

Математичні моделі для ідентифікації витoku в довгому газопроводі. Стаціонарний режим

Василь Чекурін¹, Ольга Химко²

¹ д.ф.-м.н., професор, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Наукова 3-б, м. Львів, 79060, Україна; Kujawsko-Pomorska Szkoła Wyższa w Bydgoszczy, ul. Toruńska 55-57, m. Bydgoszcz, 85-001, Polska, v.chekurin@gmail.com

²к.т.н., доцент, Національний університет «Львівська політехніка, вул. С.Бандери, 12, Львів, 79013, Україна, acit@polynet.lviv.ua

Сформульовані прямі й обернені задачі для методу ідентифікації витoku у довгому газопроводі за стаціонарних умов на основі даних моніторингу тиску на його вході, виході та декількох внутрішніх контрольних точках. Розроблені алгоритми розв'язування сформульованих задач і проведено їхнє чисельне дослідження. Запропоновані методики виявлення витoku, визначення його інтенсивності та місця розгерметизації на основі даних моніторингу. Проведено кількісну оцінку точності запропонованих методик.

Ключові слова: моделі динаміки газу в трубах, прямі та обернені задачі, алгоритми ідентифікації витоків.

Вступ. Неконтрольована розгерметизація магістральних газопроводів створює екологічні загрози та може спричиняти значні економічні втрати. Тому важливою науково-технічною проблемою є оперативне виявлення витоків, оцінка їхньої інтенсивності та визначення місць розгерметизації. З цією метою використовують системи виявлення витоків (СВВ), які встановлюють на ділянках магістральних газопроводів між компресорними станціями.

Відомі СВВ відрізняються принципами функціонування, технологіями відбору і оброблення входних даних, чутливістю, точністю тощо [1,2].

Серед методів виявлення витоків важливе місце посідають методи обчислювального моніторингу, які базуються на даних віддаленого моніторингу параметрів потоку у трубопроводі — тиску, масової чи об'ємної витрат, температури [2,3,4]. Результати моніторингу використовують у цих методах як входні дані для відповідних обернених задач. Зокрема, у методі моделювання перехідних процесів у реальному часі (англ. Real Time Transient Modeling — RTTM) розглядають обернені задачі для рівнянь газової динаміки [3,4].

У роботі [4] запропоновано підхід до виявлення витoku та визначення місця розгерметизації трубопроводу на основі даних моніторингу значень тиску і масової витрати на його вході та виході. Ідея підходу полягає у визначення масового потоку в трубі шляхом розв'язування прямої задачі для рівнянь нерозривності та балансу імпульсу за заданими значеннями тиску на вході і

виході й порівняння розрахованих значень масової витрати на вході і виході із відповідними вимірними значеннями. Для чисельного розв'язування прямої задачі використовується дискретизація рівнянь динаміки за просторовою та часовою змінними. Проте у цій роботі використовуються лінійні рівняння стану, що може спричинити значні похибки у випадку магістральних газопроводів.

У праці [3] подана загальна схема методу РТТМ, у якому закладено аналогічний підхід. До контрольованих параметрів тут додано температуру газу й середовища.

У статті [5] запропоновано варіаційний підхід до визначення місця витoku газу у довгому трубопроводі на основі моніторингу масової витрати на його виході, тиску на вході та в декількох проміжних точках. Тут застосована спрощена математична модель ізотермічного руху флюїду в довгому трубопроводі [6], у якій використовується лінійне термічне рівняння стану, нехтується інерційним членом і конвективною складовою потоку у рівнянні балансу імпульсу. Автори описують математичну реалізацію методу для визначення місця витoku в нафтопроводі за стационарного режиму його роботи. У цьому випадку математична модель істотно спрощується і зводиться до звичайного лінійного диференціального рівняння першого порядку.

Таким чином, важливою рисою відомих методів визначення витokів є те, що вхідні дані повинні містити результати моніторингу витрати на обох (метод РТТМ [3, 4]) чи одному кінцях трубопроводу (варіаційний метод [5]).

Проте більшість ділянок на магістральних газопроводах ГТС України наразі ще не оснащені приладами вимірювання витрати, які б забезпечували точність, достатню для реалізації розглянутих методів. Роботу ділянок магістралі між двома компресорними станціями зазвичай контролюють за значеннями тиску, який вимірюють на входах і виходах компресорних станцій і в декількох проміжних контрольних точках на кожній ділянці.

Метою цієї статті є формулювання в рамках математичної моделі, яка описує динаміку газу в трубах у ізотермічному стационарному випадку, прямих та обернених задач для виявлення та ідентифікації витoku на ділянці магістрального газопроводу між двома компресорними станціями на основі даних моніторингу тиску на вході та виході цієї ділянки, а також у декількох проміжних контрольних точках.

1. Вихідні рівняння

Для формулювання задач використовуємо рівняння балансу маси та імпульсу газу в довгому трубопроводі сталого діаметра D , які запишемо у вигляді [7]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial J}{\partial t} + c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{J^2}{\rho} \right) + \frac{\lambda}{2D} \frac{|J|J}{\rho} + g \frac{\partial h}{\partial x} \rho = 0. \quad (2)$$

Тут t — часова змінна, x — координата вздовж осі труби, ρ — густина маси газу, $J = \rho V$ — потік маси (масова витрата, віднесена до площі поперечного перерізу труби): $[J] = \kappa z / (m^2 c)$, V — осереднена по перерізу труби осьова складова макроскопічної швидкості руху газу, $c^2 = \partial P / \partial \rho$ — швидкість звуку в газі, P — тиск газу, g — прискорення земного тяжіння, $h = h(x)$ — параметр, що визначає зміну висоти осі труби над рівнем моря, λ — коефіцієнт гідравлічного опору, що визначається шорсткістю внутрішньої поверхні труби, її внутрішнім діаметром D та динамічною в'язкістю газу [8].

Рівняння (1), (2) доповнюємо термічним рівнянням стану газу, яке пов'язує тиск P , густина ρ та абсолютну температуру T [8,9]

$$P = z \rho R_g T, \quad (3)$$

де $R_g = R / \mu_g$, R — універсальна газова стала $R \approx 8,3144598$ Дж/(моль·К), μ_g — молярна маса газу, z — коефіцієнт надстисливості газу, який враховує відмінність реального газу від ідеального.

Коефіцієнт z залежить від термодинамічного стану газу (його тиску P (або густини ρ) та температури. Оскільки тут приймаємо $T = const$, розглядатимемо z як функцію густини ρ : $z = z(\rho)$. Відомі формули для коефіцієнта надстисливості z залежно від густини ρ та температури T , при застосуванні яких формула (3) описує емпіричні залежності $P(\rho, T)$ як чистих газів, так і їхніх сумішів з достатньою точністю [9].

З використанням рівняння стану (3) визначаємо швидкість звуку в газі як функцію густини маси ρ і температури T :

$$c^2(\rho) = \left(z(\rho) + \frac{\partial z(\rho)}{\partial \rho} \rho \right) R_g T \quad (4)$$

Запишемо систему (1), (2) у безрозмірних змінних. Нехай P_0 та J_0 — деякі характерні тиск та потік. Характерну густина ρ_0 знайдемо розв'язуючи чисельно нелінійне рівняння

$$P_0 - z(\rho_0, T) \rho_0 R_g T = 0, \quad (5)$$

а відтак визначимо $V_0 = J_0 / \rho_0$ та $c_0 = c(\rho_0)$.

Означимо безрозмірні координату $\xi = x/L$ та часову змінну $\tau = t/t_0$, де L — довжина труби, $t_0 = L/c_0$, а також безрозмірні густина $\tilde{\rho} = \rho/\rho_0$, потік $j = J/J_0$, тиск $p = P/P_0$ та швидкість $v = V/V_0$.

В результаті рівняння (1), (2) у безрозмірних змінних набувають вигляду

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tau} + Ma_0 \frac{\partial j}{\partial \xi} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial j}{\partial \tau} + \frac{1}{Ma_0} \tilde{c}^2(\tilde{\rho}) \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \xi} + Ma_0 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{j^2}{\tilde{\rho}} \right) + Ma_0 \beta \left(\frac{j^2}{\tilde{\rho}} \right) + \frac{\partial \gamma}{\partial \xi} \tilde{\rho} = 0, \quad (7)$$

де $Ma_0 = J_0 / (\rho_0 c_0) = V_0 / c_0$, $\beta = \lambda L / (2D)$, $\gamma = h / h_0$, $h_0 = c_0 V_0 / g$,
 $\tilde{c}(\tilde{\rho}) = c(\tilde{\rho} \rho_0) / c_0$.

Запишемо також рівняння стану (3) у безрозмірних змінних

$$p = \tilde{z}(\tilde{\rho}, T) \tilde{\rho} R_g T, \quad (8)$$

де $\tilde{z}(\tilde{\rho}, T) = z(\tilde{\rho} \rho_0, T) / z(\rho_0, T)$.

Таким чином, вибираючи за ключові функції безрозмірні густину $\tilde{\rho}$ та потік маси j , приходимо до системи двох диференціальних рівнянь (6), (7), з яких перше рівняння є лінійне. Рівняння (7), натомість, істотно нелінійне, що зумовлено нелінійністю рівняння стану (3) (другий доданок у лівій частині), урахуванням конвективної складової потоку імпульсу (третій доданок) та нелінійною залежністю сили гідравлічного опору трубопроводу (четвертий доданок) від шуканих функцій.

У стаціонарному випадку $\partial \tilde{\rho} / \partial \tau = \partial j / \partial \tau = 0$. З рівняння (6) випливає, що $j(\xi) = const$. З урахуванням цього зведемо рівняння (7) до вигляду

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \xi} = - \frac{Ma^2 \beta j^2 \tilde{\rho} + Ma \frac{\partial \gamma}{\partial \xi} \tilde{\rho}^3}{c^2(\tilde{\rho}) \tilde{\rho}^2 - Ma^2 j^2}. \quad (9)$$

Далі зупинимось на розгляді стаціонарних режимів роботи магістралі, використовуючи рівняння (9) як модель руху газу на ділянках між компресорними станціями за відсутності витoku.

За наявності витoku масовий потік змінюється стрибкоподібно в точці розгерметизації $x = x^*$, а тиск залишається неперервним:

$$J|_{(x-x^*) \rightarrow -0} = J^{(in)}, \quad J|_{(x-x^*) \rightarrow +0} = J^{(out)}, \quad J^{(in)} - J^{(out)} = J^{(leak)} > 0, \quad (10)$$

$$P|_{(x-x^*) \rightarrow -0} - P|_{(x-x^*) \rightarrow +0} = 0.$$

Рух газу в трубі у цьому випадку описує рівняння

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \xi} = - \frac{Ma^2 \beta j^2 \tilde{\rho} (1 - \eta(2 - \eta) H(\xi - \xi^*)) + Ma \frac{\partial \gamma}{\partial \xi} \tilde{\rho}^3}{c^2(\tilde{\rho}) \tilde{\rho}^2 - Ma^2 j^2 (1 - \eta(2 - \eta) H(\xi - \xi_0))} \quad (11)$$

де $\xi^* = x^* / L$ — безрозмірна координата місця витoku, η — інтенсивність витoku:

$$\eta = (J^{(in)} - J^{(out)}) / J^{(in)} = (j^{(in)} - j^{(out)}) / j^{(in)}, \quad j^{(in)} = J^{(in)} / J_0, \quad j^{(out)} = J^{(out)} / J_0 \quad (12)$$

Застосуємо математичні моделі (9) та (11) для ідентифікації витоку на ділянці магістрального газопроводу за стаціонарного режиму його експлуатації на основі даних моніторингу тиску на вході та виході та у декількох перерізах.

2. Задачі ідентифікації витоку

Під ідентифікацією витоку розумітимемо: виявлення факту розгерметизації трубопроводу, визначення інтенсивності витоку і координати місця розгерметизації. Вважатимемо, що відомі довжина труби L , її діаметр D , коефіцієнт гідравлічного опору λ , а також склад газової суміші і властивості усіх її компонент, які необхідні для розрахунку рівняння стану (3) та обчислення динамічної в'язкості транспортованого газу. До того ж вважатимемо заданими значення тиску на вході $P^{(in)}$ і виході $P^{(out)}$ ділянки та його значення $P^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, n$ у перерізах $x = x_k$, координати яких x_1, x_2, \dots, x_n відомі.

Задані значення тиску дозволяють записати умови, яким задовольняє шукана функція $\tilde{\rho}(\xi)$, $\xi \in (0, 1)$ в контрольних точках $\xi = 0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, 1$

$$\tilde{\rho}|_{\xi=0} = \tilde{\rho}^{(in)}, \quad \tilde{\rho}|_{\xi=1} = \tilde{\rho}^{(out)}, \quad \tilde{\rho}|_{\xi=\xi_k} = \tilde{\rho}^{(k)} \quad (13)$$

Тут $\tilde{\rho}^{(in)}$, $\tilde{\rho}^{(out)}$ та $\tilde{\rho}^{(k)}$ — значення безрозмірної густини на вході, виході, та у контрольних точках ξ_k , які знаходимо з рівняння стану (8), розв'язуючи чисельно рівняння

$$\begin{aligned} \tilde{z}(\tilde{\rho}^{(in)}, T) \tilde{\rho}^{(in)} R_g T - p^{(in)} &= 0, \quad \tilde{z}(\tilde{\rho}^{(out)}, T) \tilde{\rho}^{(out)} R_g T - p^{(out)} = 0, \\ \tilde{z}(\tilde{\rho}^{(k)}, T) \tilde{\rho}^{(k)} R_g T - p^{(k)} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

в яких $p^{(in)} = P^{(in)}/P_0$, $p^{(out)} = P^{(out)}/P_0$, $p^{(k)} = P^{(k)}/P_0$.

Використовуючи умови (13), сформулюємо деякі задачі для рівнянь (9), (11), які використаємо у подальшому.

2.1. Прямі задачі ідентифікації. Розглядатимемо дві прямі задачі ідентифікації. В обох відомі інтенсивність витоку η та координата x^* місця розгерметизації. У першій задачі відомі потік $J^{(in)}$ і тиск $P^{(in)}$ на вході, а у другій — потік $J^{(out)}$ і тиск $P^{(out)}$ виході. В обох задачах необхідно, використовуючи математичну модель (11), знайти значення тисків у всіх контрольних точках: $P^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, n$ та $P^{(out)}$ — у першій, $P^{(out)}$ та $P^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, n$ у другій.

Розв'язування сформульованих прямих задач I та II зводиться до розв'язування відповідно двох задач Коші для рівняння (11) за відомих значень η та ξ^* : у першій задано значення $j = j^{(in)}$ і початкова умова (13)₁, а в другій —

значення $j = j^{(out)}$ і початкова умова (13)₂. Позначимо розв'язки цих задач Коші як $Y_I(\xi; \tilde{\rho}^{(in)}, j^{(in)}, \xi^*, \eta)$ та $Y_{II}(\xi; \tilde{\rho}^{(out)}, j^{(out)}, \xi^*, \eta)$ відповідно.

За знайденими розв'язками Y_I або Y_{II} обчислюємо значення безрозмірної густини у всіх контрольних точках

$$\tilde{\rho}^{(k)} = Y_I(\xi_k; \tilde{\rho}^{(in)}, j^{(in)}, \xi^*, \eta), \quad \tilde{\rho}^{(out)} = Y_I(1; \tilde{\rho}^{(in)}, j^{(in)}, \xi^*, \eta) \quad (15)$$

$$\tilde{\rho}^{(in)} = Y_{II}(0; \tilde{\rho}^{(out)}, j^{(out)}, \xi^*, \eta), \quad \tilde{\rho}^{(k)} = Y_{II}(\xi_k; \tilde{\rho}^{(out)}, j^{(out)}, \xi^*, \eta) \quad (16)$$

Відтак, використовуючи рівняння стану (8), обчислюємо значення тиску газу в контрольних точках, тобто знаходимо розв'язок прямих задач I та II.

За отриманим розв'язком можна оцінити інформативні параметри $\{P^{(in)}, P^{(1)}, \dots, P^{(n)}, P^{(out)}\}$ для оберненої задачі ідентифікації та дослідити їхню чутливість до змін параметрів ідентифікації η та x^* .

Розглядатимемо також дві задачі Коші для рівняння (9): у першій задано значення $j = j^{(in)}$ і початкова умова (13)₁, а у другій задано $j = j^{(out)}$ і початкова умова (13)₂. Позначимо розв'язки цих двох задач як $Y_{III}(\xi; \tilde{\rho}^{(in)}, j^{(in)})$ та $Y_{IV}(\xi; \tilde{\rho}^{(out)}, j^{(out)})$. За розв'язками Y_{III} та Y_{IV} можемо знайти тиски у всіх внутрішніх контрольних точках:

$$\tilde{\rho}^{(k)} = \begin{cases} Y_{III}(\xi_k; \tilde{\rho}^{(in)}, j^{(in)}), & \forall \xi_k < \xi^* \\ Y_{IV}(\xi_k; \tilde{\rho}^{(out)}, j^{(out)}), & \forall \xi_k > \xi^* \end{cases} \quad (17)$$

Ці дві задачі використаємо для розв'язування обернених задач визначення потоку маси в трубі та координати місця розгерметизації.

Сформульовані тут чотири задачі Коші для нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку (11) та (9) можна розв'язувати із використанням відомого алгоритму RKF45 [10].

2.2. Задачі визначення потоку маси. Розглянемо трубу, через яку протікає невідомий стационарний потік J . Натомість відомі значення тиску $P^{(in)}$ і $P^{(1)}$ на вході $x = 0$ і в сусідній із ним контрольній точці $x = x_1$. Якщо на відрізку $(0, x_1)$ труби витік відсутній, то розподіл тиску на цьому відрізку визначає рівняння (9). Його розв'язок $\tilde{\rho}(\xi)$ задовольняє на кінцях цього відрізка умови

$$\tilde{\rho}|_{\xi=0} = \tilde{\rho}^{(in)}, \quad \tilde{\rho}|_{\xi=\xi_1} = \tilde{\rho}^{(1)}, \quad (18)$$

де $\tilde{\rho}^{(in)}$ та $\tilde{\rho}^{(1)}$ — задані дійсні числа.

Використаємо рівняння (9) та умови (18) для визначення невідомого потоку j .

Сформулюємо задачу так: знайти значення параметра j у рівнянні (9), за якого його розв'язок узгоджується із обома умовами (18).

Ця задача є обернена оскільки належить до класу так званих коефіцієнтних задач. Тому для її розв'язування застосуємо варіаційний підхід.

Розглянемо функцію

$$\Phi^{(in)}(j) = \left(Y_{III}(\xi_1; \tilde{\rho}^{(in)}, j) - \tilde{\rho}^{(1)} \right)^2, \quad (19)$$

аналітична структура якої невідома, проте її значення для будь-якого допустимого значення j можна обчислити шляхом чисельного розв'язування задачі Коші (9), (18)₁.

Функція $\Phi^{(in)}(j)$ невід'ємна і дорівнює нулю за значення j , для якого розв'язок задачі Коші (9), (18)₁ набуває при $\xi = \xi_1$ значення $\tilde{\rho}^{(1)}$. Це дозволяє встановити розв'язок сформульованої задачі шляхом мінімізації функції (19):

$$j^{(in)} = \arg \min \Phi^{(in)}(j) \quad (20)$$

Аналогічно, розглядаючи відрізок труби (x_n, L) за невідомого в ньому значення потоку та заданих значеннях тиску $P^{(n)}$ і $P^{(out)}$, введемо функцію

$$\Phi^{(out)}(j) = \left(Y_{IV}(\xi_1; \tilde{\rho}^{(out)}, j) - \tilde{\rho}^{(n)} \right)^2 \quad (21)$$

і знайдемо розв'язок задачі визначення потоку на відрізку $(\xi_n, 1)$:

$$j^{(out)} = \arg \min \Phi_I^{(out)}(j) \quad (22)$$

В такий спосіб можемо визначити значення потоку на будь-якому відрізку труби (x_k, x_{k+1}) , $k = 1, 2, \dots, n-1$ між двома сусідніми контрольними точками:

$$j^{(k)} = \arg \min \Phi_I^{(k)}(j), \quad (23)$$

де

$$\Phi^{(k)}(j) = \left(Y_{III}(\xi_{k+1}; \tilde{\rho}^{(k)}, j) - \tilde{\rho}^{(k+1)} \right)^2, \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (24)$$

Для пошуку мінімуму функцій (19), (21), (24) можна застосувати ітераційний метод Ньютона у поєднанні із методом RKF45.

2.3. Задача визначення місця розгерметизації. Нехай відомі значення тиску $P^{(in)}$ і $P^{(out)}$ та потоку $J^{(in)}$ і $J^{(out)}$ на вході та виході труби, такі, що $J^{(leak)} \equiv J^{(in)} - J^{(out)} > 0$. Оскільки трубопровід працює в стаціонарному режимі, то це означає, що існує витік. За цими даними необхідно встановити координату x^* місця розгерметизації.

Вхідними даними для цієї задачі є умови

$$\tilde{\rho}|_{\xi=0} = \tilde{\rho}^{(in)}, j|_{\xi=0} = j^{(in)}, \tilde{\rho}|_{\xi=1} = \tilde{\rho}^{(out)}, j|_{\xi=1} = j^{(out)}. \quad (25)$$

З цих умов випливає, що розподіли потоку j і безрозмірної густини $\tilde{\rho}$ вздовж труби визначають формули

$$j = \begin{cases} j^{(in)}, \xi \in [0, \xi^*] \\ j^{(out)}, \xi \in [\xi^*, 1] \end{cases}, \quad \tilde{\rho}(\xi) = \begin{cases} Y_{III}(\xi; \tilde{\rho}^{(in)}, j^{(in)}), \xi \in [0, \xi^*] \\ Y_{IV}(\xi; \tilde{\rho}^{(out)}, j^{(out)}), \xi \in [\xi^*, 1] \end{cases} \quad (26)$$

В місці розгерметизації тиск є неперервною функцією. Виходячи із цього сформулюємо обернену задачу визначання місця розгерметизації: знайти значення безрозмірної координати ξ , за якого значення розв'язку задачі Коші для рівняння (9), в якому $j = j^{(in)}$, з початковою умовою (25)₁, дорівнює значенню розв'язку цього ж рівняння, в якому $j = j^{(out)}$, з початковою умовою (25)₃, тобто виконується умова

$$\Phi(\xi) \equiv Y_{III}(\xi; \tilde{\rho}^{(in)}, j^{(in)}) - Y_{IV}(\xi; \tilde{\rho}^{(out)}, j^{(out)}) = 0. \quad (27)$$

Отримали нелінійне неявно задане рівняння стосовно змінної ξ , розв'язавши яке, знайдемо значення ξ^* координати точки розгерметизації. Рівняння (27) можна розв'язувати ітераційно, застосовуючи методи поділу відрізка або Ньютона. Для обчислень значень функції $\Phi(\xi)$ і її похідних чисельно розв'язуємо задачі Коші III та IV, використовуючи відомий алгоритм RKF-45. Інша можливість — застосування варіаційного підходу шляхом мінімізації функції $\Phi^2(\xi)$. Відповідні розв'язки позначимо як

$$\xi^* = \text{solve}(\Phi(\xi) = 0) \quad \text{або} \quad \xi^* = \text{argmin}(\Phi^2(\xi)), \quad (28)$$

3. Чисельне дослідження сформульованих задач

Проведемо кількісне дослідження сформульованих задач. Розглядатимемо газову суміш: метан — 98,6 %, етан — 0,15 %, двоокис вуглецю — 0,31 %, азот — 1,24 %. Прийемо такі значення параметрів задачі: довжина трубопроводу $L = 120$ км, внутрішній діаметр труби $D = 1,378$ м, характерний тиск $P_0 = 6,65$ МПа, температура $T = 300$ К, характерна густина масового потоку $J_0 = 468$ кг/м²с, що відповідає комерційній витраті, віднесеній до стандартних умов — 86 млн. кубічних метрів за день. Коефіцієнт тертя візьмемо $\lambda = 9,22 \cdot 10^{-3}$. Розраховані для таких значень параметрів характерний час $t_0 = 302,58$ с, число Маха $Ma = 0,024$, коефіцієнт $\beta = 413,46$. У розрахунках використовуватимемо рівняння стану (3), в якому z визначає формула, подана у статті [7]

Для чисельного розв'язування задач Коші I-IV застосовуватимемо алгоритм RKF-45 [10], а для розв'язування обернених задач — метод Ньютона.

3.1. Пряма задача. Як вже зазначалося, розв'язки прямих задач ідентифікації дозволяють оцінити інформативні параметри, які використовуються як вхідні дані для обернених задач, і дослідити їхню залежність від параметрів витoku.

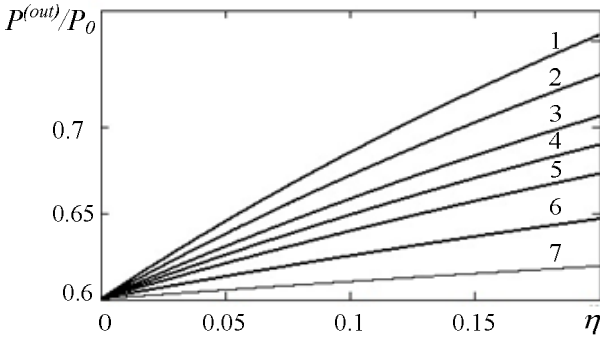


Рис. 1.

Для ілюстрації залежності значень тисків у контрольованих точках від інтенсивності витoku та координати точки розгерметизації на рис.1. показані залежності тиску $P^{(out)}$ на виході труби від η за сталого тиску на вході $P^{(in)}/P_0 = 0,8$ та різних значень координати розгерметизації

$x^*/L = 0.1, 0.25, 0.4, 0.5, 0.6, 0.75, 0.9$ (криві 1, ..., 7). Розрахунок проведено за формулою (15)₂ шляхом розв'язування задачі Коші I. Аналогічно, використовуючи формулу (15)₁, можна встановити залежності значень $P^{(k)}$ тиску в контрольних точках $x_k > x^*$. Як бачимо, за сталого тиску на вході тиск у контрольній точці істотно залежить від інтенсивності витoku η і ця залежність посилюється зі зростанням віддалі від місця витoku до контрольної точки.

3.2. Оцінювання точності визначення потоку. Інформативними параметрами для задачі визначення потоку маси, який протікає через відрізок труби між двома контрольними точками, є дані вимірювання тиску в цих точках. Оскільки

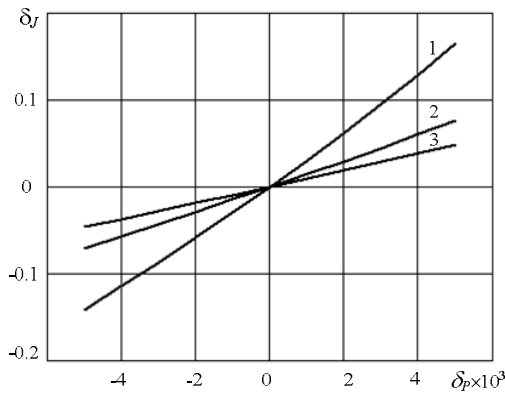


Рис.2.

вимірювання здійснюються з певною точністю, то при обчисленні значення потоку за формулою (23) виникає похибка. Цю похибку оцінювали із застосування числового експерименту. З цією метою задавалися значенням вхідного тиску $P^{(in)}$ та значенням масового потоку J . За цими даними обчислювали безрозмірні густину $\tilde{\rho}^{(in)}$ та потік j і розв'язували задачу Коші III. За знайденим розв'язком $Y_{III}(\xi; \tilde{\rho}^{(in)}, j)$ обчислювали значення

безрозмірної густини $\bar{\rho}^{(k)}$ та $\bar{\rho}^{(k+1)}$ у контрольних точках ξ_k та ξ_{k+1} та відповідні значення тиску $\bar{P}^{(k)}$ та $\bar{P}^{(k+1)}$. Відтак знаходили розв'язок (23) задачі

визначення потоку, вибираючи у формулі (24) різні значення змінних $\tilde{\rho}^{(k)}$ та $\tilde{\rho}^{(k+1)}$, із діапазонів $\tilde{\rho}^{(k)} \in \mathbf{d}_\rho^{(k)}$ та $\tilde{\rho}^{(k+1)} \in \mathbf{d}_\rho^{(k+1)}$, де $\mathbf{d}_\rho^{(k)} \equiv \bar{\rho}^{(k)} [(1 - \delta_p), (1 + \delta_p)]$ та $\mathbf{d}_\rho^{(k+1)} \equiv \bar{\rho}^{(k+1)} [(1 - \delta_p), (1 + \delta_p)]$, δ_p — відносна похибка вимірювання тиску.

Позначимо як $\tilde{j}(\tilde{\rho}^{(k)}, \tilde{\rho}^{(k+1)})$ розв'язок (23) задачі для довільних значень $\tilde{\rho}^{(k)} \in \mathbf{d}_\rho^{(k)}$, $\tilde{\rho}^{(k+1)} \in \mathbf{d}_\rho^{(k+1)}$. Тоді відносну похибку δ_J визначення потоку знайдемо як

$$\delta_J = \sup_{\substack{\tilde{\rho}^{(k)} \in \mathbf{d}_\rho^{(k)}, \\ \tilde{\rho}^{(k+1)} \in \mathbf{d}_\rho^{(k+1)}}} \left| j - \tilde{j}(\tilde{\rho}^{(k)}, \tilde{\rho}^{(k+1)}) \right| \quad (29)$$

На рис.2 показана залежність похибки визначення потоку δ_J від відносної похибки вимірювання тиску $\delta_p = (P^{(k+1)} - \bar{P}^{(k+1)}) / \bar{P}^{(k+1)}$ в точці x_{k+1} за фіксованого значення тиску $P^{(k)} = \bar{P}^{(k)}$ в точці x_k для трьох різних значень бази вимірювання $l \equiv (x_{k+1} - x_k) / L = 0.05, 0.1, 0.15$ (криві 1,2,3 відповідно). Залежність δ_J від δ_p визначали за формулою

$$\delta_J(\delta_p) = \left(j - \tilde{j}(\bar{\rho}^{(k)}, \bar{\rho}^{(k+1)}(1 + \delta_p)) \right). \quad (30)$$

Беручи до уваги, що сучасні прилади вимірювання тиску забезпечують точність порядку (0,5...0,2)%, параметр δ_p змінювали в межах -0,005...0,005.

Із проведених розрахунків випливає, зокрема, що за точності вимірювання тиску $\delta_p \sim 0.1\%$ точність визначення потоку за бази вимірювання порядку 0.07L складатиме $\delta_J \sim 2\%$.

3.3. Оцінювання точності визначення місця розгерметизації. На рис. 3 показані розподіли приведенного тиску $p \equiv P/P_0$ в довгому трубопроводі, розраховані за різними моделями.

Суцільною лінією (крива 1) показана залежність тиску від координати, обчислена на основі розв'язку задачі Коші I за заданих тиску $P^{(in)}/P_0 = 1$ та потоку $J^{(in)}/J_0 = 0.8$ на вході за наявності витoku в точці $x^*/L = 0.5$ інтенсивністю $\eta = 0.2$. Як можна бачити залежність $P(x)$ зберігає неперервність у точці розгерметизації, проте її похідна терпить розрив першого роду у цій точці.

Коловими мітками на рис.3 (крива 2) показана залежність нормованого тиску від координати, розрахована на основі розв'язку задачі Коші III, за заданих

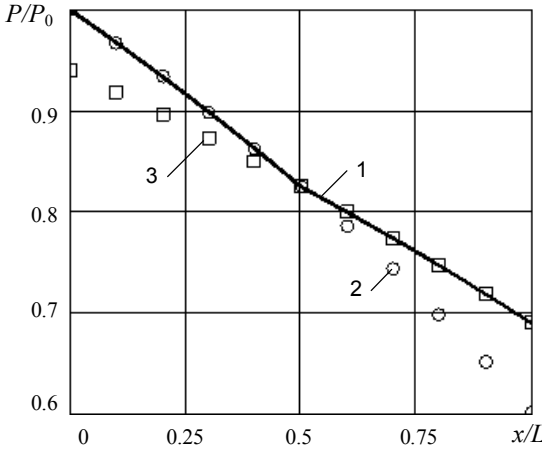


Рис. 3

$P^{(in)}/P_0 = 1$ та потоку $J^{(in)}/J_0 = 0.8$ на вході. Квадратними мітками показана залежність нормованого тиску від координати, розраховані на основі розв'язку задачі Коші IV за заданого потоку $J^{(out)} = (1 - \eta)J^{(in)}$ та тиску $P^{(out)}$ на виході, який розраховували, використовуючи розв'язок задачі Коші I: $P^{(out)}/P_0 \approx 0.6901$.

Як бачимо, криві 2 та 3 перетинаються в точці розгерметизації.

Похибка визначення координати місця розгерметизації визначається похибками визначення потоків $J^{(in)}$ та $J^{(out)}$ і тисків $P^{(in)}$ та $P^{(out)}$. Оцінімо її, використовуючи метод числового експерименту. Розглянемо функцію

$$\Xi^* \left(\tilde{\rho}^{(in)}, j^{(in)}, \tilde{\rho}^{(out)}, j^{(out)} \right) = \text{solve}_{\xi} \left(Y_{III} \left(\xi; \tilde{\rho}^{(in)}, j^{(in)} \right) - Y_{IV} \left(\xi; \tilde{\rho}^{(out)}, j^{(out)} \right) \right) \quad (30)$$

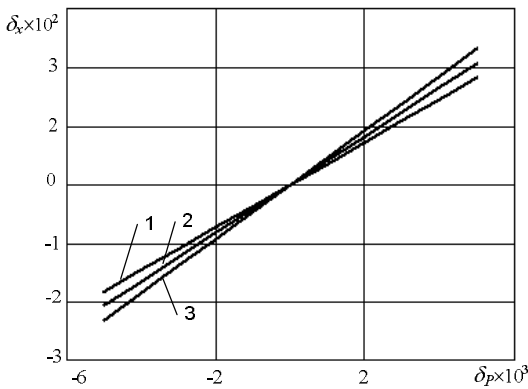


Рис.4

Значення цієї функції для будь-яких допустимих значень її аргументів можна обчислити чисельно, розв'язуючи рівняння (27).

Для апіорної оцінки похибки визначення місця витоку застосуємо модель (11). З цією метою задамося вхідними потоком $\bar{J}^{(in)}$ та тиском $\bar{P}^{(in)}$, а також координатою місця витоку x^* та його інтенсивністю η . За

значеннями $\bar{J}^{(in)}$ та $\bar{P}^{(in)}$ обчислимо безрозмірні параметри $\bar{j}^{(in)}$ та $\bar{\rho}^{(in)}$ і розв'яжемо задачу Коші I. За знайденим розв'язком знайдемо значення

параметра $\bar{p}^{(out)} = Y_I \left(1, \bar{p}^{(in)}, \bar{j}^{(in)}, \xi^*, \eta \right)$ і обчислимо $\bar{j}^{(out)} = (1 - \eta) \bar{j}^{(in)}$. Відносну похибку визначення координати місця витoku обчислимо як

$$\delta_x = \sup_{\substack{\tilde{p}^{(in)} \in \mathbf{d}_p^{(in)}, j^{(in)} \in \mathbf{d}_j^{(in)}, \\ \tilde{p}^{(out)} \in \mathbf{d}_p^{(out)}, j^{(in)} \in \mathbf{d}_j^{(out)}}} \left| \xi^* - \Xi^* \left(\tilde{p}^{(in)}, j^{(in)}, \tilde{p}^{(out)}, j^{(out)} \right) \right|, \quad (31)$$

де

$$\mathbf{d}_p^{(in)} = \bar{p}^{(in)} [-\delta_p, \delta_p], \quad \mathbf{d}_j^{(in)} = \bar{j}^{(in)} [-\delta_j, \delta_j],$$

$$\mathbf{d}_p^{(out)} = \bar{p}^{(out)} [-\delta_p, \delta_p], \quad \mathbf{d}_j^{(out)} = \bar{j}^{(out)} [-\delta_j, \delta_j]$$

На рис. 4 наведені залежності похибки δ_x від похибки вимірювання тиску $\delta_p^{(out)}$ на виході труби за різних значень координати витoku $x^*/L = 0.25, 0.5, 0.75$ (криві 1, 2 та 3 відповідно). Розрахунки здійснили для значень $\bar{P}^{(in)}/P_0 = 1$, $\bar{J}^{(in)}/J_0 = 0.8$, $x^*/L = 0.5$, $\eta = 0.2$. Уважали, що відомі точні значення тиску на вході $P^{(in)} = \bar{P}^{(in)}$ потоків на вході $J^{(in)} = \bar{J}^{(in)}$ та виході $J^{(out)} = \eta \bar{J}^{(in)}$. Як бачимо, похибка визначення місця витoku практично лінійно змінюється зі зміною похибки вимірювання тиску і зростає зі зменшенням відстані між місцем розгерметизації та виходом трубопроводу.

Висновки: В рамках моделі газової динаміки сформульовані прямі та обернені задачі ідентифікації витoku в довгому трубопроводі. Розглянуто випадок стационарного режиму роботи газопроводу в наближенні ізотермічної течії. Як вхідні дані використовуються результати вимірювання тиску на вході й виході та у декількох його проміжних перерізах. На основі розв'язків задач можна виявляти витік, визначати його інтенсивність та місце розгерметизації. Числове дослідження розв'язків проведено із використанням алгоритму RKF-45. Отримано оцінки точності розв'язків залежно від точності вхідних даних. Результати можна використати для створення систем виявлення та ідентифікації витоків на основі даних моніторингу тиску.

Література

- [1] Murvay P.-S., Silea I. A survey on gas leak detection and localization techniques// Journal of Loss Prevention in the Process Industry. 2012.— V. 25, P. 966-973.
- [2] Leak Detection Based Pipeline Integrity Systems.— Glasgow: TUV NEL Ltd, 2010.— 7с. http://www.tuvnel.com/_x90lbm/Leak_Detection_Based_Pipeline_Integrity_Systems.pdf.
- [3] Geiger G. Principles of Leak Detection. Breda, The Netherlands: Krone Oil&Gas, 2012.— 68с. http://krohne.com/fileadmin/content/files2/PipePatrol/KROHNE_Gerhard_-_Geiger_Principles_of_Leak_Detection_2012.pdf.

- [4] Wang S., Zang Z. Leak detection for Gas and Liquid Pipelines by Online Modeling// SPE Projects, Facilities & Construction. June 2007.— p. 1-9. http://gasliquids.com/content/2007_LeakDetection.pdf.
- [5] Воеводин А. Ф., Никуфоровская В. С. Численный метод определения места утечки жидкости или газа в трубопроводе// Сиб. журн. индустр. матем, 2009.— Т. 12, №1.— С. 25 -30.
- [6] Чарный И А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. М.: Недра, 1975.— С. 224.
- [7] Чекурін, В. Ф. Математична модель перехідних процесів перенесення маси й імпульсу в довгому газопроводі. Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології, 2010.— №1.— С. 210-219.
- [8] Трубопроводный транспорт газа/ Бобровский С. А., Щербиков С. Г., Яковлев Е. И. и др.— М: Наука, 1976. 496 с.
- [9] Farzaneh-Gord M., Khamforoush A., Hashemi S., Namin H. P. Computing Thermal Properties of Natural Gas by Utilizing AGA8 Equation of State// International Journal of Chemical Engineering and Applications, 2010.— V. 1, No 1.— P. 20-24.
- [10] Hairer E., Norsett S.P., Wanner G. Solving Ordinary Differential equations I. Nonstiff Problems. Second Revised Edition.— Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2008.— 542 p. ISBN 978-3-540-56670-0.

Mathematical models for leak identification in long-distance gas pipeline. Stationary operational mode

Vasyl Chekurin, Olga Khymko

Direct and inverse problems for leak identification in long distance gas pipelines in stationary operational modes on the base of data obtained by pressure monitoring in pipeline's inlet, outlet and in several intermediate check points have been formulated. Algorithms for solving of the formulated problems have been developed and their numerical study has been done. On this basis methods for leak detecting, its intensity and location determination with the use of the data of pressure monitoring have been suggested. Quantitative evaluation of precisions of the proposed methods has been conducted.

Математические модели для идентификации утечки в длинном газопроводе. Стационарный режим

Василь Чекурин, Ольга Хымко

Сформулированы прямые и обратные задачи для метода идентификации утечки из магистрального газопровода при стационарных режимах его эксплуатации на основе данных мониторинга давления на его входе, выходе и в нескольких внутренних контрольных точках. Разработаны алгоритмы решения сформулированных задач и проведено их численное исследование. Предложены методики обнаружения утечки, определения ее интенсивности и места разгерметизации трубопровода на основе данных мониторинга. выполнена количественная оценка точности предложенных методик.

Отримано 30.01.17