

Тривимірна динамічна задача теорії пружності про усталені крутні коливання біматеріалу “півпростір – шар з тріщиною”

Володимир Станкевич

К. ф.-м. н., доцент, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 36, Львів. e-mail: stan_olena@yahoo.com

Розглянуто тривимірну динамічну задачу про пружний біматеріал “півпростір — шар з круговою тріщиною”. Поверхні тріщини зазнають дії усталених в часі крутних зусиль. Для розв’язання задачі використано метод граничних інтегральних рівнянь (ГІР). За допомогою представлення розв’язків потенціалами Гельмгольца задачу зведено до системи двох ГІР стосовно невідомих функцій розкриття тріщини. Отримані залежності динамічних коефіцієнтів інтенсивності напружень поздовжнього зсуву від частоти прикладеного навантаження, товщини шару та співвідношення пружних параметрів матеріалів компонент тіла.

Ключові слова: пружний біматеріал, півпростір, шар з тріщиною, усталені коливання, граничні інтегральні рівняння, динамічний коефіцієнт інтенсивності напружень.

Вступ. Важливим прикладним аспектом застосування шаруватих композитів є дослідження на міцність і втому під дією статичних і динамічних навантажень, що актуально для забезпечення цілісності, міцності і надійності конструкцій. Вказані шаруваті структури є одним з підходів у моделюванні функціонально-градієнтних матеріалів [1]. Інтерес представляє дослідження напружено-деформівного стану композитів за наявності у них дефектів типу тріщин. Більшість відомих у літературі результатів даної проблеми стосуються випадків плоскої та осесиметричної задач [2-6]. З’ясовано, що значення коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) поблизу контура дефектів залежать від співвідношень пружних характеристик компонент тіл та їх розмірів. Значний вплив має і динамічний характер навантаження. Внаслідок взаємодії пружних хвиль з інтерфейсними поверхнями у тілі можуть виникати поверхневі пружні хвилі, локалізовані поблизу зазначених поверхонь [7]. Часова поведінка динамічних КІН може набувати кількісних і якісних відмінностей від своїх статичних аналогів.

Дослідженню задач у тривимірній постановці, зокрема для випадку гармонійного навантаження, у літературі приділено недостатньо уваги. Спектральний аналіз таких задач у частотному діапазоні дозволяє зрозуміти

фізику складних хвильових процесів у тілах шаруваті структури [8]. Для таких задач успішним є використання методу ГПР [9, 10]. Показано, що співвідношення пружних характеристик матеріалів і розміри шаруватих компонент тіла мають суттєвий вплив на варіацію значень динамічних КІН. Нижче метод ГПР застосовано для дослідження напружено-деформівного стану біматеріалу з круговою тріщиною в полі усталених крутних навантажень.

2. Формулювання і ГПР задачі

Нехай біматеріальне тіло складається з півпростору 1 і спряженого з ним шару 2 завтовшки h . Матеріали тіл ізотропні і характеризуються модулями зсуву G_j , коефіцієнтами Пуассона μ_j і густинами ρ_j , $j=1,2$. На спряженій інтерфейсній поверхні S_{10} виконуються умови ідеального механічного контакту, поверхня S_{20} шару вільна від навантажень. Кожна компонента складеного тіла містить дискову тріщину, яка займає плоску область S_k , $k=1,2$, паралельну до поверхонь S_{m0} , $m=1,2$. Протилежні поверхні S_k^\pm тріщин зазнають дії усталених за часом t з частотою ω самозрівноважених крутних зусиль

$$N_l^+(x,t) = -N_l^-(x,t) = (-1)^{l+1} x_{3-l} (1 - \delta_{l3}) N_0 \exp(-i\omega t),$$

$$x(x_1, x_2, x_3) \in S_k, \quad l = \overline{1,3}, \quad k = 1,2.$$

Тут $i = \sqrt{-1}$ — уявна одиниця; $N_0 = const$ — амплітудне значення прикладеного навантаження; δ — дельта-символ Кронекера.

Виберемо в областях S_k , $k=1,2$ відповідно декартові системи координат $O_k x_1 x_2 x_{3k}$ таким чином, щоб їх початки O_k були розташовані на одній лінії, перпендикулярній до S_k . Глибини залягання дефектів становлять d_k , $k=1,2$, причому $d_2 = h/2$ (рис. 1).

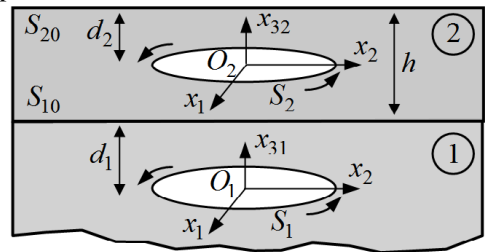


Рис. 1. Розрахункова схема задачі

Гармонійна часова залежність навантаження породжує аналогічну часову залежність всіх параметрів хвильового поля у тілі. За описаного способу розташування і навантаження тріщин у тілі поширюються лише SH поперечні пружні хвилі. Задача визначення напружено-деформівного стану тіла з дефектом зводиться до визначення амплітудного значення компонент векторів $u^{(j)}(u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, 0)$, $j=1,2$ пружних переміщень, які в j -й компоненті тіла задовольняють диференціальному рівнянню рівноваги

$$k_2^{-2(j)} \nabla \cdot (\nabla \cdot u^{(j)}) + u^{(j)} = 0, \quad j=1,2. \quad (1)$$

Тут $k_2^{(j)} = \omega / c_2^{(j)}$ — хвильове число; $c_2^{(j)} = \sqrt{G_j / \rho_j}$ — швидкість поширення поперечної пружної хвилі.

Для задоволення рівняння (1) формулюємо три групи крайових умов задачі:

в області S_k розташування тріщини

$$\sum_{n=1}^3 \sigma_{nk}^{(j)}(x_k) \cos(x_{3k}, x_n) = (-1)^{k+1} (1 - \delta_{k3}) x_{3-j} N_0, \\ x_k(x_1, x_2, x_{3k}) \in S_k, \quad k, j=1,2; \quad (2)$$

ідеальний механічний контакт на інтерфейсній поверхні S_{10}

$$u_m^{(1)}(x_1, x_2, d_1) = u_m^{(2)}(x_1, x_2, -d_2), \quad \sigma_{m3}^{(1)}(x_1, x_2, d_1) = \sigma_{m3}^{(2)}(x_1, x_2, -d_2); \quad (3)$$

вільна від навантажень поверхня S_{20} шару

$$\sigma_{m3}^{(2)}(x_1, x_2, d_2) = 0, \quad m=1,2. \quad (4)$$

Тотальні хвильові поля у пружному шарі і півпросторі подаємо у вигляді суми

$$u^{(2)} = u_{10}^{(2)} + u_{20}^{(2)} + u_2^{(2)*}, \quad u^{(1)} = u_{10}^{(1)} + u_1^{(1)*}. \quad (5)$$

Переміщення $u_{l0}^{(j)}$, $l=1,2$ породжені коливаннями точок поверхонь S_{l0} ; переміщення $u_j^{(j)*}$ спричинені розкриттям протилежних поверхонь S_j^\pm тріщини під навантаженням.

2. Метод граничних інтегральних рівнянь розв'язування задачі

Вирази для $u_{l0}^{(j)}$ подамо за допомогою векторного потенціалу у вигляді

$$u_{l0}^{(j)} = \nabla \times \psi_l^{(j)}, \quad \psi_{nl}^{(j)} = (-1)^{n+1} P_{(3-n)l}^{(j)}, \quad \psi_3 = 0, \quad l, n, j=1,2. \quad (6)$$

Тут $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ — двовимірний оператор Лапласа; функції $P_{(m)l}^{(j)}$ вибрано у вигляді інтегральних представлень за допомогою потенціалів Гельмгольца

$$P_{(m)l}^{(j)}(x) = \iint_{S_{j0}} \alpha_{ml}^{(j)}(\xi) \frac{\exp[ik_2^{(j)}|x - \xi|]}{|x - \xi|} dS_\xi, \quad \xi(\xi_1, \xi_2, 0) \in S_{j0}, \quad j, m, l=1,2 \quad (7)$$

з невідомими густинами $\alpha_{ml}^{(j)}$, які характеризують фіктивні переміщення точок поверхонь S_{l0} у напрямку координатних осей $O_m x_m$. У співвідношенні (7) $|x - \xi| = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + x_3^2}$ — відстань між фіксованою точкою спостереження $x(x_1, x_2, x_3)$ і точкою $\xi(\xi_1, \xi_2)$ області інтегрування S_{l0} .

Переміщення $u_{mj}^{(j)*}$ від розкриття тріщини також подамо у вигляді потенціалів Гельмгольца

$$u_{mj}^{(j)*}(x_n) = \frac{\partial P_{mj}^{(j)}(x_{jn})}{\partial x_{3jn}}, \quad m, j = 1, 2, \\ P_{mj}^{(j)}(x_{jn}) = \iint_{S_j} \Delta u_{mj}^{(j)}(\xi) \frac{\exp\left[ik_2^{(j)}|x_{jn} - \xi|\right]}{|x_{jn} - \xi|} dS_\xi, \quad \xi(\xi_1, \xi_2, 0) \in S_j. \quad (8)$$

Невідомі густини $\Delta u_{mj}^{(j)}$ характеризують зміщення точок протилежних поверхонь тріщини в напрямку $O_m x_{mj}$ [10]. При розглядуваному способі розташування тріщини у тілі та її навантаженні нормальне розкриття тріщини відсутнє, тобто $\Delta u_{3j}^{(j)}(x_j) = 0$. У поданні (8) координата x_{3n} точки у декартовій системі координат $O_n x_1 x_2 x_{3n}$ пов'язана з координатою x_{3jn} цієї ж точки у системі координат $O_j x_1 x_2 x_{3j}$ співвідношенням

$$x_{3jn} = \left| O_n O_j \right| \cos(x_{3n}, x_{3j}) + x_{3n}, \quad n, j = 1, 2.$$

Застосувавши до (5) співвідношення закону Гука та врахувавши (6)–(8), отримаємо представлення для амплітудних значень компонент тензора напружень

$$\sigma_{m3}^{(2)} = \sigma_{m310}^{(2)} + \sigma_{m320}^{(2)} + \sigma_{m32}^{(2)*}, \quad \sigma_{m3}^{(1)} = \sigma_{m310}^{(1)} + \sigma_{m31}^{(1)*}, \quad m = 1, 2, \quad (9) \\ \sigma_{m310}^{(j)} = -G_j(\Delta_2 + k_2^{(j)2})P_{(m)l}^{(j)}, \\ \sigma_{m3j}^{(j)*}(x_n) = -G_j(\Delta_2 + k_2^{(j)2})P_{mj}^{(j)}(x_{jn}), \quad m, n, l, j = 1, 2$$

Надалі поставлену динамічну задачу розв'язуємо у два етапи. На першому вилучаємо з розгляду невідомі густини $\alpha_{mi}^{(j)}$ переміщень точок спряжених поверхонь S_{j0} . З цією метою задовольняємо крайові умови (3), (4) на S_{j0}

$$u_{m1}^{(1)}(x_1) - u_{m1}^{(2)}(x_2) = F_m^1(x_1), \quad \sigma_{m3}^{(1)}(x_1) - \sigma_{m3}^{(2)}(x_2) = F_m^2(x_1), \\ x_1(x_1, x_2, x_{31}), \quad x_2(x_1, x_2, x_{32}) \in S_{10}, \quad x_{31} = d_1, \quad x_{32} = -d_2, \quad m = 1, 2, \quad (10)$$

$$\sigma_{m3}^{(2)}(x_2) = F_m^3(x_2), \quad x_2(x_1, x_2, x_{32}) \in S_{20}, \quad x_{32} = d_2.$$

Рівняння (10) є двовимірними ГРП типу потенціалів Гельмгольца. Ліві частини рівнянь містять інтегрування по безмежних областях S_{j0} та невідомі густини $\alpha_{ml}^{(j)}$, а праві частини містять інтегрування по скінченних областях S_j тріщин і функції F_m^l , які виражаються через стрибки $\Delta u_{mj}^{(j)}$ зміщень протилежних поверхонь тріщин наступним чином

$$F_m^1(x_1) = \frac{\partial P_{m2}^{(2)}(x_2)}{\partial x_{32}} - \frac{\partial P_{m1}^{(1)}(x_1)}{\partial x_{31}}, \quad F_m^3(x_2) = G_2(\Delta_2 + k_2^{(2)2})P_{m2}^{(2)}(x_2),$$

$$F_m^2(x_1) = G_2(\Delta_2 + k_2^{(2)2})P_{m2}^{(2)}(x_2) - G_1(\Delta_2 + k_2^{(1)2})P_{m1}^{(1)}(x_1).$$

Після застосування до (10) двовимірного інтегрального перетворення Фур'є за змінними x_1, x_2 та теореми про згортку інтегральні рівняння (10) трансформуються у систему 6-и лінійних алгебраїчних рівнянь відносно Фур'є-трансформант функцій $\tilde{\alpha}_{ml}^{(j)}$ і $\Delta \tilde{u}_{mj}^{(j)}$. Верхня хвиляста рисочка означає Фур'є-трансформанту відповідних функцій. Розв'язавши систему ЛАР, отримаємо представлення $\tilde{\alpha}_{ml}^{(j)}$ через $\Delta \tilde{u}_{mj}^{(j)}$

$$\tilde{\alpha}_{ml}^{(j)} = \frac{\tilde{\Delta}_{ml}^{(j)}}{R}, \quad m, l, j = 1, 2, \quad (11)$$

де

$$\tilde{\Delta}_{m1}^{(1)} = G_2 R_2^{(2)} \left[G_2 R_2^{(2)} (1 - H^2) \tilde{F}_m^1(x_1) + (1 + H^2) \tilde{F}_m^2(x_1) - 2H \tilde{F}_m^3(x_2) \right],$$

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\Delta}_{m1}^{(2)} \\ \tilde{\Delta}_{m2}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -H \end{Bmatrix} G_1 R_2^{(1)} G_2 R_2^{(2)} \tilde{F}_m^1(x_1) + \begin{Bmatrix} -1 \\ H \end{Bmatrix} G_2 R_2^{(2)} \tilde{F}_m^2(x_1) -$$

$$\begin{Bmatrix} (G_1 R_2^{(1)} - G_2 R_2^{(2)}) H \\ G_1 R_2^{(1)} + G_2 R_2^{(2)} \end{Bmatrix} \tilde{F}_m^3(x_2), \quad R = G_2 R_2^{(2)} \left[G_1 R_2^{(1)} + G_2 R_2^{(2)} + (G_1 R_2^{(1)} - G_2 R_2^{(2)}) H^2 \right],$$

$$H = e^{-hR_2^{(2)}}, \quad R_2^{(j)}(\tau) = \sqrt{\tau^2 - k_2^{(j)2}}, \quad j = 1, 2.$$

Функція R виникає внаслідок задоволення крайових умов задачі на поверхнях S_{10}, S_{20} . Вона є дисперсійним рівнянням і характеризує можливість появи у тілі поверхневої хвилі Лява за певних співвідношень пружних параметрів матеріалів.

Оригінали функцій $\alpha_{ml}^{(j)}$ отримаємо застосуванням до (11) оберненого двовимірного інтегрального перетворення Фур'є за просторовими змінними

$$\alpha_{ml}^{(j)}(\eta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} \frac{\tau \Delta_{ml}^{(j)}(x_{l0}(\eta))}{R(\tau)} J_0(\tau|\xi - \eta|) d\tau dS_{\xi} \quad , \quad m, l, j = 1, 2 \quad . \quad (12)$$

Тут $J_0(z)$ — функція Бесселя першого роду нульового порядку дійсного аргу-менту z .

На другому етапі задовольняємо крайові умови (2) в області розташування тріщин. Використовуючи подання (8), (9), отримаємо систему двовимірних граничних інтегральних рівнянь типу потенціалів Гельмгольца

$$\begin{aligned} & (\Delta_2 + k_2^{(j)2}) \iint_{S_j} \Delta u_{lj}^{(j)}(\xi) \frac{\exp\left[ik_2^{(j)}|x_j - \xi|\right]}{|x_j - \xi|} dS_{\xi} + \\ & + (\Delta_2 + k_2^{(j)2}) \left[\iint_{S_{j0}} \alpha_{lj}^{(j)}(\xi) + \delta_{j2} \iint_{S_{(3-j)0}} \alpha_{l(3-j)}^{(j)}(\xi) \right] \frac{\exp\left[ik_2^{(j)}|x_j - \xi|\right]}{|x_j - \xi|} dS_{\xi} = \\ & = \frac{(-1)^{l+1} x_{3-l} N_0}{G_j} \quad , \quad x_j \in S_j \quad , \quad l, j = 1, 2 \quad . \end{aligned} \quad (13)$$

Надалі підставляємо (12) в (13) та використовуємо методику обчислення кратних інтегралів по безмежних областях S_{j0} [11].

Як приклад, розглядали випадок, коли тіло містить одну тріщину посередині шару. Відповідні двовимірні ГІР задачі записано у вигляді

$$\begin{aligned} & (\Delta_2 + k_2^{(2)2}) \iint_{S_2} \Delta u_{l2}^{(2)}(\xi) \frac{\exp\left[ik_2^{(2)}|x - \xi|\right]}{|x - \xi|} dS_{\xi} + \\ & + 2 \iint_{S_2} \Delta u_{l2}^{(2)}(\xi) \int_0^{\infty} \frac{\tau R_2^{(2)} \Omega(\tau)}{R} J_0(\tau r_*) d\tau dS_{\xi} = \frac{(-1)^{l+1} x_{3-l} N_0}{G_2} \quad , \quad x \in S_2 \quad , \quad l = 1, 2 \quad . \end{aligned} \quad (14)$$

де

$$r_* = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2} \quad , \quad \Omega(\tau) = G_2 R_2^{(2)} \left[\left(G_1 R_2^{(1)} - G_2 R_2^{(2)} \right) H^2 + G_2 R_2^{(2)} H \right] \quad . \quad \text{У}$$

рівняннях (14) відсутнє інтегрування по безмежних областях S_{j0} , що суттєво при числовому розв'язанні ГІР.

3. Числове розв'язування ГІР

В роботі [11] показано, що перший доданок інтегральних рівнянь (14) містить гіперсингулярність виду $|x - \xi|^{-3}$. Подальша методика регуляризації ГІР описана

в [11]. При цьому невідомі функції $\Delta u_{l2}^{(2)}$ розкриття поверхонь тріщини подано у вигляді

$$\Delta u_{l2}^{(2)}(x, k_2^{(2)}) = \sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2} \beta_{l2}^{(2)}(x, k_2^{(2)}) \quad , \quad l=1,2$$

де $\beta_{l2}^{(2)}$ — невідомі двічі неперервно-диференційовані в області S_2 функції; a — радіус тріщини.

Для числового розв'язання ГІР (14) використано метод колокацій. Для цього область S_2 тріщини в полярній системі координат покривали системою 756 чотирикутних граничних елементів S_{qp} , $q = \overline{1,36}$, $p = \overline{1,21}$, де 36 і 21 – відповідно кількості точок розбиття за кутовою φ і радіальною r координатами. Дискретні значення невідомої функції $\beta_{l2}^{(2)}$ приймали постійними в межах кожного елемента S_{qp} . Після регулізації ГІР (14) задачу зводили до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно дискретних значень $\beta_{l2}^{(2)}$. За допомогою значень останніх в контурних елементах області тріщини визначали динамічні коефіцієнти інтенсивності напружень (ДКІН) поздовжнього зсуву співвідношеннями

$$K_3^d(\varphi, t) = -2G_2 \pi \sqrt{\pi a} \left[\beta_{1j}^{qP}(a, \varphi, k_2^{(2)}) \sin \varphi - \beta_{2j}^{qP}(a, \varphi, k_2^{(2)}) \cos \varphi \right] \exp[-i\omega t] \quad ,$$

$$\varphi = 2\pi q/Q \quad , \quad q = \overline{1, Q} \quad , \quad j = 1, 2 \quad .$$

4. Аналіз результатів

За допомогою ДКІН визначали нормовані амплітудні значення ДКІН

$$\tilde{K}_3 = \left| K_3^d \right| / K_3^{st} \quad (K_3^{st} = \frac{4}{3} N_0 \sqrt{a/\pi} \text{ – статичний КІН поздовжнього зсуву для}$$

тріщини скруту у безмежному тілі) від хвильового числа $k_2^{(2)}a$. На рис. 2 представлені частотні залежності ДКІН \tilde{K}_3 для випадку однієї тріщини в тілі, розташованій посередині шару. Криві на рис. 2а характеризують вплив співвідношень жорсткостей $G = G_2/G_1$ матеріалів компонент тіла на \tilde{K}_3 при фіксованій товщині $h = a$ шару. Із зростанням частоти $k_2^{(2)}a$ динамічні КІН монотонно зростають від своїх статичних значень при $k_2^{(2)}a = 0$, досягають максимального значення, і опісля спадають.

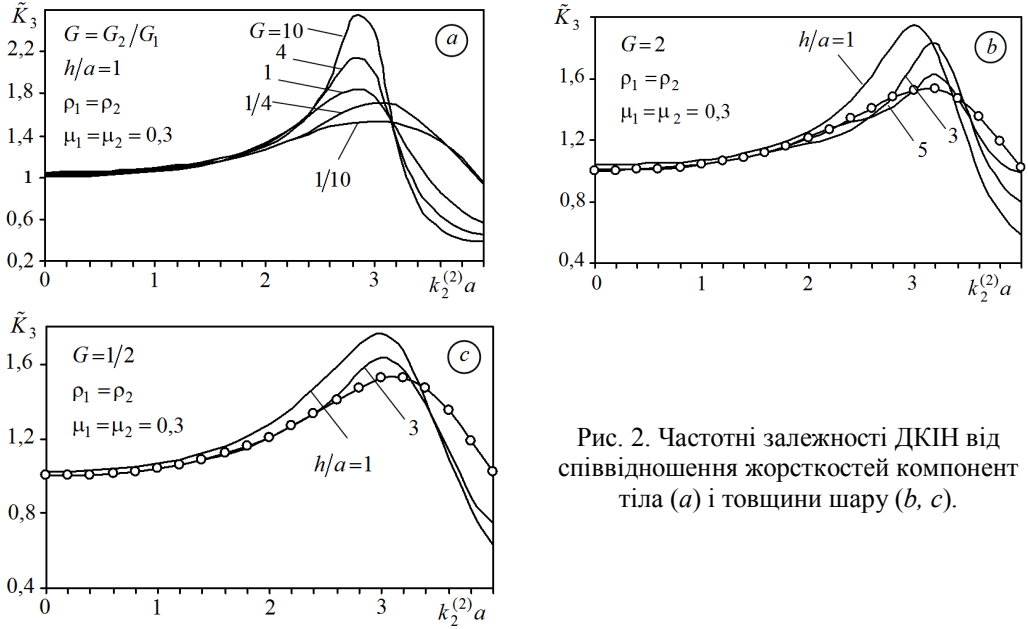


Рис. 2. Частотні залежності ДКІН від співвідношення жорсткостей компонент тіла (a) і товщини шару (b, c).

Підвищення жорсткості матеріалу шару призводить до зростання максимуму \tilde{K}_3 , при $G < 1$ спостерігається незначне зростання значення параметру $k_2^{(2)}a$, при якому цей максимум спостерігається. Аналогічне явище зауважено у роботі [12] при дослідженні інтерфейсної кругової тріщини між двома однорідними півпросторами. Окрім того, в розглянутому спектрі значень хвильового числа для $G \geq 1$ існує частотний вузол ($k_2^{(2)}a \approx 3.2$) при якому КІН не залежить від параметру G . Криві на рис. 2b,c характеризують вплив товщини h шару на частотну залежність \tilde{K}_3 при фіксованих значеннях параметрів G . Зростання товщини шару призводить до спадання максимуму КІН та прямування кривих залежностей до своїх аналогів для випадку безмежного ізотропного тіла (маркована крива) з тріщиною. В цілому аналіз рис. 2 показує, що зростання жорсткості матеріалу шару та зменшення його товщини підвищує ймовірність руйнування тіла з тріщиною.

Висновки. Запропоновано гранично-інтегральний підхід дослідження напружено-деформівного стану біматеріалу, що складається зі спряжених півпростору і шару. Останній містить кругову тріщину, розташовану посередині шару паралельно до його поверхонь і навантажену усталеними в часі крутними зусиллями. Задача зведена до системи двох ГП стосовно невідомих функцій розкриття тріщини.

З'ясовано, що підвищення жорсткості матеріалу шару та зменшення його товщини призводять до зростання значень динамічних КІН. Існують частоти

прикладеного навантаження, за яких спостерігається ігнорування впливу різниці жорсткостей матеріалів компонент біматеріалу.

Література

- [1] *Mahamood R.M., Akinlabi E.T.* Functionally Graded Materials. — Springer International Publishing. — 2017. — 103 p.
- [2] *Rekik M., Neifar M., El-Borgi S.* An axisymmetric problem of an embedded crack in a graded layer bonded to a homogeneous half-space // *Int. J. of Solids and Struct.* — 2010. Vol. 47. — P. 2043-2055.
- [3] *Sih G.C., Chen E.P.* Normal and Shear Impact of Layered Composite With a Crack: Dynamic Stress Intensification // *Journal of Appl. Mech.* — 1980. — Vol. 47. — P. 351-358.
- [4] *Wang B.L., Han J.C., Du S.Y.* Fracture mechanics for multilayers with penny-shaped cracks subjected to dynamic torsional loading // *Int. J. of Eng. Science.* — 2000. — Vol.38. — P. 893-901.
- [5] *Ueda S., Shindo Y., Atsumi A.* Torsional impact response of a penny-shaped crack lying on a biomaterial interface // *Eng. Fract. Mech.* — 1983. — Vol. 18, No 5. — P. 1059-1066.
- [6] *Sih G.C., Chen E.P.* Axisymmetric elastodynamic response from normal and radial impact of layered composites with embedded penny-shaped cracks // *Int. J. of Solids and Struct.* — 1980. — Vol. 16. — P. 1093-1107.
- [7] *Gopalakrishnan S.* Wave Propagation in Materials and Structures. — CRC Press. — 2016. — 948 p.
- [8] *Kennett B.* Seismic Wave propagation in stratified media. — ANU E Press. — 2009. — 288 p.
- [9] *Mykhas'kiv V., Stankevych V., Zhabdynskyi I., Zhang Ch.* 3-D dynamic interaction between a penny-shaped crack and a thin interlayer joining two elastic half-spaces // *Int. J. Fract.* — 2009. — Vol. 159. — P. 137-149.
- [10] *Stankevych V.Z.* Stress intensity near a crack in the composition of a half space and a layer under harmonic loading // *Materials Science.* — 2008. — Vol. 44, No 2. — P. 175-182.
- [11] *Stankevych V.Z.* Calculation of some two-dimensional integrals for the dynamic problems of the cracks in the half-space body, *Math. Methods Phys. Mech. Fields* 39 (1995) 56–61 (in Ukrainian)
- [12] *Guz A.N., Guz I.A., Men'shikov A.V., Men'shikov V.A.* Three dimensional problems in the dynamic fracture mechanics of materials with interface cracks (review) // *Int. Appl. Mech.* — 2013. — Vol. 49, No 1. — P. 1-61.

Three-dimensional dynamic problems of elasticity theory about steady torsional oscillations of bimetals “half-space – layer with a crack”

Volodymyr Stankevych

The three-dimensional dynamic problem of an elastic bimaterial "half-space – layer with a penny-shaped crack" is considered. The cracks surface are under time-stationary torsional loads. The problem is solved by boundary integral equations (BIE) method. Using solutions of Helmholtz

Володимир Станкевич

Тривимірна динамічна задача теорії пружності...

potentials, the problem is reduced to a system of two BIE relatively unknown crack opening function. The dependences of the dynamic stress intensity factors mode III on the frequency of the applied load, the thickness of the layer, and the ratios of the elastic parameters of the materials body are analyzed.

Трехмерная динамическая задача теории упругости об установившихся скручивающихся колебаниях биматериала “полупространство – слой с трещиной”

Владимир Станкевич

Рассмотрена трехмерная динамическая задача об упругом биматериале “полупространство — слой с круговой трещиной”. Поверхности трещины находятся под воздействием установившихся во времени скручивающих усилий. Для решения задачи использован метод граничных интегральных уравнений (ГИР). С помощью представлений решений потенциалами Гельмгольца задача сведена к системе двух ГИР относительно неизвестных функций раскрытия трещины. Получены зависимости динамических коэффициентов интенсивности напряжений продольного сдвига от частоты приложенной нагрузки, толщины слоя и соотношений упругих параметров материалов компонент тела.

Отримано 10.05.17