування нелінійного варіаційного рівняння контактної задачі, що розглядається, не дозволяє отримати декомпозицію за підобластями.

У цьому дослідженні запропоновано такі ітераційні методи, які приводять до декомпозиції задачі за підобластями, тобто зводять розв’язування отриманого нелінійного варіаційного рівняння до розв’язування на кожній ітерації незалежних лінійних варіаційних рівнянь в окремих підобластях (тілах). Розроблено два класи паралельних ітераційних методів декомпозиції області типу Робіна — одноточкові та двоточкові неявні нестаціонарні параметричні алгоритми декомпозиції. Деякі з алгоритмів першого класу можна розглядати як певні модифікації напівгладких методів Ньютона. Алгоритми МДО другого класу отримано на основі модифікацій комбінованих диференціально-різницевих методів, а саме — комбінованого методу Ньютона і хорд [6, 8] та комбінованого методу Ньютона і Курчатова [5, 6].

Доведено теорему про умови слабкої збіжності методів першого класу. Здійснено програмну реалізацію розроблених МДО з використанням скінченно-елементних апроксимацій на трикутних елементах для плоских задач про односторонній контакт пружних тіл. Досліджено вплив ітераційних параметрів на швидкість збіжності запропонованих методів. Проведено порівняння числової ефективності алгоритмів декомпозиції області з обох класів.

1. Постановка задачі

Розглянемо задачу про односторонній контакт N пружних тіл $\Omega_\alpha \subset \mathbb{R}^3$ з ліпшицевими межами $\Gamma_\alpha = \partial\Omega_\alpha$, $\alpha = 1, 2, ..., N$ (рис. 1). Позначимо $\Omega = \bigcup_{\alpha=1}^{N} \Omega_\alpha$.

У просторі $\mathbb{R}^3$ введемо ортонормований базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Напружено-деформований стан у точці $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^\mathsf{T}$ кожного з тіл Ω_α визначають вектор переміщень $\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{x}) = u_{\alpha i}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i$, симетричні тензори деформацій $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_\alpha(\mathbf{x}) = \varepsilon_{\alpha ij}(\mathbf{x})\,\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ і напружень $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_\alpha(\mathbf{x}) = \sigma_{\alpha ij}(\mathbf{x})\,\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$. Ці величини задовольняють рівняння рівноваги, закон Гука та співвідношення Коші:

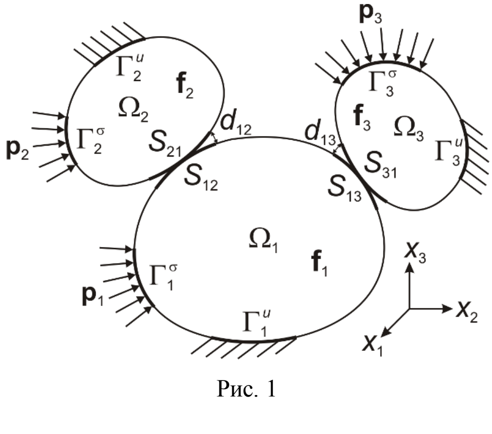

Рис. 1

$$\sum_{j=1}^{3} \partial\sigma_{\alpha ij}(\mathbf{x}) \big/ \partial x_j + f_{\alpha i}(\mathbf{x}) = 0 , \quad i = 1,2,3 , \quad \mathbf{x} \in \Omega_\alpha , \tag{1}$$

$$\sigma_{\alpha ij}(\mathbf{x}) = \sum_{k,l=1}^{3} C_{\alpha ijkl}(\mathbf{x})\, \varepsilon_{\alpha kl}(\mathbf{x}) , \quad i, j = 1,2,3 , \quad \mathbf{x} \in \Omega_\alpha , \tag{2}$$

$$\varepsilon_{\alpha ij}(\mathbf{x}) = \left(\partial u_{\alpha i}(\mathbf{x}) / \partial x_j + \partial u_{\alpha j}(\mathbf{x}) / \partial x_i \right) \big/ 2 , \quad i, j = 1,2,3 , \quad \mathbf{x} \in \Omega_\alpha , \tag{3}$$

де $f_{\alpha i}(\mathbf{x})$ — компоненти вектора об'ємних сил $\mathbf{f}_\alpha(\mathbf{x}) = f_{\alpha i}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i$, що діють на тіло Ω_α, а $C_{\alpha ijkl}(\mathbf{x})$ — компоненти симетричного тензора пружних сталих, що мають властивість [12]:

$$\left(\exists b_\alpha, c_\alpha > 0\right)\left(\forall \mathbf{x} \in \Omega_\alpha\right)\left\{ b_\alpha \sum_{i,j} \varepsilon_{\alpha ij}^2 \le \sum_{i,j,k,l} C_{\alpha ijkl}\, \varepsilon_{\alpha ij}\, \varepsilon_{\alpha kl} \le c_\alpha \sum_{k,l} \varepsilon_{\alpha kl}^2 \right\} . \tag{4}$$

На поверхні $\Gamma_\alpha = \partial\Omega_\alpha$ кожного з тіл уведемо локальний ортонормований базис $\boldsymbol{\xi}_\alpha, \boldsymbol{\eta}_\alpha, \mathbf{n}_\alpha$, де $\mathbf{n}_\alpha$ — одинична зовнішня нормаль, а $\boldsymbol{\xi}_\alpha, \boldsymbol{\eta}_\alpha$ — одиничні дотичні. Вектори переміщень і напружень на Γ_α у цьому базисі запишемо так:

$$\mathbf{u}_\alpha = u_{\alpha\xi}\boldsymbol{\xi}_\alpha + u_{\alpha\eta}\boldsymbol{\eta}_\alpha + u_{\alpha n}\,\mathbf{n}_\alpha , \quad \boldsymbol{\sigma}_\alpha = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\alpha = \sigma_{\alpha\xi}\boldsymbol{\xi}_\alpha + \sigma_{\alpha\eta}\boldsymbol{\eta}_\alpha + \sigma_{\alpha n}\,\mathbf{n}_\alpha .$$

Припустимо, що поверхня Γ_α складається з трьох частин, які не перетинаються: $\Gamma_\alpha = \Gamma_\alpha^u \cup \Gamma_\alpha^\sigma \cup S_\alpha$, де $\Gamma_\alpha^u = \overline{\Gamma_\alpha^u}$, $\Gamma_\alpha^u \ne \varnothing$, $S_\alpha = \bigcup_{\beta \in B_\alpha} S_{\alpha\beta} \ne \varnothing$. На частині Γ_α^u поверхні Γ_α, $\alpha = 1,2,\ldots,N$, задано кінематичні крайові умови, які для спрощення варіаційних формулювань вважаємо нульовими, а на частині Γ_α^σ — статичні крайові умови:

$$\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{x}) = 0 , \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\alpha^u , \quad \boldsymbol{\sigma}_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_\alpha(\mathbf{x}) , \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\alpha^\sigma , \quad \alpha = 1,2,\ldots,N , \tag{5}$$

де $\mathbf{p}_\alpha = p_{\alpha\xi}\boldsymbol{\xi}_\alpha + p_{\alpha\eta}\boldsymbol{\eta}_\alpha + p_{\alpha n}\,\mathbf{n}_\alpha$ — задані навантаження.

Поверхня $S_{\alpha\beta} \subset \Gamma_\alpha$ відповідає ділянці можливого контакту тіла Ω_α з тілом Ω_β, а $B_\alpha \subset \{1,2,\ldots,N\}$ – множина індексів усіх тіл, які контактують з тілом Ω_α, $B_\alpha \ne \varnothing$, $\alpha = 1,2,\ldots,N$. Вважаємо, що поверхні $S_{\alpha\beta} \subset \Gamma_\alpha$ та $S_{\beta\alpha} \subset \Gamma_\beta$ достатньо близькі ($S_{\alpha\beta} \approx S_{\beta\alpha}$) [13], та приймаємо, що $\mathbf{n}_\alpha(\mathbf{x}) \approx -\mathbf{n}_\beta(\mathbf{x}')$, де $\mathbf{x}' = P(\mathbf{x}) \in S_{\beta\alpha}$ – проекція точки $\mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}$ на поверхню $S_{\beta\alpha}$. Відстань по нормалі між тілами Ω_α та Ω_β до деформації позначимо $d_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \pm\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| = \pm\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x_i - x_i')^2}$, де знак "$\pm$" залежить від формулювання конкретної задачі.

На поверхнях $S_{\alpha\beta}$ задано умови одностороннього контакту без тертя:

$$\sigma_{\alpha n}(\mathbf{x}) = \sigma_{\beta n}(\mathbf{x}') \le 0 , \quad \sigma_{\alpha\xi}(\mathbf{x}) = \sigma_{\beta\xi}(\mathbf{x}') = 0 , \quad \sigma_{\alpha\eta}(\mathbf{x}) = \sigma_{\beta\eta}(\mathbf{x}') = 0 , \tag{6}$$

$$u_{\alpha n}(\mathbf{x})+u_{\beta n}(\mathbf{x}')\le d_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), \tag{7}$$

$$\left[u_{\alpha n}(\mathbf{x})+u_{\beta n}(\mathbf{x}')-d_{\alpha\beta}(\mathbf{x})\right]\sigma_{\alpha n}(\mathbf{x})=0, \tag{8}$$

де $\mathbf{x}\in S_{\alpha\beta}$, $\mathbf{x}'=P(\mathbf{x})\in S_{\beta\alpha}$, $\beta\in B_\alpha$, $\alpha=1,2,...,N$.

Зазначимо, що контактна задача (1)-(3), (5)-(8) є нелінійною, оскільки істинні зони контакту наперед невідомі.

2. Варіаційні формулювання

Розглянемо простори Соболєва $V_\alpha=[H^1(\Omega_\alpha)]^3$, що відповідають областям Ω_α, та уведемо в них замкнуті підпростори $V_\alpha^0=\{\mathbf{u}_\alpha\in V_\alpha:\ \mathbf{u}_\alpha=0 \text{ на } \Gamma_\alpha^u\}$ зі скалярним добутком $\left(\mathbf{u}_\alpha,\mathbf{v}_\alpha\right)_{V_\alpha^0}=\sum_{i=1}^{3}\int_{\Omega_\alpha}\left(u_{\alpha i}v_{\alpha i}+\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u_{\alpha i}}{\partial x_j}\frac{\partial v_{\alpha i}}{\partial x_j}\right)d\Omega$ і нормою $\|\mathbf{u}_\alpha\|_{V_\alpha^0}=\sqrt{\left(\mathbf{u}_\alpha,\mathbf{u}_\alpha\right)_{V_\alpha^0}}$.

Значення елементів просторів V_α і V_α^0 на частинах межі області Ω_α будемо розуміти у сенсі слідів [14] та для простоти позначатимемо їх тими ж символами.

Розглянемо рефлексивний банаховий простір $V_0=V_1^0\times V_2^0\times...\times V_N^0$, який є прямим добутком просторів V_α^0. У просторі V_0 означимо скалярний добуток $\left(\mathbf{u},\mathbf{v}\right)_{V_0}=\sum_{\alpha=1}^{N}\left(\mathbf{u}_\alpha,\mathbf{v}_\alpha\right)_{V_\alpha^0}$ і норму $\|\mathbf{u}\|_{V_0}=\sqrt{\left(\mathbf{u},\mathbf{u}\right)_{V_0}}$, $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V_0$. Крім цього, введемо у V_0 опуклу замкнуту множину кінематично допустимих переміщень:

$$K=\left\{\mathbf{u}\in V_0:\ u_{\alpha n}+u_{\beta n}\le d_{\alpha\beta} \text{ на } S_{\alpha\beta},\ \{\alpha,\beta\}\in Q\right\}, \tag{9}$$

де $Q=\left\{\{\alpha,\beta\}:\ \alpha\in\{1,2,...,N\},\ \beta\in B_\alpha\right\}$ — множина всеможливих невпорядкованих пар індексів тіл, що контактують між собою, $u_{\alpha n}=\mathbf{n}_\alpha\cdot\mathbf{u}_\alpha\in H_{00}^{1/2}(\Xi_\alpha)$, $d_{\alpha\beta}\in H_{00}^{1/2}(\Xi_\alpha)$, $\Xi_\alpha=\Gamma_\alpha\setminus\Gamma_\alpha^u$.

У просторі V_0 визначимо білінійну форму $A(\mathbf{u},\mathbf{v})$, що відповідає сумарній енергії пружної деформації тіл:

$$A(\mathbf{u},\mathbf{v})=\sum_{\alpha=1}^{N}a_\alpha(\mathbf{u}_\alpha,\mathbf{v}_\alpha),\ \mathbf{u},\mathbf{v}\in V_0,\ \ a_\alpha(\mathbf{u}_\alpha,\mathbf{v}_\alpha)=\int_{\Omega_\alpha}\hat{\sigma}_\alpha(\mathbf{u}_\alpha):\hat{\varepsilon}_\alpha(\mathbf{v}_\alpha)d\Omega, \tag{10}$$

та лінійну форму $L(\mathbf{v})$, яка дорівнює роботі заданих зовнішніх сил:

$$L(\mathbf{v})=\sum_{\alpha=1}^{N}l_\alpha(\mathbf{v}_\alpha),\quad \mathbf{v}\in V_0,\quad l_\alpha(\mathbf{v}_\alpha)=\int_{\Omega_\alpha}\mathbf{f}_\alpha\cdot\mathbf{v}_\alpha\,d\Omega+\int_{\Gamma_\alpha^\sigma}\mathbf{p}_\alpha\cdot\mathbf{v}_\alpha\,dS, \tag{11}$$

де $\mathbf{f}_\alpha \in [L_2(\Omega_\alpha)]^3$, $\mathbf{p}_\alpha \in [L_2(\Gamma_\alpha^\sigma)]^3$, $\alpha = 1,2,...,N$.

Лема 1. Нехай поверхні $\Gamma_\alpha = \partial\Omega_\alpha$, $\alpha = 1,2,...,N$, тіл є ліпшицевими, $\Gamma_\alpha^u \neq \varnothing$, $\mathbf{f}_\alpha \in [L_2(\Omega_\alpha)]^3$, $\mathbf{p}_\alpha \in [L_2(\Gamma_\alpha^\sigma)]^3$, $C_{\alpha ijkl} \in L_\infty(\Omega_\alpha)$ та виконується умова (4). Тоді білінійна форма $A(\mathbf{u},\mathbf{v})$ — симетрична, неперервна з константою $M_A > 0$ та коерцитивна з константою $B_A > 0$ у просторі V_0, а лінійна форма $L(\mathbf{v})$ — неперервна.

Теорема 1. [13, 15] Вихідна контактна задача (1)-(3), (5)-(8) у слабкому розумінні еквівалентна задачі мінімізації на опуклій замкнутій множині $K \subsetneq V_0$ квадратичного функціонала:

$$F(\mathbf{u}) = A(\mathbf{u},\mathbf{u})/2 - L(\mathbf{u}) \to \min_{\mathbf{u} \in K}. \tag{12}$$

Теорема 2. Нехай виконуються умови *леми 1* та $d_{\alpha\beta} \in H_{00}^{1/2}(\Xi_\alpha)$. Тоді задача (12) має єдиний розв'язок та її розв'язання еквівалентне розв'язанню на множині K наступної варіаційної нерівності:

$$F'(\mathbf{u},\mathbf{v}-\mathbf{u}) = A(\mathbf{u},\mathbf{v}-\mathbf{u}) - L(\mathbf{v}-\mathbf{u}) \geq 0 \quad \forall\, \mathbf{v} \in K, \quad \mathbf{u} \in K. \tag{13}$$

Для зведення задачі мінімізації (12) на опуклій замкнутій множині K до задачі безумовної мінімізації у вихідному просторі V_0, застосуємо метод штрафу [12, 14]. За порушення умов непроникнення (7) уведемо штраф у такій формі:

$$J_\theta(\mathbf{u}) = \frac{1}{2\theta} \sum_{\{\alpha,\beta\}\in Q} \int_{S_{\alpha\beta}} \left[\left(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n} - u_{\beta n}\right)^-\right]^2 dS \geq 0, \quad \mathbf{u} \in V_0, \tag{14}$$

де $\theta > 0$ — параметр штрафу, $y^- = \min\{0, y\}$, та розглянемо задачу мінімізації функціонала зі штрафом у просторі V_0:

$$F_\theta(\mathbf{u}) = F(\mathbf{u}) + J_\theta(\mathbf{u}) = A(\mathbf{u},\mathbf{u})/2 - L(\mathbf{u}) + J_\theta(\mathbf{u}) \to \min_{\mathbf{u} \in V_0}. \tag{15}$$

Штрафний доданок $J_\theta(\mathbf{u})$ — невід'ємний та один раз диференційовний за Ґато:

$$J'_\theta(\mathbf{u},\mathbf{v}) = -\frac{1}{\theta} \sum_{\{\alpha,\beta\}\in Q} \int_{S_{\alpha\beta}} \left(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n} - u_{\beta n}\right)^- \left(v_{\alpha n} + v_{\beta n}\right) dS, \quad \mathbf{u},\mathbf{v} \in V_0. \tag{16}$$

Тут величини $\sigma_{\alpha\beta n} = \sigma_{\alpha n} = \sigma_{\beta n} = (d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n} - u_{\beta n})^- / \theta$ мають сенс нормальних контактних напружень. Диференціал Ґато $J'_\theta(\mathbf{u},\mathbf{v})$ — лінійний за $\mathbf{v}$ та нелінійний за $\mathbf{u}$.

Лема 2. [16, 17] Нехай поверхні $S_{\alpha\beta}$ є ліпшицевими та $d_{\alpha\beta} \in H_{00}^{1/2}(\Xi_\alpha)$. Тоді функціонал $J'_\theta(\mathbf{u},\mathbf{v})$ володіє властивостями:

$$\left(\forall \mathbf{u} \in V_0\right)\left(\exists R_J > 0\right)\left(\forall \mathbf{v} \in V_0\right)\left\{\left|J'_\theta(\mathbf{u},\mathbf{v})\right| \le R_J \left\|\mathbf{v}\right\|_{V_0}\right\}, \tag{17}$$

$$\left(\exists D_J > 0\right)\left(\forall \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in V_0\right)\left\{\left|J'_\theta(\mathbf{u}+\mathbf{w},\mathbf{v}) - J'_\theta(\mathbf{u},\mathbf{v})\right| \le D_J \left\|\mathbf{v}\right\|_{V_0}\left\|\mathbf{w}\right\|_{V_0}\right\}, \tag{18}$$

$$\left(\forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in V_0\right)\left\{ J'_\theta(\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{v}) - J'_\theta(\mathbf{u},\mathbf{v}) \ge 0 \right\}. \tag{19}$$

Теорема 3. [16, 17] Нехай виконуються умови *леми 1* і *леми 2*. Тоді задача (15) має єдиний розв’язок та її розв’язання еквівалентне розв’язанню в просторі V_0 нелінійного по $\mathbf{u}$ варіаційного рівняння:

$$F'_\theta(\mathbf{u},\mathbf{v}) = A(\mathbf{u},\mathbf{v}) + J'_\theta(\mathbf{u},\mathbf{v}) - L(\mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V_0, \quad \mathbf{u} \in V_0. \tag{20}$$

Крім цього, якщо $\bar{\mathbf{u}}_\theta \in V_0$ — розв’язок задачі (15) (варіаційного рівняння (20)) для $\theta > 0$, а $\bar{\mathbf{u}} \in K$ — розв’язок задачі (12) (варіаційної нерівності (13)), то $\bar{\mathbf{u}}_\theta$ збігається сильно в просторі V_0 до $\bar{\mathbf{u}}$ при $\theta \to 0$, тобто $\left\|\bar{\mathbf{u}}_\theta - \bar{\mathbf{u}}\right\|_{V_0} \underset{\theta \to 0}{\to} 0$.

Отже, застосовуючи метод штрафу, розв’язування варіаційної нерівності (13) на опуклій множині K зведено до розв’язування нелінійного варіаційного рівняння (20) у просторі V_0, залежного від параметра штрафу θ. Це варіаційне рівняння — недиференційовне, оскільки доданок $J'_\theta(\mathbf{u},\mathbf{v})$ не є диференційовним за Ґато.

3. Одноточкові алгоритми декомпозиції області

Застосуємо до розв’язування нелінійного варіаційного рівняння (20), яке відповідає контактній задачі (1)-(3), (5)-(8), наступний неявний одноточковий нестаціонарний ітераційний метод з параметрами [18, 19]:

$$G^k(\mathbf{u}^{k+1},\mathbf{v}) = G^k(\mathbf{u}^k,\mathbf{v}) - \gamma^k F'_\theta(\mathbf{u}^k,\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_0, \quad k = 0,1,..., \tag{21}$$

де $G^k : V_0 \times V_0 \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,...\}$, — деякі білінійні форми, задані у просторі V_0, $\gamma^k \in \mathbb{R}$, $k = 0,1,...$, — ітераційні параметри, $\mathbf{u}^k \in V_0$, $k = 1,2,...$, — k-ті наближення до точного розв’язку рівняння (20), а $\mathbf{u}^0 \in V_0$ — початкове наближення. У розгорнутому вигляді цей метод записується так:

$$G^k(\mathbf{u}^{k+1},\mathbf{v}) = G^k(\mathbf{u}^k,\mathbf{v}) - \gamma^k\left[A(\mathbf{u}^k,\mathbf{v}) + J'_\theta(\mathbf{u}^k,\mathbf{v}) - L(\mathbf{v})\right] \quad \forall \mathbf{v} \in V_0, \quad k = 0,1,... . \tag{22}$$

У загальному випадку ітераційний метод (22), застосований до розв’язування варіаційного рівняння (20), не приводить до декомпозиції задачі за підобластями. Тому опишемо такі варіанти цього методу, які на кожному ітераційному кроці реалізують таку декомпозицію, тобто які зводять розв’язування нелінійного варіаційного рівняння (20) у всій області Ω до розв’язування послідовності лінійних варіаційних рівнянь в окремих тілах Ω_α. Декомпозиції можна досягти завдяки певному вибору білінійних форм G^k в ітераційному процесі (22).

Виберемо білінійні форми G^k у методі (22) так:

$$G^k(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \partial^2 F_\theta(\mathbf{u}^k,\mathbf{u},\mathbf{v}) = A(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \partial^2 J_\theta(\mathbf{u}^k,\mathbf{u},\mathbf{v}), \quad \mathbf{u},\mathbf{v}\in V_0, \tag{23}$$

$$\partial^2 J_\theta(\mathbf{u}^k,\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{1}{\theta}\sum_{\{\alpha,\beta\}\in Q}\int_{S_{\alpha\beta}} \chi_{\alpha\beta}^k \left[u_{\alpha n} + u_{\beta n}\right]\left[v_{\alpha n} + v_{\beta n}\right] dS, \quad \mathbf{u},\mathbf{v}\in V_0, \tag{24}$$

$$\chi_{\alpha\beta}^k = -\left[\operatorname{sgn}(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^k - u_{\beta n}^k)\right]^-, \quad \{\alpha,\beta\}\in Q, \tag{25}$$

де $\partial^2 F_\theta(\mathbf{u}^k,\mathbf{u},\mathbf{v})$ та $\partial^2 J_\theta(\mathbf{u}^k,\mathbf{u},\mathbf{v})$ — другі субдиференціали Ґато функціоналів F_θ та J_θ у точці $\mathbf{u}^k \in V_0$ за напрямками $\mathbf{u}\in V_0$ і $\mathbf{v}\in V_0$.

Ітераційний метод (22) з білінійними формами (23) при $\gamma^k = 1$, $k = 0,1,...$, відповідає неявному напівгладкому методу Ньютона для розв'язування нелінійного варіаційного рівняння (20). Проте нестаціонарний ітераційний метод (22), (23) не приводить до декомпозиції задачі за підобластями.

Тепер білінійні форми G^k у методі (22) виберемо так [16, 17]:

$$G^k(\mathbf{u},\mathbf{v}) = A(\mathbf{u},\mathbf{v}) + X^k(\mathbf{u},\mathbf{v}), \quad \mathbf{u},\mathbf{v}\in V_0, \tag{26}$$

де $X^k : V_0 \times V_0 \to \mathbb{R}$ — наступні білінійні форми:

$$X^k(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{1}{\theta}\sum_{\{\alpha,\beta\}\in Q}\int_{S_{\alpha\beta}^k}\left(u_{\alpha n}v_{\alpha n} + u_{\beta n}v_{\beta n}\right)dS =$$

$$= \frac{1}{\theta}\sum_{\{\alpha,\beta\}\in Q}\int_{S_{\alpha\beta}} \psi_{\alpha\beta}^k\left(u_{\alpha n}v_{\alpha n} + u_{\beta n}v_{\beta n}\right)dS, \quad \mathbf{u},\mathbf{v}\in V_0. \tag{27}$$

Тут $S_{\alpha\beta}^k \subseteq S_{\alpha\beta}$, $k\in\mathbb{N}_0$, — деякі задані підмножини поверхонь $S_{\alpha\beta}$, $\{\alpha,\beta\}\in Q$, а $\psi_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x}) = \{0,\ \mathbf{x}\in S_{\alpha\beta}\setminus S_{\alpha\beta}^k\} \vee \{1,\ \mathbf{x}\in S_{\alpha\beta}^k\}$ — характеристичні функції, які визначають ці підмножини. Зокрема, функції $\psi_{\alpha\beta}^k$ можна задати як у напівгладкому методі Ньютона, тобто у вигляді

$$\psi_{\alpha\beta}^k = \chi_{\alpha\beta}^k = \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{u}^k) = -\left[\operatorname{sgn}(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^k - u_{\beta n}^k)\right]^-, \quad \{\alpha,\beta\}\in Q. \tag{28}$$

Покажемо, що такий вибір G^k зумовлює декомпозицію за підобластями. Увівши позначення $\tilde{\mathbf{u}}^{k+1} = [\mathbf{u}^{k+1} - (1-\gamma^k)\mathbf{u}^k]/\gamma^k$, запишемо ітераційний метод (22) з білінійними формами (26) у наступному еквівалентному вигляді:

$$A\left(\tilde{\mathbf{u}}^{k+1},\mathbf{v}\right)+X^k\left(\tilde{\mathbf{u}}^{k+1},\mathbf{v}\right)=L(\mathbf{v})+X^k(\mathbf{u}^k,\mathbf{v})-J'_\theta(\mathbf{u}^k,\mathbf{v}) \quad \forall\mathbf{v}\in V_0, \tag{29}$$

$$\mathbf{u}^{k+1}=\gamma^k\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}+(1-\gamma^k)\mathbf{u}^k, \quad k=0,1,\dots . \tag{30}$$

Оскільки величини, які є спільними для підобластей, відомі з попередньої ітерації, то варіаційне рівняння (29) розпадається на N незалежних варіаційних рівнянь в тілах Ω_α, і метод (29), (30) еквівалентний такому ітераційному методу [16, 17]:

$$a_\alpha(\tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1},\mathbf{v}_\alpha)+\frac{1}{\theta}\sum_{\beta\in B_\alpha}\int_{S_{\alpha\beta}}\psi_{\alpha\beta}^k\,\tilde{u}_{\alpha n}^{k+1}v_{\alpha n}\,dS=l_\alpha(\mathbf{v}_\alpha)+\frac{1}{\theta}\sum_{\beta\in B_\alpha}\int_{S_{\alpha\beta}}\psi_{\alpha\beta}^k\,u_{\alpha n}^k v_{\alpha n}\,dS+$$

$$+\frac{1}{\theta}\sum_{\beta\in B_\alpha}\int_{S_{\alpha\beta}}\left(d_{\alpha\beta}-u_{\alpha n}^k-u_{\beta n}^k\right)^- v_{\alpha n}\,dS \quad \forall\mathbf{v}_\alpha\in V_\alpha^0, \quad \alpha=1,2,\dots,N, \tag{31}$$

$$\mathbf{u}_\alpha^{k+1}=\gamma^k\tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1}+(1-\gamma^k)\mathbf{u}_\alpha^k, \quad \alpha=1,2,\dots,N, \quad k=0,1,\dots . \tag{32}$$

На кожній ітерації k методу (31), (32) необхідно паралельно розв'язувати N незалежних лінійних варіаційних рівнянь (31) в окремих тілах Ω_α, що відповідають задачам теорії пружності з крайовими умовами Робіна (Пуанкаре) на зонах можливого контакту $S_{\alpha\beta}$. Тому ітераційний метод (31), (32) належить до *паралельних схем Робіна (Пуанкаре) декомпозиції області* [16-22].

Нами доведено таке твердження про збіжність цього ітераційного методу.

Теорема 4. Нехай виконуються умови *леми 1* і *леми 2*. Тоді кожна із задач (31) має єдиний розв'язок $\tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1}\in V_\alpha^0$ для будь-якого $k\in\mathbb{N}_0$. Якщо, крім цього, ітераційні параметри задовольняють умову $\gamma^k\in\left(0;\,2B_A/(M_A+D_J)\right)$, $\forall k\in\mathbb{N}_0$, то послідовність $\{\mathbf{u}^k\}=\left\{(\mathbf{u}_1^k,\mathbf{u}_2^k,\dots,\mathbf{u}_N^k)^\top\right\}\subset V_0$, побудована методом (31), (32), за будь-якого початкового наближення $\mathbf{u}^0\in V_0$ при $k\to\infty$ збігається слабко у просторі V_0 до точного розв'язку $\bar{\mathbf{u}}_\theta\in V_0$ варіаційного рівняння (20), тобто $\left(\forall\mathbf{g}\in V_0^*\right)\left\{\left\langle\mathbf{g},\mathbf{u}^k\right\rangle\underset{k\to\infty}{\to}\left\langle\mathbf{g},\bar{\mathbf{u}}_\theta\right\rangle\right\}$, де V_0^* — простір, спряжений до V_0.

Вибираючи різні характеристичні функції $\psi_{\alpha\beta}^k=\psi_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x})$, $\{\alpha,\beta\}\in Q$, $k=0,1,\dots$, тобто різні підмножини $S_{\alpha\beta}^k\subseteq S_{\alpha\beta}$, можна отримати різні варіанти методу декомпозиції області (31), (32). Так, покладаючи $\psi_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x})\equiv 0$, тобто $S_{\alpha\beta}^k=\varnothing$, $\forall\alpha,\beta$, $\forall k$, отримаємо *паралельну схему Неймана* [16, 17]. Інший граничний випадок відпвідає $\psi_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x})\equiv 1$, тобто $S_{\alpha\beta}^k=S_{\alpha\beta}$, $\forall\alpha,\beta$, $\forall k$. Однак, числові експерименти, проведені нами, показали [16, 17], що найефективніше ці функції вибирати у вигляді (28). Тоді алгоритм декомпозиції області (31), (32) можна вважати модифікацією напівгладкого методу Ньютона. Такий вибір функцій $\psi_{\alpha\beta}^k$ забезпечить найвищу швидкість збіжності. Найменшу швидкість збіжності буде мати паралельна схема Неймана [16, 17].

4. Двоточкові алгоритми декомпозиції області

Тепер для розв'язування нелінійного варіаційного рівняння (20) застосуємо неявний двоточковий нестаціонарний ітераційний метод з параметрами:

$$G^{k,k-1}(\mathbf{u}^{k+1},\mathbf{v})=G^{k,k-1}(\mathbf{u}^{k},\mathbf{v})-\gamma^k F'_\theta(\mathbf{u}^k,\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v}\in V_0\,, \quad k=0,1,...\,, \tag{33}$$

де $G^{k,k-1}(\mathbf{u},\mathbf{v})=G(\mathbf{u}^k,\mathbf{u}^{k-1},\mathbf{u},\mathbf{v})$, $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V_0$, $k=0,1,...$, — деякі функціонали, $\gamma^k\in\mathbb{R}$, $k=0,1,...$, — ітераційні параметри, $\mathbf{u}^k\in V_0$, $k=1,2,...$, — k-ті наближення до точного розв'язку рівняння (20), а $\mathbf{u}^0,\mathbf{u}^{-1}\in V_0$ — початкові наближення.

Запишемо варіаційне рівняння (20) у такій формі:

$$F'_\theta(\mathbf{u},\mathbf{v})=F'(\mathbf{u},\mathbf{v})+J'_\theta(\mathbf{u},\mathbf{v})=0 \quad \forall \mathbf{v}\in V_0\,, \quad \mathbf{u}\in V_0\,, \tag{34}$$

де $F'(\mathbf{u},\mathbf{v})=A(\mathbf{u},\mathbf{v})-L(\mathbf{v})$ — частина, диференційовна за Ґато, а $J'_\theta(\mathbf{u},\mathbf{v})$ — недиференційовна частина. Зазначимо, що диференціал Ґато від $F'(\mathbf{u},\mathbf{v})$ за напрямком $\mathbf{w}\in V_0$ має вигляд $F''(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})=A(\mathbf{v},\mathbf{w})$, $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V_0$.

Диференціально-різницеві ітераційні алгоритми для розв'язування варіаційних рівнянь з недиференційовним оператором — це модифікації методу Ньютона, у яких використовується лише диференціал від диференційовної частини оператора, а недиференційовній частині відповідає певна різницева формула. Розглянемо такі ітераційні методи для розв'язування нашого нелінійного варіаційного рівняння (34).

Виберемо білінійні форми $G^{k,k-1}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ в ітераційному методі (33) для розв'язування (34) у такому вигляді:

$$G^{k,k-1}(\mathbf{u},\mathbf{v})=F''(\mathbf{u}^k,\mathbf{u},\mathbf{v})+H_\theta(\mathbf{u}^{k-1},\mathbf{u}^k,\mathbf{u},\mathbf{v})=$$

$$=A(\mathbf{u},\mathbf{v})+H_\theta(\mathbf{u}^{k-1},\mathbf{u}^k,\mathbf{u},\mathbf{v})\,, \quad \mathbf{u},\mathbf{v}\in V_0\,, \tag{35}$$

де $H_\theta(\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{u},\mathbf{v})$, $\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{u},\mathbf{v}\in V_0$, — поділена різниця першого порядку для функціонала $J'_\theta(\mathbf{u},\mathbf{v})$, що визначається так:

$$H_\theta(\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{u},\mathbf{v})=$$

$$=-\frac{1}{\theta}\sum_{\{\alpha,\beta\}\in Q}\int_{S_{\alpha\beta}}\frac{(d_{\alpha\beta}-y_{\alpha n}-y_{\beta n})^- -(d_{\alpha\beta}-z_{\alpha n}-z_{\beta n})^-}{y_{\alpha n}+y_{\beta n}-z_{\alpha n}-z_{\beta n}}\left[u_{\alpha n}+u_{\beta n}\right]\left[v_{\alpha n}+v_{\beta n}\right]dS\,. \tag{36}$$

Отримали ітераційний метод (33), (35), який при $\gamma^k=1$ відповідає неявному комбінованому диференціально-різницевому методу Ньютона-хорд [6, 8] для розв'язування варіаційного рівняння (34).

Тепер білінійні форми $G^{k,k-1}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ у методі (33) задамо так:

$$G^{k,k-1}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = F''(\mathbf{u}^k,\mathbf{u},\mathbf{v}) + H_\theta(2\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1},\mathbf{u}^{k-1},\mathbf{u},\mathbf{v}) =$$

$$= A(\mathbf{u},\mathbf{v}) + H_\theta(2\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1},\mathbf{u}^{k-1},\mathbf{u},\mathbf{v}), \quad \mathbf{u},\mathbf{v} \in V_0. \tag{37}$$

У результаті отримали неявний комбінований диференціально-різницевий ітераційний метод Ньютона-Курчатова [5, 6] для розв'язування нелінійного варіаційного рівняння (34), який описується ітераційними формулами (33), (37).

Однак, як і напівгладкий метод Ньютона, диференціально-різницеві ітераційні методи Ньютона-хорд та Ньютона-Курчатова не приводять до декомпозиції задачі за підобластями, тобто до розпаду варіаційного рівняння (33), що розв'язується на кожній ітерації, на незалежні рівняння в окремих тілах, оскільки поділена різниця $H_\theta(\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{u},\mathbf{v})$ містить доданки $u_{\alpha n} v_{\beta n}$ і $u_{\beta n} v_{\alpha n}$, $\{\alpha,\beta\} \in Q$, які є спільними для різних тіл. Тому було запропоновано модифікації комбінованих ітераційних методів Ньютона-хорд та Ньютона-Курчатова, які дозволяють отримати декомпозицію за підобластями.

Ці модифікації полягають у тому, що замість поділеної різниці $H_\theta(\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{u},\mathbf{v})$, $\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{u},\mathbf{v} \in V_0$, у білінійних формах (35) та (37) будемо застосовувати функціонал

$$\tilde{H}_\theta(\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{u},\mathbf{v}) =$$

$$= -\frac{1}{\theta} \sum_{\{\alpha,\beta\}\in Q} \int_{S_{\alpha\beta}} \frac{(d_{\alpha\beta} - y_{\alpha n} - y_{\beta n})^- - (d_{\alpha\beta} - z_{\alpha n} - z_{\beta n})^-}{y_{\alpha n} + y_{\beta n} - z_{\alpha n} - z_{\beta n}} \left[u_{\alpha n} v_{\alpha n} + u_{\beta n} v_{\beta n} \right] dS. \tag{38}$$

Цей функціонал відрізняється від поділеної різниці (36) тим, що не містить величин, спільних для підобластей.

Отже, білінійні форми $G^{k,k-1}(\mathbf{u},\mathbf{v})$, $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V_0$, у методі (33) вибираємо у вигляді

$$G^{k,k-1}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = A(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \tilde{H}_\theta(\mathbf{u}^{k-1},\mathbf{u}^k,\mathbf{u},\mathbf{v}), \quad \mathbf{u},\mathbf{v} \in V_0 \tag{39}$$

або

$$G^{k,k-1}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = A(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \tilde{H}_\theta(2\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1},\mathbf{u}^{k-1},\mathbf{u},\mathbf{v}), \quad \mathbf{u},\mathbf{v} \in V_0. \tag{40}$$

Увівши величину $\tilde{\mathbf{u}}^{k+1} = [\mathbf{u}^{k+1} - (1-\gamma^k)\mathbf{u}^k]/\gamma^k$, $k = 0,1,\ldots$, ітераційний метод (33) з білінійними формами (39) можна звести до вигляду:

$$A\left(\tilde{\mathbf{u}}^{k+1},\mathbf{v}\right) + \tilde{H}_\theta\left(\mathbf{u}^{k-1},\mathbf{u}^k,\tilde{\mathbf{u}}^{k+1},\mathbf{v}\right) = L(\mathbf{v}) + \tilde{H}_\theta(\mathbf{u}^{k-1},\mathbf{u}^k,\mathbf{u}^k,\mathbf{v}) - J'(\mathbf{u}^k,\mathbf{v}), \tag{41}$$

$$\mathbf{u}^{k+1} = \gamma^k \tilde{\mathbf{u}}^{k+1} + (1-\gamma^k)\mathbf{u}^k, \quad k = 0,1,\ldots\ . \tag{42}$$

Аналогічно, ітераційний метод (33), (40) можна записати у такій еквівалентній формі:

$$A\left(\tilde{\mathbf{u}}^{k+1},\mathbf{v}\right)+\tilde{H}_\theta\left(2\mathbf{u}^k-\mathbf{u}^{k-1},\mathbf{u}^{k-1},\tilde{\mathbf{u}}^{k+1},\mathbf{v}\right)=$$
$$=L(\mathbf{v})+\tilde{H}_\theta(2\mathbf{u}^k-\mathbf{u}^{k-1},\mathbf{u}^{k-1},\mathbf{u}^k,\mathbf{v})-J'(\mathbf{u}^k,\mathbf{v})\quad\forall\mathbf{v}\in V_0\,, \tag{43}$$

$$\mathbf{u}^{k+1}=\gamma^k\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}+(1-\gamma^k)\mathbf{u}^k\,,\quad k=0,1,...\ . \tag{44}$$

Варіаційне рівняння (41) розпадається на N незалежних варіаційних рівнянь в підобластях Ω_α, і метод (41), (42) еквівалентний наступному ітераційному процесу:

$$a_\alpha(\tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1},\mathbf{v}_\alpha)+\frac{1}{\theta}\sum_{\beta\in B_\alpha}\int_{S_{\alpha\beta}}\frac{(d_{\alpha\beta}-u_{\alpha n}^{k-1}-u_{\beta n}^{k-1})^- -(d_{\alpha\beta}-u_{\alpha n}^{k}-u_{\beta n}^{k})^-}{u_{\alpha n}^{k-1}+u_{\beta n}^{k-1}-u_{\alpha n}^{k}-u_{\beta n}^{k}}\tilde{u}_{\alpha n}^{k+1}v_{\alpha n}\,dS=$$
$$=l_\alpha(\mathbf{v}_\alpha)+\frac{1}{\theta}\sum_{\beta\in B_\alpha}\int_{S_{\alpha\beta}}\frac{(d_{\alpha\beta}-u_{\alpha n}^{k-1}-u_{\beta n}^{k-1})^- -(d_{\alpha\beta}-u_{\alpha n}^{k}-u_{\beta n}^{k})^-}{u_{\alpha n}^{k-1}+u_{\beta n}^{k-1}-u_{\alpha n}^{k}-u_{\beta n}^{k}}u_{\alpha n}^{k}v_{\alpha n}\,dS+$$
$$+\frac{1}{\theta}\sum_{\beta\in B_\alpha}\int_{S_{\alpha\beta}}\left(d_{\alpha\beta}-u_{\alpha n}^{k}-u_{\beta n}^{k}\right)^- v_{\alpha n}\,dS\quad\forall\mathbf{v}_\alpha\in V_\alpha^0,\quad\alpha=1,2,...,N\,, \tag{45}$$

$$\mathbf{u}_\alpha^{k+1}=\gamma^k\tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1}+(1-\gamma^k)\mathbf{u}_\alpha^k\,,\quad\alpha=1,2,...,N\,,\quad k=0,1,...\ . \tag{46}$$

Подібно, ітераційний метод (43), (44) еквівалентний такому методу декомпозиції області:

$$a_\alpha(\tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1},\mathbf{v}_\alpha)+\frac{1}{\theta}\sum_{\beta\in B_\alpha}\int_{S_{\alpha\beta}}\frac{(d_{\alpha\beta}-2u_{\alpha n}^{k}-2u_{\beta n}^{k}+u_{\alpha n}^{k-1}+u_{\beta n}^{k-1})^- -(d_{\alpha\beta}-u_{\alpha n}^{k-1}-u_{\beta n}^{k-1})^-}{2(u_{\alpha n}^{k}+u_{\beta n}^{k}-u_{\alpha n}^{k-1}-u_{\beta n}^{k-1})}\tilde{u}_{\alpha n}^{k+1}v_{\alpha n}\,dS=$$
$$=l_\alpha(\mathbf{v}_\alpha)+\frac{1}{\theta}\sum_{\beta\in B_\alpha}\int_{S_{\alpha\beta}}\frac{(d_{\alpha\beta}-2u_{\alpha n}^{k}-2u_{\beta n}^{k}+u_{\alpha n}^{k-1}+u_{\beta n}^{k-1})^- -(d_{\alpha\beta}-u_{\alpha n}^{k-1}-u_{\beta n}^{k-1})^-}{2(u_{\alpha n}^{k}+u_{\beta n}^{k}-u_{\alpha n}^{k-1}-u_{\beta n}^{k-1})}u_{\alpha n}^{k}v_{\alpha n}\,dS+$$
$$+\frac{1}{\theta}\sum_{\beta\in B_\alpha}\int_{S_{\alpha\beta}}\left(d_{\alpha\beta}-u_{\alpha n}^{k}-u_{\beta n}^{k}\right)^- v_{\alpha n}\,dS\quad\forall\mathbf{v}_\alpha\in V_\alpha^0,\quad\alpha=1,2,...,N\,, \tag{47}$$

$$\mathbf{u}_\alpha^{k+1}=\gamma^k\tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1}+(1-\gamma^k)\mathbf{u}_\alpha^k\,,\quad\alpha=1,2,...,N\,,\quad k=0,1,...\ . \tag{48}$$

У результаті отримали два двоточкові алгоритми декомпозиції області (45), (46) та (47), (48), першого з яких можна вважати модифікацією комбінованого методу Ньютона-хорд, а другого — модифікацією комбінованого методу Ньютона-Курчатова.

На кожному кроці k цих методів необхідно паралельно розв’язувати N незалежних лінійних варіаційних рівнянь (45) або (47) в окремих тілах Ω_α, що відповідають задачам пружності з наступними умовами Робіна (Пуанкаре) на зонах можливого контакту $S_{\alpha\beta}$:

$$\tilde{\sigma}_{\alpha\beta n}^{k+1}+\varphi_{\alpha\beta}^{k,k-1}\tilde{u}_{\alpha n}^{k+1}=(d_{\alpha\beta}-u_{\alpha n}^{k}-u_{\beta n}^{k})^-\big/\theta+\varphi_{\alpha\beta}^{k,k-1}u_{\alpha n}^{k},\quad\mathbf{x}\in S_{\alpha\beta}\,, \tag{49}$$

де $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta n}^{k+1}$ — невідомі зусилля, величина $\varphi_{\alpha\beta}^{k,k-1}$ у випадку методу (45), (46) визначається так: $\varphi_{\alpha\beta}^{k,k-1} = \dfrac{(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^{k-1} - u_{\beta n}^{k-1})^- - (d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^{k} - u_{\beta n}^{k})^-}{u_{\alpha n}^{k-1} + u_{\beta n}^{k-1} - u_{\alpha n}^{k} - u_{\beta n}^{k}}$, а у випадку методу (47), (48) вона має вигляд $\varphi_{\alpha\beta}^{k,k-1} = \dfrac{(d_{\alpha\beta} - 2u_{\alpha n}^{k} - 2u_{\beta n}^{k} + u_{\alpha n}^{k-1} + u_{\beta n}^{k-1})^- - (d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^{k-1} - u_{\beta n}^{k-1})^-}{2(u_{\alpha n}^{k} + u_{\beta n}^{k} - u_{\alpha n}^{k-1} - u_{\beta n}^{k-1})}$.

Отже, для розв'язування нелінійної контактної задачі (1)-(3), (5)-(8) запропоновано низку одноточкових та двоточкових паралельних ітераційних методів декомпозиції області, які зводять її розв'язування до розв'язування на кожній ітерації задач лінійної теорії пружності з крайовими умовами Робіна. Задачі в окремих тілах можна розв'язувати різними числовими методами, зокрема методом скінченних елементів (МСЕ) або методом граничних елементів (МГЕ). Далі проведемо дослідження числової ефективності різних алгоритмів декомпозиції області для випадку плоских контактних задач.

4. Числові дослідження

Розроблено програмне забезпечення, яке реалізує запропоновані алгоритми декомпозиції області (31), (32); (45), (46) та (47), (48) для плоских задач про односторонній контакт двох і трьох пружних тіл на основі скінченноелементних апроксимацій на лінійних і квадратичних трикутних елементах.

Числові дослідження збіжності двоточкових та одноточкових МДО здійснено для задачі про контакт двох ізотропних пружних тіл Ω_1 і Ω_2, одне з яких має неглибоку крайову виїмку (рис. 2). На нижню грань тіла Ω_1 та верхню грань тіла Ω_2 діє стискальне нормальне зусилля сталої інтенсивності q. На правій межі кожного з тіл задані умови симетрії. Тіла мають висоту h та довжину l. Висота виїмки описується функцією $r(x_1) = r_0[1-(x_1-l)^2/b^2]^{3/2}$, де $x_1 \in [l-b; l]$, $r_0 = 0{,}05b$, b — довжина виїмки. Модулі Юнґа та коефіцієнти Пуассона тіл однакові: $E_1 = E_2 = E$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$. Зона можливого контакту для цієї задачі рівна $S_{12} = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2)^{\mathsf{T}} : x_1 \in [0; l], x_2 = h \right\}$, а відстань між тілами до деформації дорівнює $d_{12}(\mathbf{x}) = r_0\{[1-(x_1-l)^2/b^2]^+\}^{3/2}$, $\mathbf{x} \in S_{12}$, де $y^+ = \max\{0, y\}$.

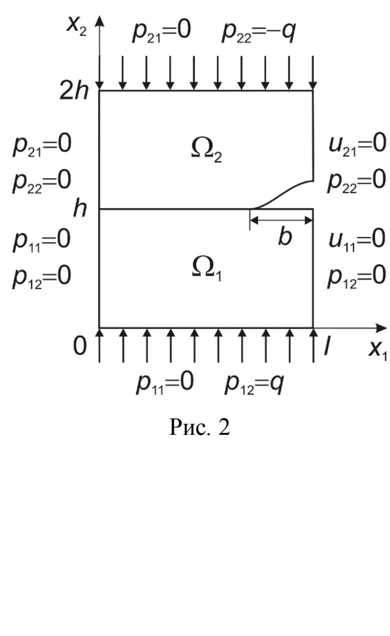

Рис. 2

Задачу розв'язано за допомогою алгоритму декомпозиції області (31), (32) з характеристичною функцією $\psi_{12}^k = \chi_{12}^k$, який можна вважати модифікацією напівгладкого методу Ньютона, а також алгоритмів декомпозиції області (45), (46) та (47), (48), які є модифікаціями комбінованих методів Ньютона-хорд та Ньютона-Курчатова відповідно. Розрахунки проведено для таких геометричних і фізичних параметрів: $h = 1$ см, $l = 4$ см, $b = 1$ см, $E_1/E_2 = 1$, $\nu = 0{,}3$, $q = 0{,}01E_1$. Для кожного з тіл застосовували скінченноелементне розбиття з 1024 лінійними трикутними елементами. Коефіцієнт штрафу задавали за стрижневою моделлю [16] у вигляді $\theta = 2ch(1-\nu^2)/E_1$, де $c = 0{,}05$ — безрозмірний параметр штрафу. Початкові наближення для переміщень вибирали у вигляді $u^0_{\alpha n}(\mathbf{x}) \equiv 10^{-4}$ см, $u^{-1}_{\alpha n}(\mathbf{x}) \equiv 2 \cdot 10^{-4}$ см, $\alpha = 1,2$, $\mathbf{x} \in S_{12}$. Для зупинки ітераційного процесу застосовували критерій

$$\left\| u^{k+1}_{\alpha n} - u^{k}_{\alpha n} \right\|_2 / \left\| u^{k+1}_{\alpha n} \right\|_2 \le \varepsilon_u , \quad \alpha = 1,2 ,$$

де $\left\| u_{\alpha n} \right\|_2 = \sqrt{\sum_j [u_{\alpha n}(\mathbf{x}^j)]^2}$ — дискретна норма, $\mathbf{x}^j \in S_{12}$ — вузли скінченноелементного розбиття межі S_{12}, а $\varepsilon_u > 0$ — відносна точність для переміщень. Ітераційні параметри γ^k, $k \in \mathbb{N}_0$, задавали однаковими на різних ітераціях, тобто $\gamma^k = \gamma > 0$, $k = 0,1,\ldots$.

У працях [16, 20] здійснено числову апробацію одноточкових методів декомпозиції області (31), (32) для розв'язування цієї задачі. У цих роботах вивчено поведінку числових розв'язків, проведено їх порівняння з аналітичними розв'язками, що були отримані у [23] для випадку контакту двох півпросторів, а також проаналізовано вплив геометричних параметрів тіл та інтенсивності зовнішнього навантаження на розподіл нормальних контактних напружень. Крім цього, у праці [16] вивчено збіжність числового розв'язку при зменшенні параметра штрафу та згущенні скінченноелементних сіток.

У пропонованій роботі досліджено числову ефективність двоточкових алгоритмів декомпозиції області (45), (46) і (47), (48) та здійснено порівняння швидкості збіжності двоточкових та одноточкових МДО за різних значень ітераційних параметрів.

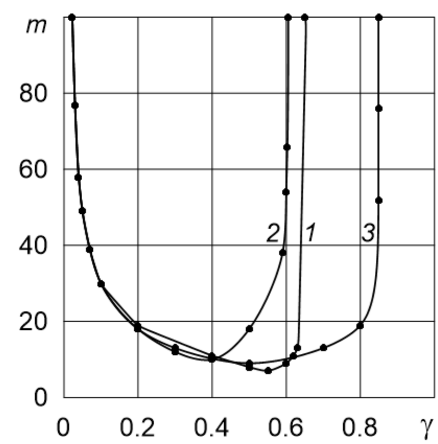

Рис. 3

На рис. 3 зображено графіки залежності загальної кількості ітерацій m різних алгоритмів декомпозиції області від ітераційного параметра γ, необхідної для досягнення відносної точності $\varepsilon_u = 10^{-3}$. Крива 1 на цьому рисунку відповідає одноточковому алгоритму декомпозиції області (31), (32), (28), який є модифікацією напівгладкого методу Ньютона, а криві 2 і 3 — двоточковим алгоритмом декомпозиції області (45), (46) і (47), (48), які є модифікаціями методу Ньютона-хорд і методу Ньютона-Курчатова.

У таблиці 1 наведено значення m при різних γ для зазначених вище алгоритмів. Рядки з позначками 1), 2) і 3) відповідають алгоритмам (31), (32), (28); (45), (46) і (47), (48).

Таблиця 1. Кількість ітерацій m, необхідних для досягнення точності $\varepsilon_u = 10^{-3}$

γ	0,02	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,55	0,6	0,605	0,64	0,7	0,8	0,848	0,85
1)	115	49	30	19	13	11	8	7	9	9	13	–	–	–	–
2)	115	48	30	18	12	10	18	24	54	90	–	–	–	–	–
3)	114	49	30	18	13	11	9	9	11	11	11	13	19	29	–

З рисунку та таблиці видно, що найширшу область збіжності за параметром γ для задачі, що розглядається, має алгоритм (47), (48), який є модифікацією методу Ньютона-Курчатова (крива 3). Цей алгоритм збігається при $\gamma \in (0;\ 0{,}848]$. Модифікація напівгладкого методу Ньютона (31), (32), (28) є збіжною при $\gamma \in (0;\ 0{,}64]$ (крива 1). Дещо меншу область збіжності за γ для цієї задачі має алгоритм (45), (46), що є модифікацією методу Ньютона-хорд (крива 2). Він збігається за $\gamma \in (0;\ 0{,}605]$.

Оптимальні значення ітераційного параметра γ для алгоритмів, яким відповідають криві 1-3 на рис. 3, відповідно дорівнюють $\gamma^* = 0{,}55$; 0,4; 0,5. За цих параметрів методи декомпозиції області (31), (32), (28); (45), (46) і (47), (48) досягають точності $\varepsilon_u = 10^{-3}$ відповідно за 7, 10 і 9 ітерацій.

Отже, найефективнішим алгоритмом декомпозиції області для розв’язування цієї задачі при вказаних вище вхідних даних є модифікація комбінованого методу Ньютона-Курчатова (47), (48), яка має найширший діапазон допустимих значень ітераційного параметра γ. Далі за ефективністю йдуть модифікація напівгладкого методу Ньютона (31), (32), (28) та модифікація комбінованого методу Ньютона-хорд (45), (46).

Висновки. Розглянуто варіаційне формулювання зі штрафом задачі про односторонній контакт багатьох пружних тіл у вигляді нелінійного варіаційного рівняння з недиференційовним оператором у гільбертовому просторі.

Для розв’язування цього рівняння запропоновано одноточкові та двоточкові неявні нестаціонарні параметричні паралельні ітераційні алгоритми декомпозиції області типу Робіна. Ці алгоритми зводять нелінійне варіаційне рівняння вихідної контактної задачі до паралельного розв’язування на кожному ітераційному кроці незалежних лінійних варіаційних рівнянь в окремих тілах (підобластях). Деякі з одноточкових алгоритмів декомпозиції області можна інтерпретувати як модифікації напівгладкого методу Ньютона. Двоточкові алгоритими декомпозиції області одержано на основі модифікацій комбінованих диференціально-різницевих ітераційних методів Ньютона-хорд [6, 8] та Ньютона-Курчатова [5, 6].

Сформульовано теорему про слабку збіжність одноточкових МДО. Здійснено числову реалізацію розроблених алгоритмів для плоских контактних задач з використанням методу скінченних елементів. Проаналізовано вплив вибору ітераційних параметрів на швидкість збіжності одноточкових та двоточкових методів декомпозиції.

Встановлено, що двоточкові алгоритми декомпозиції області, отримані на основі модифікацій диференціально-різницевих ітераційних методів, за своєю ефективністю не поступаються одноточковим алгоритмам МДО, а деякі з них (модифікація комбінованого методу Ньютона-Курчатова) для ряду випадків є більш ефективними за ці алгоритми.

Література

[1] *Бартіш М. Я., Щербина Ю. М.* Про один різницевий метод розв’язування нелінійних операторних рівнянь // Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1972. — № 7. — С. 579-582.
[2] *Шахно С. М.* Про різницевий метод з квадратичною збіжністю для розв’язування нелінійних операторних рівнянь // Мат. студії. — 2006. — Т. 26, № 1. — С. 105-110.
[3] *Шахно С. М.* Про двокроковий ітераційний процес в узагальнених умовах Ліпшиця для поділених різиць першого порядку // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2009. — Т. 52, № 1. — С. 59-66.
[4] *Shakhno S. M.* On an iterative algorithm with superquadratic convergence for solving nonlinear operator equations // J. Comput. Appl. Math. — 2009. — Vol. 231. — P. 222-235.
[5] *Шахно С. М., Ярмола Г. П.* Двоточковий метод для розв’язування нелінійних рівнянь з недиференційовним оператором // Мат. студії. — 2011. — Т. 36, № 2. — С. 213-220.
[6] *Шахно С. М., Мельник І. В., Ярмола Г. П.* Аналіз збіжності комбінованого методу для розв’язування нелінійних рівнянь // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2013. — Т. 56, № 1. — С. 31-39.
[7] *Hernández M. A., Rubio M. J.* The secant method for nondifferentiable operators // Appl. Math. Lett. — 2002. — Vol. 15, No. 4. — P. 395-399.
[8] *Argyros I. K.* A unifying local-semilocal convergence analysis and applications for two-point Newton-like methods in Banach space // J. Math. Anal. Appl. — 2004. — Vol. 298, No. 2. — P. 374-397.
[9] *Chen X., Nashed Z., Qi L.* Smoothing methods and semismooth methods for nondifferentiable operator equations // SIAM J. Numer. Anal. — 2000. — Vol. 38. — P. 1200-1216.
[10] *Ulbrich M.* Semismooth Newton methods for operator equations in function spaces // SIAM J. Optim. — 2003. — Vol. 13, No. 3. — P. 805-842.
[11] *Hintermüller M., Ito K., Kunisch K.* The primal-dual active set strategy as semismooth Newton method // SIAM J. Optim. — 2003. — Vol. 13, No. 3. — P. 865-888.
[12] *Kikuchi N., Oden J. T.* Contact Problem in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods. — Philadelphia: SIAM, 1988. — 489 p.
[13] *Кравчук А. С.* Постановка задачи о контакте нескольких деформируемых тел как задачи нелинейного программирования // ПММ. — 1978. — Т. 42, № 3. — С. 467-473.
[14] *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — Москва: Мир, 1972. — 588 с.
[15] *Кузьменко В. И.* О вариационном подходе к теории контактных задач для нелинейно-упругих слоистых тел // ПММ. — 1979. — Т. 43, № 5. — С. 893-901.
[16] *Прокопишин І. І.* Схеми декомпозиції області на основі методу штрафу для задач контакту пружних тіл: дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фіз.-мат. наук: спеціальність 01.05.02 — «Мат. моделювання та обчисл. методи». — Львів, 2010. — 163 с.
[17] *Dyyak I. I., Prokopyshyn I. I., Prokopyshyn I. A.* Penalty Robin-Robin domain decomposition methods for unilateral multibody contact problems of elasticity: Convergence results // arxiv.org. — 2012. — http://arxiv.org/pdf/1208.6478v1.pdf. — 32 p.
[18] *Прокопишин І. І.* Методи декомпозиції області для задач про односторонній контакт нелінійно пружних тіл // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2012. — Вип. 15. — С. 75-87.

[19] *Мартиняк Р. М., Прокопишин І. А., Прокопишин І. І.* Контакт пружних тіл за наявності нелінійних вінклерівських поверхневих шарів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2013. — Т. 56, № 3. — С. 43-56.

[20] *Прокопишин І. І., Мартиняк Р. М.* Числове дослідження контактної взаємодії двох тіл з виїмкою методом декомпозиції області // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. — 2011. — Вип. 16. — С. 240-251.

[21] Penalty Robin-Robin domain decomposition schemes for contact problems of nonlinear elasticity / *I. I. Prokopyshyn, I. I. Dyyak, R. M. Martynyak, I. A. Prokopyshyn* // Lect. Notes Comput. Sci. Eng. — 2013. — Vol. 91. — P. 647-654.

[22] *Прокопишин І. І.* Методи декомпозиції області для задачі про статичну рівновагу системи пружних тіл, з’єднаних через тонкі нелінійні прошарки // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2015. — Вип. 21. — С. 173-185.

[23] *Shvets R. M., Martynyak R. M., Kryshtafovych A. A.* Discontinuous contact of an anisotropic half-plane and a rigid base with disturbed surface // Int. J. Engng. Sci. — 1996. — Vol. 34, No. 2. — P. 183-200.

Differential-difference iterative domain decomposition algorithms for unilateral multibody contact problems of elasticity

Ihor Prokopyshyn, Stepan Shakhno

Implicit two-point differential-difference parallel iterative domain decomposition algorithms are proposed to solve the multibody contact problems of elasticity. A program implementation of these algorithms based on the finite element approximations is made for the case of plane contact problems. The influence of the iterative parameters on the convergence rate of presented algorithms is investigated. The numerical efficiency of different two-point and one-point iterative algorithms is compared.

Дифференциально-разностные итерационные алгоритмы декомпозиции области для задач об одностороннем контакте нескольких упругих тел

Игорь Прокопышин, Степан Шахно

Предложены неявные двухточечные дифференциально-разностные параллельные итерационные алгоритмы декомпозиции области для решения задач о контакте нескольких упругих тел. На основе конечно-элементных апроксимаций выполнена их програмная реализация для случая плоских контактных задач. Исследовано влияние итерационных параметров на скорость сходимости разработанных алгоритмов. Проведено сравнение численной эффективности двухточечных и одноточечных итерационных методов декомпозиции области.

Отримано 14.03.17