

Аналіз моделі фільтрації газу із використанням дробових похідних за часом

Назарій Лопух

К. т. н., Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дудаєва, 15,
Львів, 79005, e-mail: lopuh.nazar@gmail.com

В праці на базі методу скінченних елементів запропоновано числову модель фільтрації газу в пористих неоднорідних середовищах із використанням дробових похідних за часом. Розглянуто дробові похідні Капуто та Рімана-Ліувіля. Проведений числовий аналіз із використанням експериментальних вхідних даних. Отримані результати можна використати для дослідження фільтраційних властивостей околу свердловини, визначення її дебіту залежно від розподілу тиску.

Ключові слова: дробові похідні, дискретизація, нестационарний процес, метод скінченних елементів, математична модель.

Вступ. Багато фізичних процесів описуються динамічними системами, в яких дуже важливим є врахування історії процесу. Одним із способів врахування ефектів пам'яті процесу є використання похідних дробового порядку. Диференціальні рівняння дробового порядку описують еволюцію фізичних систем із залишковою пам'яттю [1], які займають проміжне місце між марківськими системами та системами, які характеризуються повною пам'яттю. Зокрема, показник дробовості вказує на долю станів системи, що зберігаються протягом усього процесу її функціонування.

Колектори природного газу характеризуються неоднорідністю, мінливістю параметрів пласта. Потужність продуктивних відкладень по площі газового покладу може змінюватися в дуже широких межах. Коефіцієнти проникності і пористості пласта зазнають значних змін по висоті і по площі газового покладу. Згідно до промислових досліджень, коефіцієнт проникності газу при зниженні тиску може зменшуватися до 50% і більше в порівнянні з коефіцієнтом проникності при початковому пластовому тиску [2].

Дана робота присвячена дослідженню зв'язку між порядком степеня фільтрації та коефіцієнтом проникності та їх впливу на розподіл пластового тиску.

1. Модель фільтрації газу в пористому середовищі

Процес масопереносу в пористих середовищах розглядається на прикладі фільтрації газу та рідини, яка описується рівнянням із дробовою похідною за часовою змінною [3-4]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{kh}{\mu\chi} \frac{\partial p^l}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{kh}{\mu\chi} \frac{\partial p^l}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{kh}{\mu\chi} \frac{\partial p^l}{\partial z} \right) = 2mh \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\frac{p}{\chi} \right) + 2qp_{at} \right) \quad (1)$$

В останньому рівнянні $l=2$ для газу та $l=1$ для нестисливої рідини; $\alpha \in (0, 2]$ — степінь дробової похідної; $k = k(x, y, z, t)$, $m = m(x, y, z)$ та $h = h(x, y, z)$ коефіцієнти проникності, пористості та товщина середовища відповідно; μ — динамічна в'язкість речовини, p_{at} — атмосферний тиск, q — густина відбору, χ — коефіцієнт стисливості газу для обчислення якого побудована значна кількість емпіричних формул на основі експериментальних даних, зокрема,

$$\chi = \frac{1}{1 + fp}$$

де $f = (24 - 0.21t^\circ C) \cdot 10^4$, а $p(x, y, z, t)$ вимірюється в атмосферах. Відбори газу з пористих середовищ здійснюються через I свердловин, які розміщені в точках (x_i^0, y_i^0, z_i^0) на протязі деякого проміжку часу $t \in [t_{1i}, t_{2i}]$, ($i = \overline{1, I}$). Тому густина відбору визначається формулою

$$q = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^I q_i(x, y, z, t) \delta(x - x_i^0) \delta(y - y_i^0) \delta(z - z_i^0) [\eta(t - t_{1i}) - (t - t_{2i})].$$

Тут q_i — відбір газу з i -ої свердловини в момент часу t , $\delta(x)$ — дельта-функція Дірака, $\eta(t - t_{ji})$ — одинична функція Хевісайда.

2. Постановка задачі

Нехай $\Omega_3 \subset R^3$ — тривимірна область, яку займає пористе середовище ПСГ. На Ω_3 задана множина свердловин з координатами $\{x_i, y_i, z_i\}$, $i = 1, \dots, n$ та значення тисків $p(x_i, y_i, z_i, t_0)$ в цих точках у момент часу t_0 . Розподіл тиску газу $p(x, y, z, t)$ в пласті описується нелінійним диференціальним рівнянням в частинних похідних (1).

Нехтуючи градієнтом тиску за вертикальною координатою, рівняння (1) запишеться:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{kh}{\mu\chi} \frac{\partial p^2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{kh}{\mu\chi} \frac{\partial p^2}{\partial y} \right) = 2mh \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\frac{p}{\chi} \right) + 4mhqp_{st}. \quad (2)$$

Рівняння (2) на границі Γ області Ω (рис. 1) задовольняє крайову умову Неймана:

$$\Phi p(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (3)$$

де

$$\Phi p \stackrel{def}{=} \frac{k \cdot h}{\mu \cdot z} \frac{\partial p}{\partial x} v_x + \frac{k \cdot h}{\mu \cdot z} \frac{\partial p}{\partial y} v_y; \quad v_x = \cos(v, x), \quad v_y = \cos(v, y),$$

та умову на Ω_* :

$$p(x_i, y_i, t^j) = p_{i,j}, \quad (x_i, y_i) \in \Omega_*; \quad (4)$$

Γ — зовнішня границя області Ω ; Ω_* — підмножина області Ω , яка охоплює координати точок із відомими значеннями тисків p_i^j , j — часовий індекс; v — зовнішня нормаль до області $\Omega \subset R^2$.

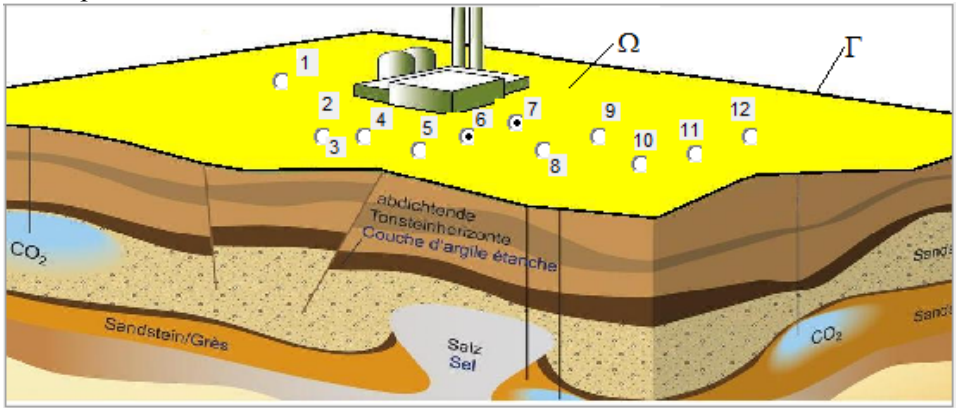


Рис. 1. Модель ПСГ

Поступлення газу через границю Γ немає, тому при формулюванні задачі математичної фізики за граничну умову доцільно брати рівність нулю градієнта тиску по нормалі до границі, тобто $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$. За початкову точку відліку візьмемо кінець нейтрального періоду, початкове значення тиску p_0 вважаємо постійним.

Задача полягає в знаходженні розв'язку $p(x, y, z, t)$ рівняння (2) за відомими значеннями $p(x_i, y_i, z_i, t_0)$, q_i , ($i = \overline{1, I}$) та умовою непроникності на контурі середовища. При цьому необхідно, щоб виконувалась умова балансування маси газу в сховищі

$$M = \int_V \rho dv.$$

Інтегрування проводиться по об'єму сховища V , M — маса газу в сховищі, ρ — густина газу, яка пов'язана з тиском рівнянням стану $p = \rho\chi RT$. Тут R — газова стала, T — абсолютна температура газу.

3. Числова реалізація

Числова модель базується на скінченно-елементній схемі Грюнвальда-Летнікова в поєднанні з часовою ітераційною процедурою [3-6]. Двовимірний область (рис. 1) розбивається на елементи шляхом триангуляції.

Лінеаризацію рівняння (2) проведемо наступним чином:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{kh}{\mu\chi} \frac{\partial p^2}{\partial \zeta} \right) \approx 2 \frac{kh}{\mu\chi} \tilde{p} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial p}{\partial \zeta} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{kh}{\mu\chi} \cdot \tilde{p} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} (\tilde{p}), \quad (5)$$

тут $\zeta \in \{x, y\}$ — просторова координата.

У правій частині рівняння параметр χ винесемо з-під похідної як постійну величину

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\frac{p}{\chi} \right) \approx \frac{1}{\chi} \frac{\partial^\alpha p}{\partial t^\alpha},$$

а дробову похідну $\frac{\partial^\alpha p}{\partial t^\alpha}$ розкладемо за схемою Грюнвальда-Летнікова:

$${}^{GL}D_\tau^\alpha p := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta t)^{-\alpha} \sum_{j=0}^{[\tau/\Delta t]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} p(\tau - j\Delta t) \quad (6)$$

Оператор Грюнвальда-Летнікова (6) апроксимується на проміжку $[0, \tau]$ з підінтервальним кроком Δt як

$${}^{GL}D_\tau^\alpha p(\tau) \approx \sum_{j=0}^{[\tau/\Delta t]} c_j^{(\alpha)} p(\tau - j\Delta t) \quad (7)$$

де $c_j^{(\alpha)}$ — коефіцієнти Грюнвальда-Летнікова, які визначаються як

$$c_j^{(\alpha)} = (\Delta t)^{-\alpha} (-1)^j \binom{\alpha}{j}. \quad (8)$$

Використавши рекурентне співвідношення [5]

$$c_j^{(\alpha)} = (\Delta t)^{-\alpha}, \quad c_j^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{1+\alpha}{j}\right) c_{j-1}^{(\alpha)} \quad (9)$$

ми можемо обчислити коефіцієнти $c_j^{(\alpha)}$. Для $j = 1$ маємо $c_1^{(\alpha)} = -\alpha(\Delta t)^{-\alpha}$.

Застосувавши лінеаризацію та дискретизаційну схему для дробової похідної (6 - 8) перетворимо рівняння (2) до форми :

$$\tilde{p} \frac{kh}{\mu\chi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) + \tilde{p} \frac{kh}{\mu\chi} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) = mh \frac{1}{\chi} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} (p) + 2mhq p_{st} + F(\tilde{p}, k, h, \chi), \quad (10)$$

де

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} p(t) = \sum_{j=0}^f c_j^{(\alpha)} p(t_{f-j}) - \sum_{k=0}^m \frac{(t_f)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} p(t_k),$$

$$F(\tilde{p}, k, h, \chi) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{kh}{\mu\chi} \cdot \tilde{p} \right) \cdot \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{kh}{\mu\chi} \cdot \tilde{p} \right) \cdot \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y}.$$

Схема МСЕ [2-4] застосовується ітераційно для лінеаризованого рівняння (10) для кожного моменту часу $t = i\Delta t$, $i = 1, \dots, I$ із уточненням коефіцієнтів:

$$\text{стисливості: } \chi = \frac{1}{1 + fp},$$

$$\text{проникності } k = \mu l \Delta Q / S \Delta p,$$

$$\text{та наближеного розв'язку: } \tilde{p} = p.$$

$$\text{Тут } f = \left(-2mhp_{st}q + F(\tilde{p}, k, h, \chi) + \frac{mh}{\chi} \left(\sum_{j=1}^i c_j p(t_j - j\Delta t) - \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} p_0 \right) \right) / \tilde{p}.$$

4. Числовий експеримент

Пропонована схема числового моделювання апробована в ході обчислювального експерименту на основі таких даних: площа пористого середовища

$$S = 16 \text{ млн м}^2, \quad \mu = 0.000011 \text{ Па}\cdot\text{с}, \quad h = 18 \text{ м}, \quad R = 506.7 \text{ Дж/кг } ^\circ\text{K}, \\ T = 293 \text{ } ^\circ\text{K}, \quad \chi = 0.89, \quad m = 0.3, \quad k \in (0.8 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2, 8.8 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2).$$

Вхідна інформація задавалась значеннями середньопластових тисків у нейтральний період та значеннями об'ємних відборів газу на протязі відбору газу зі сховища. Для зручнішої наглядності в проведеному експерименті весь відбір газу здійснювався через свердловину №5 (рис.1).

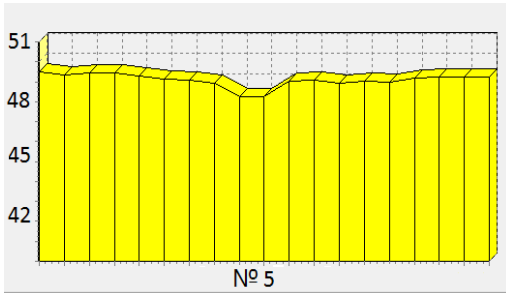


Рис. 2. Розподіл тиску газу у перерізі пласту при $\alpha = 1$, $t = 50$ год

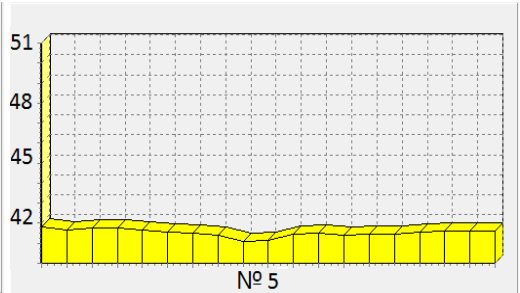


Рис. 3. Розподіл тиску газу у перерізі пласту при $\alpha = 1$, $t = 150$ год

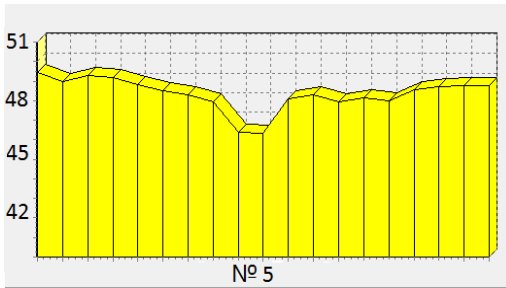


Рис. 4. Розподіл тиску газу у перерізі пласту при $\alpha = 0.97$, $t = 50$ год

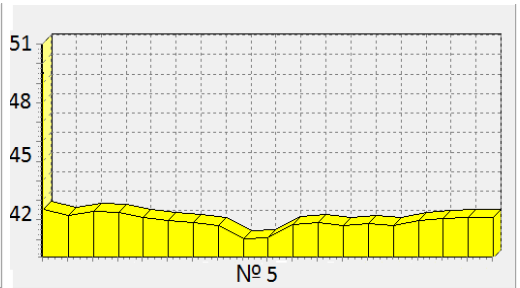


Рис. 5. Розподіл тиску газу у перерізі пласту при $\alpha = 0.97$, $t = 150$ год

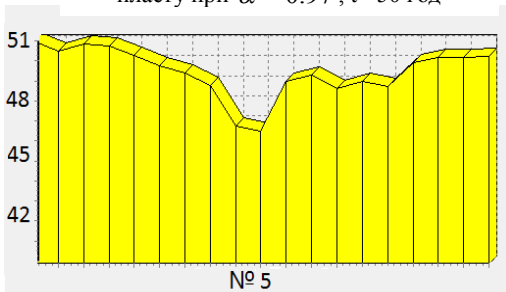


Рис. 6. Розподіл тиску газу у перерізі пласту при $\alpha = 0.94$, $t = 50$ год

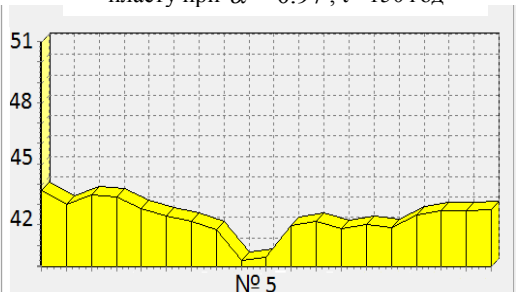


Рис. 7. Розподіл тиску газу у перерізі пласту при $\alpha = 0.94$, $t = 150$ год

З рисунків 2 - 7 видно, що зменшення порядку дробової похідної на 3% - 6% дуже суттєво впливає на динаміку тиску газу по всій області підземного сховища.

Можна простежити, що зниження коефіцієнта фільтрації α переводить процес відбору газу у режим так званої субфільтрації. У цьому режимі посилюється градієнт тиску в околі свердловини (рис. 2, 4, 6), уповільнюється вплив відбору газу на примежові зони пласту, а час виходу процесу на новий стаціонарний режим значно зростає (рис. 3, 5, 7).

На проведених обчислювальних експериментах підтверджено взаємозв'язок між коефіцієнтом проникності газу k та параметром α , що описано у працях [3, 4].

Висновки. У статті описано схему побудови та застосування методу скінченних елементів із використанням алгоритму Грюнвальда-Летнікова. Проведено обчислювальні експерименти, результати яких підтверджують характер поведінки тиску газу у пористому середовищі за наявності нетипової фільтрації.

Показано, що перехід до похідної дробового порядку за часом дозволяє більш глибоко осмислити відомі результати, створити нові адекватні кількісні моделі досліджуваних явищ.

Отримані результати можна використати для дослідження фільтраційних властивостей околу свердловини, визначення її дебіту залежно від розподілу тиску. Останнє, своєю чергою, дає можливість розраховувати параметри роботи сховища в піковий період.

Література

- [1] Васильев В. В., Симаков Л. А. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. Научное издание НАН Украины, — Киев, 2008 — 256 с.
- [2] Числова модель пласта підземного сховища газу на основі методу скінченних елементів / Я.Д.П'янило, Н.Б.Лопух, П.П.Галій // Нафтова і газова промисловість. — 2011. — Вип.1. — С. 38-42.
- [3] Pyanylo Ya. D., Lopuh N. B. Numerical Model of Mass Transfer in Porous Medium // TASK Quarterly Scientific Bulletin of the Academic Computer Centre in Gdansk — 2012. — Vol.16 (4). — Pp 229-238.
- [4] Lopuh N. B., Pyanylo Ya. D. Numerical analysis of models with fractional derivatives for gas filtration in porous media // Journal of Coupled Systems and Multiscale Dynamics — 2014. — Vol. 2 (1). — Pp. 15-19.
- [5] Carmona R., Ludkovski M., (2005), "Gas storage and supply guarantees: an optimal switching approach," submitted to Management Science.
- [6] Cook R D., Concept and Applications of Finite Element Analysis, fourth edition, John Wiley & Sons, 2002.

The analysis of gas filtration model with use of fractional derivatives in time

Nazariy Lopuh

In work on the basis of a finite elements method it is offered numerical model of gas filtration in porous non-uniform environments with use of fractional derivatives in time. Caputo and Riman-Liouville's fractional derivatives are considered. The numerical analysis with use of experimental initial data is made. The received results can be used for a research of filtrational properties of the vicinity of the well, definition of its output depending on pressure distribution.

Анализ модели фильтрации газа с использованием дробных производных по времени

Назарий Лопух

В работе на основе метода конечных элементов предложено числовую модель фильтрации газа в пористых неоднородных средах с использованием дробных производных по времени. Рассмотрены дробные производные Капуто и Римана-Лиувилля. Проведенный численный анализ с использованием экспериментальных входных данных. Полученные результаты можно использовать для исследования фильтрационных свойств окрестности скважины, определения ее дебита в зависимости от распределения давления.

Отримано 14.04.17