УДК 539.3

Коливання ортотропної циліндричної оболонки з множиною включень довільної конфігурації.

Тетяна Шопа

К. ф.-м. н., с.н.с., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Микитинецька, 3, Івано-Франківськ, e-mail: tetyana.sh@gmail.com

В рамках уточненої моделі, яка враховує деформацію поперечного зсуву та всі інерційні компоненти, побудовано розв'язок задачі про усталені коливання ортотропної замкненої циліндричної оболонки з довільною кількістю абсолютно жорстких включень довільної геометричної форми, орієнтації та розташування. Торці оболонки є довільної геометричної конфігурації. Розглянуто довільні гармонічні в часі граничні умови на зовнішній границі оболонки. Включення мають різні типи з'єднань з оболонкою. Розв'язок побудовано на основі непрямого методу граничних елементів та секвенціального підходу до представлення функцій Гріна. Крайову задачу зведено до системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Ключові слова: ортотропна циліндрична оболонка, включення, секвенціальний підхід, непрямий метод граничних елементів, коливання, частоти вільних коливань, метод колокацій

Вступ. В сучасному машинобудуванні та аерокосмічній галузі широко використовуються неоднорідні анізотропні оболонкові елементи складної форми, які працюють за змінних в часі навантажень. Тому виникає зростаюча потреба дослідження динамічної поведінки таких елементів. В літературі багато уваги приділяють коливанням суцільних оболонок традиційної форми, однак є недостатньо опублікованих матеріалів, які стосуються коливань оболонок складної форми з наявністю включень. В роботі [1] розв'язано задачу про коливання ортотропної циліндричної оболонки з множиною включень довільної форми та розташування, які жорстко з'єднані з оболонкою. В роботі [2] отримано розв'язок задачі про коливання ортотропної циліндричної оболонки з множиною включень довільної конфігурації з пружними прошарками. В роботі [3] розв'язано задачу про коливання ортотропної циліндричної оболонки з множиною включень довільної форми та розташування на шарнірному з'єднанні з оболонкою. Метою даної роботи є побудова розв'язку задачі про коливання циліндричної ортотропної оболонки з множиною включень довільної конфігурації, які мають одночасно різні типи з'єднання з панеллю.

1. Постановка задачі

Розглянемо задачу про усталені коливання ортотропної оболонки, яка має N абсолютно жорстких включень. Серед них є N_1 включень довільної форми та розташування, які взаємодіють з оболонкою через тонкі пружні прошарки типу Вінклера з коефіцієнтами жорсткості $k^{(j)}(\alpha)$, $\left(j=\overline{1,N_1}\right)$, N_2 включень, які жорстко з'єднані з оболонкою, та N_3 включень, які є шарнірно оперті. Товщиною пружних прошарків нехтуємо. Контурами включень є криві $L^{(j)}$, $j=\overline{1,N_1+N_2+N_3}$. Нехай на включення маси $\tilde{m}^{(j)}$ діють сили з головним вектором $P^{(j)}(t)=P_0^{(j)}\sin(\omega t)$, який є нормальним до серединної поверхні оболонки і діє в точці центра мас включення. Вважаємо, що включення здійснюють поступальний рух вздовж нормального напрямку до серединної поверхні оболонки і $\tilde{w}^{(j)}(t)=\tilde{w}_0^{(j)}\sin(\omega t)$ — переміщення *j*-ого включення. Зовнішня границя оболонки є також довільної форми. Нехай контур одного торця складається з двох взаємодоповнюючих кривих $L^{(N+1)}$ та $L^{(N+2)}$, а контуром другого торця є крива $L^{(N+3)}$. Криволінійну систему координат розміщено в уявно розширеній області Π, яка містить розглядувану багатозв'язну область Ω. Координатні лінії криволінійної системи координат співпадають з осями ортотропії матеріалу оболонки. Використовуємо позначення статтей [1-4].

Нехай на одній частині границі оболонки задано розподілені компоненти переміщень

$$\begin{gathered}w=w_0^{(N+1)}(\alpha)\sin(\omega t),\quad u_n=u_{n0}^{(N+1)}(\alpha)\sin(\omega t),\quad \gamma_n=\gamma_{n0}^{(N+1)}(\alpha)\sin(\omega t),\\ u_\tau=u_{\tau 0}^{(N+1)}(\alpha)\sin(\omega t),\quad \gamma_\tau=\gamma_{\tau 0}^{(N+1)}(\alpha)\sin(\omega t),\quad \alpha\in L^{(N+1)},\end{gathered}\tag{1}$$

на другій — задано розподілені компоненти зусиль

$$\begin{gathered}Q_n=Q_{n0}^{(N+2)}(\alpha)\sin(\omega t),\ M_n=M_{n0}^{(N+2)}(\alpha)\sin(\omega t),\ N_n=N_{n0}^{(N+2)}(\alpha)\sin(\omega t),\\ N_\tau=N_{\tau 0}^{(N+2)}(\alpha)\sin(\omega t),\quad M_\tau=M_{\tau 0}^{(N+2)}(\alpha)\sin(\omega t),\ \alpha\in L^{(N+2)},\end{gathered}\tag{2}$$

а на третій — задано розподілені компоненти зусиль та переміщень

$$\begin{gathered}w=w^{(N+3)}(\alpha)\sin(\omega t),\ M_n=M_{n0}^{(N+3)}(\alpha)\sin(\omega t),\ N_n=N_{n0}^{(N+3)}(\alpha)\sin(\omega t),\\ u_\tau=u_{\tau 0}^{(N+3)}(\alpha)\sin(\omega t),\quad \gamma_\tau=\gamma_{\tau 0}^{(N+3)}(\alpha)\sin(\omega t),\ \alpha\in L^{(N+3)}.\end{gathered}\tag{3}$$

Граничні умови на контурах включень, які взаємодіють з оболонкою через пружні прошарки типу Вінклера, мають вигляд

$$\begin{gathered}Q_n(\alpha,t)=-p^{(j)}(\alpha,t),\ M_n(\alpha,t)=0,\ N_n(\alpha,t)=0, M_\tau(\alpha,t),\ N_\tau(\alpha,t)=0,\\ \alpha\in L^{(j)},\ j=\overline{1,N_1},\end{gathered}\tag{4}$$

де $p^{(j)}(\alpha,t) = -k^{(j)}(\alpha)\left(\tilde{w}^{(j)} - w(\alpha,t)\right)$ — контактні сили взаємодії оболонки та включення, $w(\alpha,t)$ — прогин оболонки на межі з прошарком, $k^{(j)}(\alpha)$ — коефіцієнт пружності прошарку між *j*-им включенням та оболонкою, який є змінним вздовж контура включення.

Граничні умови на контурах включень, які жорстко з'єднані з оболонкою, мають вигляд

$$w(\alpha,t) = \tilde{w}^{(j)}(t),\ u_n(\alpha,t) = 0,\ \gamma_n(\alpha,t) = 0,\ u_\tau(\alpha,t) = 0,\ \gamma_\tau(\alpha,t) = 0,$$
$$\alpha \in L^{(j)},\quad j = \overline{N_1 + 1, N_1 + N_2}. \tag{5}$$

Граничні умови на контурах шарнірно опертих включень наступні

$$w(\alpha,t) = \tilde{w}^{(j)}(t),\ u_\tau(\alpha,t) = 0,\ \gamma_\tau(\alpha,t) = 0, M_n(\alpha,t) = 0,\ N_n(\alpha,t) = 0,$$
$$\alpha \in L^{(j)},\ j = \overline{N_1 + N_2 + 1, N_1 + N_2 + N_3}. \tag{6}$$

Контактні сили взаємодії оболонки та жорстко з'єднаних і шарнірно опертих включень моделюємо наступним чином

$$p^{(j)}(\alpha,t) = -Q_n(\alpha,t) = -Q_n(\alpha)\sin(\omega t),\quad \alpha \in L^{(j)},\ j = \overline{N_1 + 1, N_1 + N_2 + N_3}.$$

2. Розв'язок задачі

Для дослідження використано рівняння оболонок,які враховують поперечні зсуви та всі інерційні компоненти [1-5] .

Рівняння руху абсолютно жорстких включень матимуть вигляд

$$\tilde{m}^{(j)} \frac{\partial^2 \tilde{w}^{(j)}(t)}{\partial t^2} = P^{(j)}(t) + \int\limits_{L^{(j)}} p^{(j)}(\zeta,t)\,dl(\zeta),$$
$$p^{(j)}(\alpha,t) = -k^{(j)}(\alpha)\left(\tilde{w}^{(j)}(t) - w(\alpha,t)\right),\ j = \overline{1, N_1},$$
$$p^{(j)}(\alpha,t) = -Q_n(\alpha,t),\ j = \overline{N_1 + 1, N_1 + N_2 + N_3}. \tag{7}$$

Розв'язок крайової задачі будуємо на основі непрямого методу граничних елементів та на базі послідовнісного підходу до зображення узагальненої дельта-функції Дірака та функцій Гріна [5-7].
Вводимо узагальнений контур

$$L = L^{(1)} \cup \ldots.. \cup L^{(N)} \cup L^{(N+1)} \cup L^{(N+2)} \cup L^{(N+3)}$$

і такі функції на ньому:

$$\left\{T(\xi)\right\}=\left\{T_1(\xi),....,T_5(\xi)\right\}^{\mathrm{T}}=\begin{cases}\left\{T^{(1)}(\xi)\right\}=\left\{T_1^{(1)}(\xi),...,T_5^{(1)}(\xi)\right\}^{\mathrm{T}},\ \xi\in L^{(1)},\\ \text{...},\\ \left\{T^{(\mathrm{N}+3)}(\xi)\right\}=\left\{T_1^{(N+3)}(\xi),...,T_5^{(N+3)}(\xi)\right\}^{\mathrm{T}},\ \ \xi\in L^{(N+3)}.\end{cases}$$

На основі знайдених функцій Ґріна [4] розв’язок шукаємо у вигляді потенціалу простого шару

$$\left\{u_1(\alpha,t),u_2(\alpha,t),w(\alpha,t),\gamma_1(\alpha,t),\gamma_2(\alpha,t)\right\}^{\mathrm{T}}=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to0}\int_L\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{2}C_{km}(\varepsilon)\left[E_{km}^{(\mu)}(\alpha)\right]\left[U_{km}^{(\mu)}\right]\left[E_{km}^{(\mu)}(\xi)\right]\left\{T(\xi)\right\}dl(\xi)\sin(\omega t),\ (8)$$

Для побудови інтегральних рівнянь крайової задачі використовуємо представлення розв’язку (8) та крайові умови (1) – (6). У випадку крайових умов, коли на контурах задано компоненти зусиль, використовуємо метод фіктивного контуру для уникнення стрибка похідної від потенціалу простого шару на границі, який полягає в тому, що крайові умови задовольняємо не на реальній границі, а на границі фіктивно зміщеній всередину розглядуваної області на малу відстань ε. Криві зміщених контурів позначатимемо $L^{\varepsilon(j)}$. Тоді система $5(N+3)+N_1+N_2+N_3$ інтегральних рівнянь та інтегральних співвідношень, врахувавши рівняння руху (7), відносно невідомих функцій густин $\left\{T(\xi)\right\}$ та відносно невідомих переміщень включень $\tilde{w}_0^{(j)}$ набуває вигляду

$$\left\{0,\ 0,\ k^{(j)}(\alpha)\left(\tilde{w}_0^{(j)}-w(\alpha)\right),\ 0,\ 0\right\}^{\mathrm{T}}=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to0}\int_L\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{2}C_{km}(\varepsilon)\left[\Omega_{km}^{(\mu)(P)}(\alpha)\right]\left[E_{km}^{(\mu)}(\xi)\right]\left\{T(\xi)\right\}dl(\xi),$$
$$\alpha\in L^{\varepsilon(j)},\ \ j=\overline{1,N_1},$$

$$\left\{0,\ 0,\ \tilde{w}_0^{(j)},\ 0,\ 0\right\}^{\mathrm{T}}=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to0}\int_L\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{2}C_{km}(\varepsilon)\left[\Omega_{km}^{(\mu)(U)}(\alpha)\right]\left[E_{km}^{(\mu)}(\xi)\right]\left\{T(\xi)\right\}dl(\xi),$$
$$\alpha\in L^{(j)},\ \ j=\overline{N_1+1,N_1+N_2},$$

$$\tilde{w}_0^{(j)}=\lim_{\varepsilon\to0}\int_L\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{5}\sum_{\mu=1}^{2}C_{km}(\varepsilon)w_i^{(\mu)}(\alpha)\Phi_{km}^{(\mu)i}(\xi)T_i(\xi)dl(\xi),$$

$$0=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{5}\sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon) u_{i\tau}^{(\mu)}(\alpha)\Phi_{km}^{(\mu)i}(\xi)T_i(\xi)dl(\xi),$$

$$0=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=15}\sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon)\gamma_{i\tau}^{(\mu)}(\alpha)\Phi_{km}^{(\mu)i}(\xi)T_i(\xi)dl(\xi),$$

$$\alpha\in L^{(j)},\quad j=\overline{N_1+N_2+1, N_1+N_2+N_3},$$

$$0=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{5}\sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon) M_{in}^{(\mu)}(\alpha)\Phi_{km}^{(\mu)i}(\xi)T_i(\xi)dl(\xi),$$

$$0=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{5}\sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon) N_{in}^{(\mu)}(\alpha)\Phi_{km}^{(\mu)i}(\xi)T_i(\xi)dl(\xi),$$

$$\alpha\in L^{\varepsilon(j)},\quad j=\overline{N_1+N_2+1, N_1+N_2+N_3},$$

$$\left\{u_{n0}^{(j)}(\alpha),\ u_{\tau 0}^{(j)}(\alpha),\ w_{0}^{(j)}(\alpha),\ \gamma_{n0}^{(j)}(\alpha),\ \gamma_{\tau 0}^{(j)}(\alpha)\ \right\}^{\mathrm{T}}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon)\left[\Omega_{km}^{(\mu)(U)}(\alpha)\right]\left[E_{km}^{(\mu)}(\xi)\right]\left\{T(\xi)\right\}dl(\xi),$$

$$\alpha\in L^{(j)},\ j=N+1,$$

$$\left\{N_{n0}^{(j)}(\alpha),\ N_{\tau 0}^{(j)}(\alpha),\ Q_{n0}^{(j)}(\alpha),\ M_{n0}^{(j)}(\alpha),\ M_{\tau 0}^{(j)}(\alpha)\right\}^{\mathrm{T}}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon)\left[\Omega_{km}^{(\mu)(P)}(\alpha)\right]\left[E_{km}^{(\mu)}(\xi)\right]\left\{T(\xi)\right\}dl(\xi),$$

$$\alpha\in L^{\varepsilon(j)},\quad j=N+2,$$

$$w_0^{(j)}(\alpha)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{5}\sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon) w_{i}^{(\mu)}(\alpha)\Phi_{km}^{(\mu)i}(\xi)T_i(\xi)dl(\xi),$$

$$u_{\tau 0}^{(j)}(\alpha)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{5}\sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon) u_{i\tau}^{(\mu)}(\alpha)\Phi_{km}^{(\mu)i}(\xi)T_i(\xi)dl(\xi),$$

$$\gamma_{\tau 0}^{(j)}(\alpha)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{5}\sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon)\gamma_{i\tau}^{(\mu)}(\alpha)\Phi_{km}^{(\mu)i}(\xi)T_i(\xi)dl(\xi),$$

$$\alpha\in L^{(j)},\quad j=N+3,$$

$$M_{n0}^{(j)}(\alpha)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{5}\sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon) M_{in}^{(\mu)}(\alpha)\Phi_{km}^{(\mu)i}(\xi)T_i(\xi)dl(\xi),$$

$$N_{n0}^{(j)}(\alpha)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{5}\sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon) N_{in}^{(\mu)}(\alpha)\Phi_{km}^{(\mu)i}(\xi)T_i(\xi)dl(\xi),$$

$$\alpha \in L^{\varepsilon(j)}, \quad j = N+3,$$
$$-\omega^2 \tilde{m}^{(j)} \tilde{w}_0^{(j)} = P_0^{(j)} - \int\limits_{L^{(j)}} k^{(j)}(\zeta)\left(\tilde{w}_0^{(j)} - w(\zeta)\right) dl(\zeta), \ j = \overline{1, N_1},$$
$$-\omega^2 \tilde{m}^{(j)} \tilde{w}_0^{(j)} = P_0^{(j)} - \int\limits_{L^{\varepsilon(j)}} Q_n(\zeta) dl(\zeta), \ j = \overline{N_1+1, N_1+N_2+N_3},$$

де

$$w(\zeta) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_L \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{5} \sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon) w_i^{(\mu)}(\zeta) \Phi_{km}^{(\mu)i}(\xi) T_i(\xi) dl(\xi),$$

$$Q_n(\zeta) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_L \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{5} \sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon) Q_{in}^{(\mu)}(\zeta) \Phi_{km}^{(\mu)i}(\xi) T_i(\xi) dl(\xi),$$

$$\Phi_{km}^{(1)1}(\xi) = \Phi_{km}^{(1)4}(\xi) = \Phi_{km}^{cs}(\xi), \Phi_{km}^{(1)2}(\xi) = \Phi_{km}^{(1)5}(\xi) = \Phi_{km}^{sc}(\xi), \Phi_{km}^{(1)3}(\xi) = \Phi_{km}^{ss}(\xi),$$

$$\Phi_{km}^{(2)1}(\xi) = \Phi_{km}^{(2)4}(\xi) = \Phi_{km}^{cc}(\xi), \Phi_{km}^{(2)2}(\xi) = \Phi_{km}^{(2)5}(\xi) = \Phi_{km}^{ss}(\xi), \Phi_{km}^{(2)3}(\xi) = \Phi_{km}^{sc}(\xi).$$

Розв'язок систем інтегральних рівнянь можна знайти на основі різних схем методу колокацій. Для прикладу, достатньо добрі результати дає метод колокацій, коли контури узагальненої кривої L замінюємо ламаними ($S^{(j)}$ — кількість відрізків розбиття j-ого контуру, $\alpha^{(j)r}$ — середини відрізків розбиття j-ого контуру, $l^{(j)r}$ — довжини відрізків розбиття $L^{(j)r}$, $r = \overline{1, S^{(j)}}$), а на кожному з прямолінійних відрізків контурів задаємо такий розподіл невідомих густин $\left\{T^{(j)}(\xi)\right\} = \left\{T^{(j)r}\right\} \delta\left(\alpha^{(j)r}, \xi\right)$. Мінімізуємо нев'язку в контрольних точках колокацій $\alpha^{(j)q}$, які вибираємо серединами відрізків розбиття контурів або точками, які є на відстані ε від них з боку розглядуваної області.

$$\left\{0,\ 0,\ k^{(j)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\left(\tilde{w}_0^{(j)} - w\left(\alpha^{(j)q}\right)\right),\ 0,\ 0\right\}^{\mathrm{T}} =$$
$$= \sum_{f=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^{K} \sum_{m=0}^{M} \sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon) \left[\Omega_{km}^{(\mu)(P)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\right]\left[E_{km}^{(\mu)}\left(\alpha^{(f)r}\right)\right]\left\{T^{(f)r}\right\},$$
$$\alpha^{(j)q} \in L^{\varepsilon(j)}, q = \overline{1, S^{(j)}}, \ j = \overline{1, N_1},$$

$$\left\{0,\ 0,\ \tilde{w}_0^{(j)},\ 0,\ 0\right\}^{\mathrm{T}} =$$

$$= \sum_{f=1}^{N+3}\sum_{r=1}^{S^{(f)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M}\sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon)\left[\Omega_{km}^{(\mu)(U)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\right]\left[E_{km}^{(\mu)}\left(\alpha^{(f)r}\right)\right]\left\{T^{(f)r}\right\},$$

$$\alpha^{(j)q} \in L^{(j)}, q = \overline{1, S^{(j)}},\quad j = \overline{N_1+1, N_1+N_2},$$

$$\tilde{w}_0^{(j)} = \sum_{f=1}^{N+3}\sum_{r=1}^{S^{(f)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M}\sum_{i=1}^{5}\sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon) w_i^{(\mu)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{(\mu)i}\left(\alpha^{(f)r}\right)T_i^{(f)r},$$

$$0 = \sum_{f=1}^{N+3}\sum_{r=1}^{S^{(f)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M}\sum_{i=1}^{5}\sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon) u_{i\tau}^{(\mu)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{(\mu)i}\left(\alpha^{(f)r}\right)T_i^{(f)r},$$

$$0 = \sum_{f=1}^{N+3}\sum_{r=1}^{S^{(f)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M}\sum_{i=1}^{5}\sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon) \gamma_{i\tau}^{(\mu)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{(\mu)i}\left(\alpha^{(f)r}\right)T_i^{(f)r},$$

$$\alpha^{(j)q} \in L^{(j)}, q = \overline{1, S^{(j)}},\quad j = \overline{N_1+N_2+1, N_1+N_2+N_3},$$

$$0 = \sum_{f=1}^{N+3}\sum_{r=1}^{S^{(f)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M}\sum_{i=1}^{5}\sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon) M_{in}^{(\mu)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{(\mu)i}\left(\alpha^{(f)r}\right)T_i^{(f)r},$$

$$0 = \sum_{f=1}^{N+3}\sum_{r=1}^{S^{(f)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M}\sum_{i=1}^{5}\sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon) N_{in}^{(\mu)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{(\mu)i}\left(\alpha^{(f)r}\right)T_i^{(f)r},$$

$$\alpha^{(j)q} \in L^{\varepsilon(j)}, q = \overline{1, S^{(j)}},\quad j = \overline{N_1+N_2+1, N_1+N_2+N_3},$$

$$\left\{u_{n0}^{(j)}\left(\alpha^{(j)q}\right),\ u_{\tau0}^{(j)}\left(\alpha^{(j)q}\right),\ w_0^{(j)}\left(\alpha^{(j)q}\right),\ \gamma_{n0}^{(j)}\left(\alpha^{(j)q}\right),\ \gamma_{\tau0}^{(j)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\right\}^{\mathrm{T}} =$$

$$= \sum_{f=1}^{N+3}\sum_{r=1}^{S^{(f)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M}\sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon)\left[\Omega_{km}^{(\mu)(U)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\right]\left[E_{km}^{(\mu)}\left(\alpha^{(f)r}\right)\right]\left\{T^{(f)r}\right\},$$

$$\alpha^{(j)q} \in L^{(j)},\quad j = N+1,\quad q = \overline{1, S^{(j)}},$$

$$\left\{N_{n0}^{(j)}\left(\alpha^{(j)q}\right),\ N_{\tau0}^{(j)}\left(\alpha^{(j)q}\right),\ Q_{n0}^{(j)}\left(\alpha^{(j)q}\right),\ M_{n0}^{(j)}\left(\alpha^{(j)q}\right),\ M_{\tau0}^{(j)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\right\}^{\mathrm{T}} =$$

$$= \sum_{f=1}^{N+3}\sum_{r=1}^{S^{(f)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M}\sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon)\left[\Omega_{km}^{(\mu)(P)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\right]\left[E_{km}^{(\mu)}\left(\alpha^{(f)r}\right)\right]\left\{T^{(f)r}\right\},$$

$$\alpha^{(j)q} \in L^{\varepsilon(j)}, q = \overline{1, S^{(j)}},\quad j = N+2,$$

$$w_0^{(j)}\left(\alpha^{(j)q}\right) = \sum_{f=1}^{N+3}\sum_{r=1}^{S^{(f)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M}\sum_{i=1}^{5}\sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon) w_i^{(\mu)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{(\mu)i}\left(\alpha^{(f)r}\right)T_i^{(f)r},$$

$$u_{\tau 0}^{(j)}\left(\alpha^{(j)q}\right)=\sum_{f=1}^{N+3}\sum_{r=1}^{S^{(f)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M}\sum_{i=1}^{5}\sum_{\mu=1}^{2}C_{km}(\varepsilon)u_{i\tau}^{(\mu)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{(\mu)i}\left(\alpha^{(f)r}\right)T_i^{(f)r},$$

$$\gamma_{\tau 0}^{(j)}\left(\alpha^{(j)q}\right)=\sum_{f=1}^{N+3}\sum_{r=1}^{S^{(f)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M}\sum_{i=1}^{5}\sum_{\mu=1}^{2}C_{km}(\varepsilon)\gamma_{i\tau}^{(\mu)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{(\mu)i}\left(\alpha^{(f)r}\right)T_i^{(f)r},$$

$$\alpha^{(j)q}\in L^{(j)},\ j=N+3,\ q=\overline{1,S^{(j)}},$$

$$M_{n0}^{(j)}\left(\alpha^{(j)q}\right)=\sum_{f=1}^{N+3}\sum_{r=1}^{S^{(f)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M}\sum_{i=1}^{5}\sum_{\mu=1}^{2}C_{km}(\varepsilon)M_{in}^{(\mu)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{(\mu)i}\left(\alpha^{(f)r}\right)T_i^{(f)r},$$

$$N_{n0}^{(j)}\left(\alpha^{(j)q}\right)=\sum_{f=1}^{N+3}\sum_{r=1}^{S^{(f)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M}\sum_{i=1}^{5}\sum_{\mu=1}^{2}C_{km}(\varepsilon)N_{in}^{(\mu)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{(\mu)i}\left(\alpha^{(f)r}\right)T_i^{(f)r},$$

$$\alpha^{(j)q}\in L^{\varepsilon(j)},\ j=N+3,\ q=\overline{1,S^{(j)}},$$

$$P_0^{(j)}=-\sum_{p=1}^{S^{(j)}}\sum_{f=1}^{N+3}\sum_{r=1}^{S^{(f)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M}\sum_{i=1}^{5}\sum_{\mu=1}^{2}C_{km}(\varepsilon)\tilde{\Psi}_{km}^{(\mu)}\left(\alpha^{(j)p}\right)w_{km}^{(\mu)i}\Phi_{km}^{(\mu)i}\left(\alpha^{(f)r}\right)T_i^{(f)r}+$$

$$+\tilde{w}_0^{(j)}\left(\sum_{p=1}^{S^{(j)}}\Theta\left(\alpha^{(j)p}\right)-\omega^2\tilde{m}^{(j)}\right),\ j=\overline{1,N_1},$$

$$P_0^{(j)}=-\sum_{p=1}^{S^{(j)}}\sum_{f=1}^{N+3}\sum_{r=1}^{S^{(f)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M}\sum_{i=1}^{5}\sum_{\mu=1}^{2}C_{km}(\varepsilon)\Psi_{in}^{(\mu)}\left(\alpha^{(j)p}\right)\Phi_{km}^{(\mu)i}\left(\alpha^{(f)r}\right)T_i^{(f)r}-$$

$$-\omega^2\tilde{m}^{(j)}\tilde{w}_0^{(j)},\quad j=\overline{N_1+1,N_1+N_2+N_3},$$

де $\tilde{\Psi}_{km}^{(1)}\left(\alpha^{(j)p}\right)=\Psi_{km}^{ss}\left(\alpha^{(j)p}\right),\ \tilde{\Psi}_{km}^{(2)}\left(\alpha^{(j)p}\right)=\Psi_{km}^{sc}\left(\alpha^{(j)p}\right).$

Власні частоти знаходимо з умови існування нетривіального розв’язку відповідної системи однорідних лінійних алгебраїчних рівнянь, прирівнюючи визначник системи до нуля. Характеристики напружено-деформованого стану вздовж довільного напрямку з нормаллю $\mathbf{n}(\alpha)=\{n_1(\alpha),n_2(\alpha)\}$ та дотичною $\boldsymbol{\tau}(\alpha)=\{\tau_1(\alpha),\tau_2(\alpha)\}$ можна отримати на основі знайдених дискретних значень фіктивних зусиль на зовнішніх контурах та контурі включень, використовуючи наступні формули

$$\left\{u_n(\alpha,t),u_\tau(\alpha,t),w(\alpha,t),\gamma_n(\alpha,t),\gamma_\tau(\alpha,t)\right\}^{\mathrm{T}}=$$

$$=\sum_{j=1}^{N+3}\sum_{r=1}^{S^{(j)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M}\sum_{\mu=1}^{2}C_{km}(\varepsilon)\left[\Omega_{km}^{(\mu)(U)}(\alpha)\right]\left[E_{km}^{(\mu)}\left(\alpha^{(j)r}\right)\right]\left\{T^{(j)r}\right\}\sin(\omega t),\ \alpha^{(j)r}\in L,$$

$$\left\{N_n(\alpha,t), N_\tau(\alpha,t), Q_n(\alpha,t), M_n(\alpha,t), M_\tau(\alpha,t)\right\}^{\mathrm{T}} =$$
$$= \sum_{j=1}^{N+3}\sum_{r=1}^{S^{(j)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M}\sum_{\mu=1}^{2} C_{km}(\varepsilon)\left[\Omega_{km}^{(\mu)(P)}(\alpha)\right]\left[E_{km}^{(\mu)}\left(\alpha^{(j)r}\right)\right]\left\{T^{(j)r}\right\}\sin(\omega t),\ \alpha^{(j)r}\in L.$$

Висновки. Використовуючи побудовані в роботі алгебраїчні рівняння, можна отримати розв'язки для довільних мішаних випадків крайових умов на зовнішніх границях оболонки, розглядаючи довільні комбінації амплітуд $w(\alpha),\ u_n(\alpha),\ \gamma_\tau(\alpha),\ u_\tau(\alpha),$
$Q_n(\alpha),\ M_n(\alpha),\ N_n(\alpha),\ M_\tau(\alpha), N_\tau(\alpha)$. Ключові рівняння враховують деформацію поперечного зсуву та всі інерційні компоненти, включаючи інерцію обертання. Це дозволяє досліджувати у кращій якості різні типи коливань, спричинених різним характером збурення зовнішньої та внутрішньої границі у випадку анізотропних матеріалів.

Література

[1] *Шопа Т.* Коливання ортотропної циліндричної оболонки з множиною включень довільної конфігурації, жорстко з'єднаних з оболонкою / *Т. Шопа* // Вісник ТНТУ. — 2013. № 2. — С. 41-55.

[2] *Шопа Т.* Коливання ортотропної панелі подвійної кривини з множиною включень довільної конфігурації з пружними прошарками / *Т. Шопа* // Вісник ТНТУ. — 2013. № 1. — С. 71-84.

[3] *Шопа Т.* Коливання ортотропної циліндричної оболонки з множиною включень довільної конфігурації на шарнірному з'єднанні з оболонкою / *Т. Шопа* // Прикарпатський вісник НТШ. Число — 2016. № 1. — С. 26-45.

[4] *Шопа Т.* Коливання ортотропної циліндричної оболонки з множиною отворів довільної конфігурації */ Т. Шопа* // Вісник ТНТУ. — 2012. — № 4(68). — С. 14-28.

[5] *Бурак Я. Й., Рудавський Ю. К., Сухорольський М.А.*. Аналітична механіка локально навантажених оболонок / — Львів: Інтелект-Захід, 2007. — 240 с.

[6] *Сухорольський М. А.* Послідовності і ряди / М.А. Сухорольський. — Львів:Растр-7, 2010. — 346 с.

[7] *Lighthill J.* Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions / *J. Lighthill.* — Cambridge University Press, 1958. — 79 p.

Vibration of orthotropic cylindrical shell with a set of inclusions of arbitrary configuration.

Tetiana Shopa

In the framework of the refined theory, which takes into account transverse shear deformation and all inertial components, the solution of the problem on the steady state vibrations of the orthotropic closed cylindrical shell with the arbitrary number of rigid inclusions of the arbitrary geometrical form, orientation, and location is constructed. External boundaries of the shell are of the arbitrary geometrical configuration. Arbitrary harmonic in time boundary conditions are considered on the external boundaries of the shell. The inclusions have different types of connections with the shell. The solution is built on the basis of the indirect boundary elements method and the sequential approach to the representation of the Green's function. The boundary value problem is reduced to the system of algebraic equations.

Колебания ортотропной цилиндрической оболочки с множеством включений произвольной конфигурации

Татьяна Шопа

В пределах уточненной теории, которая учитывает поперечные сдвиги и все инерционные компоненты, построено решение задачи об установившихся колебаниях ортотропной замкнутой цилиндрической оболочки с произвольным количеством включений произвольной геометрической формы, ориентации и расположения. Торци оболочки произвольной геометрической конфигурации. Рассмотрено произвольные гармонические во времени граничные условия на внешней границе оболочки. Включение имеют разные типы соединений с оболочкой. Решение построено на основе непрямого метода граничных элементов и секвенциального подхода к представлению функций Грина. Краевую задачу сведено к системе линейных алгебраических уравнений.

Отримано 27.10.17