

Алгоритми декомпозиції області для задач про термомеханічний контакт багатьох пружних тіл

Ігор Прокопишин

К. ф.-м. н., ст. н. с., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів; Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, e-mail: ihor84@gmail.com

Розглянуто термопружну контактну задачу для багатьох тіл скінченних розмірів за умов одностороннього механічного та неідеального теплового контакту між ними. За допомогою методу штрафу, отримано слабке формулювання цієї задачі у вигляді системи лінійного і нелінійного варіаційних рівнянь у гільбертовому просторі. Для розв'язування цієї системи запропоновано низку ітераційних алгоритмів декомпозиції області типу Робіна, на кожному кроці яких необхідно розв'язувати два лінійні варіаційні рівняння для кожного з тіл, одне з яких відповідає задачі теплопровідності з умовами Ньютона на ділянках можливого контакту, а інше — задачі теорії пружності з умовами Робіна на цих ділянках та додатковими об'ємними силами у тілах. Здійснено програмну реалізацію розроблених методів для плоских термоконттактних задач з використанням скінченноелементних апроксимацій. Числові дослідження проведено для задач про контакт одного та двох термопружних тіл.

Ключові слова: термоконттактні задачі теорії пружності, односторонній механічний контакт, неідеальний тепловий контакт, варіаційні нерівності, варіаційні рівняння, метод штрафу, методи декомпозиції області, метод скінченних елементів

Вступ. Необхідність розв'язувати термомеханічні контактні задачі теорії пружності виникає при дослідженні взаємодії деталей машин і механізмів та елементів будівельних конструкцій. Врахування температурних деформацій під час контакту є важливим, оскільки у багатьох випадках вони можуть суттєво впливати на напружено-деформований стан у тілах.

Математичному моделюванню та методам розв'язування термоконттактних задач за наявності тепловиділення від тертя присвячено роботи [1-6].

У працях [7-9] розглянуто задачі про термопружний контакт двох півпросторів з теплопроникними міжповерхневими просвітами або шорсткими ділянками та запропоновано аналітично-числові методи їх розв'язування.

У роботах [10-12] досліджено плоскі та осесиметричні контактні задачі термопружності для багаточастинних тіл з односторонніми механічними та неідеальними термічними умовами контакту, здійснено варіаційне формулювання цих задач у вигляді системи зв'язаних варіаційних рівняння і нерівності та розроблено ітераційний алгоритм розв'язування цієї системи, на кожній ітерації якого необхідно розв'язувати незв'язані варіаційне рівняння і варіаційну нерівність, що

еквівалентні відповідно задачам безумовної та умовної мінімізації квадратичних функціоналів. Для розв'язування останніх, на кожному ітераційному кроці застосовано ітераційний метод спряжених градієнтів з використанням скінченноелементних апроксимацій.

Ефективним підходом до розв'язування задач про контактну взаємодію багатьох тіл є застосування методів декомпозиції за підобластями (тілами). Ці методи зводять розв'язування задач математичної фізики у складних багатокомпонентних областях до розв'язування послідовності задач в окремих підобластях.

У пропонованій роботі розглядається задача про термомеханічний контакт багатьох пружних тіл скінченних розмірів. Між тілами виконуються умови одностороннього механічного контакту без тертя та ідеального теплового контакту. Вважається, що коефіцієнт контактного теплообміну є функцією від нормального контактного напруження та фактичної відстані між тілами.

Розглянуто слабе формулювання цієї задачі у вигляді системи зв'язаних варіаційного рівняння та варіаційної нерівності, отримане у праці [11]. Використовуючи метод штрафу, цю систему зведено до системи зв'язаних лінійного і нелінійного варіаційних рівнянь у гільбертовому просторі. Для розв'язування системи варіаційних рівнянь, одержаної методом штрафу, запропоновано ряд ітераційних методів декомпозиції області (МДО), які полягають у паралельному або послідовному розв'язуванні на кожному ітераційному кроці для кожного із тіл двох незв'язаних лінійних варіаційних рівнянь, одне з яких відповідає задачі теплопровідності з умовами Ньютонна на ділянках можливого контакту, а інше — задачі теорії пружності з додатковими об'ємними силами у тілах та умовами Робіна на зонах можливого контакту. Ці МДО є узагальненнями ітераційних алгоритмів декомпозиції області типу Робіна, розроблених у працях [13-22] для задач механічного контакту.

Здійснено програмну реалізацію отриманих методів для плоских задач про термопружний контакт одного тіла з жорстким нагрітим штампом та двох і трьох пружних тіл між собою на основі скінченноелементних апроксимацій на лінійних і квадратичних трикутних елементах. Розроблені алгоритми апробовано для дослідження задачі про термоконтатну взаємодію тіла з нагрітою жорсткою основою та задачі про термопружний контакт двох тіл за наявності зазору між ними. Проаналізовано розподіли нормальних контактних напружень. Для першої задачі показано узгодження числових результатів із розв'язком, одержаним у роботі [10] іншим числовим методом. Вивчено швидкість збіжності різних алгоритмів МДО.

Перевагами розроблених ітераційних методів є те, що вони містять лише один ітераційний цикл, не вимагають розв'язування на кожній ітерації нелінійних задач чи варіаційних нерівностей, дозволяють організовувати розпаралелювання обчислень для випадку контакту значної кількості тіл та застосувати найбільш оптимальні числові методи та математичні моделі в окремих тілах.

1. Постановка задачі

Розглянемо задачу про термомеханічний контакт N пружних тіл $\Omega_\alpha \subset \mathbb{R}^3$ з ліпшицевими межами $\Gamma_\alpha = \partial\Omega_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \dots, N$ (рис. 1). Позначимо $\Omega = \bigcup_{\alpha=1}^N \Omega_\alpha$.

У просторі \mathbb{R}^3 введемо ортонормований базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Термо-напружений стан у точці $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)^T$ кожного з тіл Ω_α визначають вектор переміщень $\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{x})=u_{\alpha i}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i$, симетричні тензори деформацій $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_\alpha(\mathbf{x})=\varepsilon_{\alpha ij}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ і напружень $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_\alpha(\mathbf{x})=\sigma_{\alpha ij}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ та температура $T_\alpha(\mathbf{x})$. Ці величини задовольняють співвідношення Коші, співвідношення між напруженнями і деформаціями, рівняння рівноваги та рівняння теплопровідності:

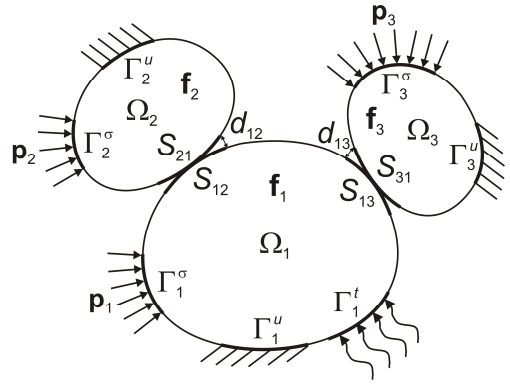


Рис. 1

$$\varepsilon_{\alpha ij}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial u_{\alpha i}(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{\alpha j}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right) / 2, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad \mathbf{x} \in \Omega_\alpha, \quad (1)$$

$$\sigma_{\alpha ij}(\mathbf{x}) = \sum_{k, l=1}^3 C_{\alpha ijkl}(\mathbf{x}) \left[\varepsilon_{\alpha kl}(\mathbf{x}) - \tilde{\beta}_{\alpha kl}(\mathbf{x})(T_\alpha(\mathbf{x}) - T_{0\alpha}(\mathbf{x})) \right], \quad i, j = 1, 2, 3, \quad \mathbf{x} \in \Omega_\alpha, \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{\alpha ij}(\mathbf{x})}{\partial x_j} + f_{\alpha i}(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad \mathbf{x} \in \Omega_\alpha, \quad (3)$$

$$\sum_{i, j=1}^3 \lambda_{\alpha ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 T_\alpha(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_\alpha. \quad (4)$$

Тут $T_{0\alpha}(\mathbf{x})$ — початкова температура тіла Ω_α , $f_{\alpha i}(\mathbf{x})$ — компоненти вектора об'ємних сил $\mathbf{f}_\alpha(\mathbf{x}) = f_{\alpha i}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i$, що діють на тіло Ω_α , $\tilde{\beta}_{\alpha kl}(\mathbf{x})$ — компоненти тензора теплового розширення, $\lambda_{\alpha ij}(\mathbf{x})$ — компоненти тензора теплопровідності, а $C_{\alpha ijkl}(\mathbf{x})$ — компоненти симетричного тензора пружних сталей, що володіють властивістю [23]:

$$(\exists c_\alpha, d_\alpha > 0) (\forall \mathbf{x} \in \Omega_\alpha) \left\{ c_\alpha \sum_{i, j} \varepsilon_{\alpha ij}^2 \leq \sum_{i, j, k, l} C_{\alpha ijkl} \varepsilon_{\alpha ij} \varepsilon_{\alpha kl} \leq d_\alpha \sum_{k, l} \varepsilon_{\alpha kl}^2 \right\}. \quad (5)$$

На поверхні $\Gamma_\alpha = \partial\Omega_\alpha$ кожного з тіл введемо локальний ортонормований базис $\boldsymbol{\xi}_\alpha, \boldsymbol{\eta}_\alpha, \mathbf{n}_\alpha$, де \mathbf{n}_α — одинична зовнішня нормаль, а $\boldsymbol{\xi}_\alpha, \boldsymbol{\eta}_\alpha$ — одиничні дотичні. Вектори переміщень і напружень на Γ_α у цьому базисі запишемо так:

$$\mathbf{u}_\alpha = u_{\alpha \xi} \boldsymbol{\xi}_\alpha + u_{\alpha \eta} \boldsymbol{\eta}_\alpha + u_{\alpha n} \mathbf{n}_\alpha, \quad \boldsymbol{\sigma}_\alpha = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\alpha = \sigma_{\alpha \xi} \boldsymbol{\xi}_\alpha + \sigma_{\alpha \eta} \boldsymbol{\eta}_\alpha + \sigma_{\alpha n} \mathbf{n}_\alpha.$$

Припустимо, що поверхня Γ_α складається з трьох частин, які не перетинаються: $\Gamma_\alpha = \Gamma_\alpha^u \cup \Gamma_\alpha^\sigma \cup S_\alpha$, де $\Gamma_\alpha^u \cup \Gamma_\alpha^\sigma = \Gamma_\alpha^t$, $\Gamma_\alpha^u = \overline{\Gamma_\alpha^u}$, $\Gamma_\alpha^u \neq \emptyset$, $S_\alpha = \bigcup_{\beta \in B_\alpha} S_{\alpha\beta} \neq \emptyset$.

На частині Γ_α^u поверхні Γ_α , $\alpha=1,2,\dots,N$, виконуються кінематичні крайові умови, які для спрощення варіаційних формулювань вважаємо нульовими, а на частині Γ_α^σ — статичні крайові умови:

$$\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\alpha^u, \quad \boldsymbol{\sigma}_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_\alpha(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\alpha^\sigma, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N, \quad (6)$$

де $\mathbf{p}_\alpha = p_{\alpha\xi}\boldsymbol{\xi}_\alpha + p_{\alpha\eta}\boldsymbol{\eta}_\alpha + p_{\alpha n}\mathbf{n}_\alpha$ — задані навантаження.

На поверхні $\Gamma_\alpha^t = \Gamma_\alpha^u \cup \Gamma_\alpha^\sigma$ задані умови конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем:

$$\sum_{i,j=1}^3 \lambda_{\alpha ij}(\mathbf{x}) n_{\alpha i}(\mathbf{x}) \frac{\partial T_\alpha(\mathbf{x})}{\partial x_j} = -\rho_\alpha^c(\mathbf{x}) (T_\alpha(\mathbf{x}) - T_\alpha^c(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\alpha^t, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N, \quad (7)$$

де $\rho_\alpha^c(\mathbf{x})$ — коефіцієнт конвективного теплообміну, а $T_\alpha^c(\mathbf{x})$ — задана температура.

Поверхня $S_{\alpha\beta} \subset \Gamma_\alpha$ відповідає ділянці можливого контакту тіла Ω_α з тілом Ω_β , а $B_\alpha \subset \{1, 2, \dots, N\}$ — множина індексів усіх тіл, які контактують з тілом Ω_α , $I_\alpha \neq \emptyset$, $\alpha = 1, 2, \dots, N$. Вважаємо, що поверхні $S_{\alpha\beta} \subset \Gamma_\alpha$ та $S_{\beta\alpha} \subset \Gamma_\beta$ достатньо близькі ($S_{\alpha\beta} \approx S_{\beta\alpha}$) [24], та приймаємо, що $\mathbf{n}_\alpha(\mathbf{x}) \approx -\mathbf{n}_\beta(\mathbf{x}')$, де $\mathbf{x}' = P(\mathbf{x}) \in S_{\beta\alpha}$ — проекція точки $\mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}$ на поверхню $S_{\beta\alpha}$. Відстань по нормалі між тілами Ω_α та Ω_β до деформації позначимо $d_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \pm \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - x'_i)^2}$, де знак “ \pm ” залежить від формулювання конкретної задачі.

На поверхнях $S_{\alpha\beta}$ задано умови механічного одностороннього контакту без тертя:

$$\sigma_{\alpha n}(\mathbf{x}) = \sigma_{\beta n}(\mathbf{x}') \leq 0, \quad \sigma_{\alpha\xi}(\mathbf{x}) = \sigma_{\beta\xi}(\mathbf{x}') = 0, \quad \sigma_{\alpha\eta}(\mathbf{x}) = \sigma_{\beta\eta}(\mathbf{x}') = 0, \quad (8)$$

$$u_{\alpha n}(\mathbf{x}) + u_{\beta n}(\mathbf{x}') \leq d_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), \quad (9)$$

$$\varphi_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \sigma_{\alpha n}(\mathbf{x}) = 0, \quad \varphi_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = d_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) - u_{\alpha n}(\mathbf{x}) - u_{\beta n}(\mathbf{x}'), \quad (10)$$

а також наступні умови неідеального теплового контакту [11]:

$$\sum_{i,j=1}^3 \lambda_{\alpha ij} n_{\alpha i} \frac{\partial T_\alpha(\mathbf{x})}{\partial x_j} = - \sum_{i,j=1}^3 \lambda_{\beta ij} n_{\beta i} \frac{\partial T_\beta(\mathbf{x}')}{\partial x_j} = -\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) (T_\alpha(\mathbf{x}) - T_\beta(\mathbf{x}')), \quad (11)$$

де $\mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}$, $\mathbf{x}' = P(\mathbf{x}) \in S_{\beta\alpha}$, $\beta \in B_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \dots, N$. Тут $\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ — коефіцієнти контактного теплообміну, які можуть залежати від різних факторів. Вважаємо, що ці коефіцієнти є функціями від контактного напруження та фактичної відстані між тілами [10, 11]:

$$\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \rho_{\alpha\beta}(\sigma_{\alpha n}, \varphi_{\alpha\beta}) = \begin{cases} g_1(\sigma_{\alpha n}), \sigma_{\alpha n}(\mathbf{x}) = \sigma_{\beta n}(\mathbf{x}') \leq 0, \varphi_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = 0 \\ g_2(\varphi_{\alpha\beta}), \sigma_{\alpha n}(\mathbf{x}) = \sigma_{\beta n}(\mathbf{x}') = 0, \varphi_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \geq 0 \end{cases}, \quad (12)$$

де $g_1(\sigma_{\alpha n})$ і $g_2(\varphi_{\alpha\beta})$ — незростаючі функції, такі, що $g_1(0) = g_2(0)$ [10, 11].

Зазначимо, що задача (1)-(4), (6)-(11) є нелінійною зв'язаною контактною задачею термопружності, оскільки істинні зони контакту наперед невідомі та коефіцієнти контактного теплообміну залежать від механічних контактних параметрів.

2. Варіаційні формулювання

Спершу наведемо варіаційне формулювання цієї задачі у вигляді системи зв'язаних варіаційного рівняння та варіаційної нерівності, запропоноване у роботі [11]. Далі, використовуючи метод штрафу, здійснимо альтернативне варіаційне формулювання у вигляді системи зв'язаних лінійного і нелінійного варіаційних рівнянь.

Для кожної з областей Ω_α розглянемо простори Соболева $V_\alpha = [H^1(\Omega_\alpha)]^3$, елементами яких є узагальнені вектори переміщень, та уведемо в них замкнуті підпростори $V_\alpha^0 = \{\mathbf{u}_\alpha \in V_\alpha : \mathbf{u}_\alpha = 0 \text{ на } \Gamma_\alpha^u\}$ зі скалярним добутком $(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha)_{V_\alpha^0} =$

$$= \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_\alpha} \left(u_{\alpha i} v_{\alpha i} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_{\alpha i}}{\partial x_j} \frac{\partial v_{\alpha i}}{\partial x_j} \right) d\Omega \text{ і нормою } \|\mathbf{u}_\alpha\|_{V_\alpha^0} = \sqrt{(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{u}_\alpha)_{V_\alpha^0}}. \text{ Крім цього, роз-}$$

глянемо простори Соболева $V_\alpha^T = H^1(\Omega_\alpha)$ узагальнених температур зі скалярним

$$\text{добутком } (T_\alpha, W_\alpha)_{V_\alpha^T} = \int_{\Omega_\alpha} \left(T_\alpha W_\alpha + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_\alpha}{\partial x_j} \frac{\partial W_\alpha}{\partial x_j} \right) d\Omega \text{ і нормою } \|T_\alpha\|_{V_\alpha^T} = \sqrt{(T_\alpha, T_\alpha)_{V_\alpha^T}}.$$

Значення елементів просторів V_α , V_α^0 і V_α^T на частинах межі області Ω_α будемо розуміти у сенсі слідів [25] та для простоти позначатимемо їх тими ж символами.

Розглянемо простори $V_0 = V_1^0 \times \dots \times V_N^0 = \{\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N)^T : \mathbf{u}_\alpha \in V_\alpha^0, \alpha = 1, \dots, N\}$

і $V_T = V_1^T \times \dots \times V_N^T = \{\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_N)^T : T_\alpha \in V_\alpha^T, \alpha = 1, \dots, N\}$, які є прямими добутками

просторів V_α^0 і V_α^T відповідно. У просторах V_0 і V_T означимо скалярні

добутки і норми: $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{V_0} = \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha)_{V_\alpha^0}$, $\|\mathbf{u}\|_{V_0} = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})_{V_0}}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0$,

$(\mathbf{T}, \mathbf{W})_{V_T} = \sum_{\alpha=1}^N (T_\alpha, W_\alpha)_{V_\alpha^T}$, $\|\mathbf{T}\|_{V_T} = \sqrt{(\mathbf{T}, \mathbf{T})_{V_T}}$, $\mathbf{T}, \mathbf{W} \in V_T$. Також введемо у V_0

опуклу замкнуту множину кінематично допустимих переміщень:

$$U_0 = \left\{ \mathbf{u} \in V_0 : u_{\alpha n} + u_{\beta n} \leq d_{\alpha\beta} \text{ на } S_{\alpha\beta}, \{\alpha, \beta\} \in Q \right\}, \quad (13)$$

де $Q = \{\{\alpha, \beta\} : \alpha \in \{1, 2, \dots, N\}, \beta \in B_\alpha\}$ — множина всеможливих неупорядкованих пар індексів тіл, що контактують між собою, $u_{\alpha n} = \mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha \in H_{00}^{1/2}(\Xi_\alpha)$, $d_{\alpha\beta} \in H_{00}^{1/2}(\Xi_\alpha)$, $\Xi_\alpha = \Gamma_\alpha \setminus \Gamma_\alpha^u$.

У просторі V_0 визначимо білінійну форму $A(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, таку що $A(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ відповідає сумарній енергії пружної деформації тіл:

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{\alpha=1}^N a_\alpha(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha), \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0, \quad a_\alpha(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha) = \int_{\Omega_\alpha} \sum_{i,j,k,l=1}^3 C_{\alpha ijkl} \varepsilon_{\alpha ij}(\mathbf{u}_\alpha) \varepsilon_{\alpha kl}(\mathbf{v}_\alpha) d\Omega, \quad (14)$$

та лінійну форму $L(\mathbf{v})$, яка дорівнює роботі заданих зовнішніх сил:

$$L(\mathbf{v}) = \sum_{\alpha=1}^N l_\alpha(\mathbf{v}_\alpha), \quad \mathbf{v} \in V_0, \quad l_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) = \int_{\Omega_\alpha} \mathbf{f}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha d\Omega + \int_{\Gamma_\alpha^\sigma} \mathbf{p}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha dS, \quad (15)$$

де $\mathbf{f}_\alpha \in [L_2(\Omega_\alpha)]^3$, $\mathbf{p}_\alpha \in [L_2(\Gamma_\alpha^\sigma)]^3$, $\alpha = 1, 2, \dots, N$.

У просторі V_T уведемо білінійні форми

$$B(\mathbf{T}, \mathbf{W}) = \sum_{\alpha=1}^N b_\alpha(T_\alpha, W_\alpha), \quad \mathbf{T}, \mathbf{W} \in V_T, \quad b_\alpha(T_\alpha, W_\alpha) = \int_{\Omega_\alpha} \sum_{i,j=1}^3 \lambda_{\alpha ij} \frac{\partial T_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial W_\alpha}{\partial x_j} d\Omega, \quad (16)$$

$$K(\mathbf{T}, \mathbf{W}) = \sum_{\alpha=1}^N K_\alpha(T_\alpha, W_\alpha), \quad \mathbf{T}, \mathbf{W} \in V_T, \quad K_\alpha(T_\alpha, W_\alpha) = \int_{\Gamma_\alpha^t} \rho_\alpha^c T_\alpha W_\alpha dS, \quad (17)$$

а також лінійну форму

$$Y(\mathbf{W}) = \sum_{\alpha=1}^N Y_\alpha(W_\alpha), \quad \mathbf{W} \in V_T, \quad Y_\alpha(W_\alpha) = \int_{\Gamma_\alpha^t} \rho_\alpha^c T_\alpha^c W_\alpha dS, \quad W_\alpha \in V_\alpha^T. \quad (18)$$

Крім цього, розглянемо наступні функціонали, які діють з просторів $V_T \times V_0$ та $V_0 \times V_T \times V_T$ відповідно:

$$M(\mathbf{T}, \mathbf{v}) = \sum_{\alpha=1}^N M_\alpha(T_\alpha, \mathbf{v}_\alpha), \quad \mathbf{T} \in V_T, \quad \mathbf{v} \in V_0, \quad (19)$$

$$M_\alpha(T_\alpha, \mathbf{v}_\alpha) = - \int_{\Omega_\alpha} \sum_{i,j,k,l=1}^3 C_{\alpha ijkl} \tilde{\beta}_{\alpha ij}(T_\alpha - T_{0\alpha}) \varepsilon_{\alpha kl}(\mathbf{v}_\alpha) d\Omega, \quad T_\alpha \in V_\alpha^T, \quad \mathbf{v}_\alpha \in V_\alpha^0,$$

$$\tilde{J}_T(\mathbf{u}, \mathbf{T}, \mathbf{W}) = \sum_{\{\alpha, \beta\} \in Q} \int_{S_{\alpha\beta}} \rho_{\alpha\beta}(\sigma_{\alpha n}, \varphi_{\alpha\beta})(T_\alpha - T_\beta)(W_\alpha - W_\beta) dS, \quad \mathbf{u} \in V_0, \quad \mathbf{T}, \mathbf{W} \in V_T. \quad (20)$$

Зазначимо, що функціонал $M(\mathbf{T}, \mathbf{v})$ — лінійний по \mathbf{T} і по \mathbf{v} , а функціонал $\tilde{J}_T(\mathbf{u}, \mathbf{T}, \mathbf{W})$ — лінійний по \mathbf{T} і по \mathbf{W} , однак нелінійний по \mathbf{u} .

Лема 1. Нехай поверхні $\Gamma_\alpha = \partial\Omega_\alpha$, $\alpha=1,2,\dots,N$, тіл є ліпшицевими, $\Gamma_\alpha^u \neq \emptyset$, $\mathbf{f}_\alpha \in [L_2(\Omega_\alpha)]^3$, $\mathbf{p}_\alpha \in [L_2(\Gamma_\alpha^\sigma)]^3$, $T_{0\alpha} \in V_T$, $C_{\alpha ijkl}$, $\tilde{\beta}_{\alpha ij} \in L_\infty(\Omega_\alpha)$, функції $\tilde{\beta}_{\alpha ij}(\mathbf{x})$ — обмежені та виконується умова (5). Тоді білінійна форма $A(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ — симетрична, неперервна та коерцитивна у просторі V_0 , лінійна форма $L(\mathbf{v})$ — неперервна у V_0 , а функціонал $M(\mathbf{T}, \mathbf{v})$ — неперервний за \mathbf{v} .

На основі роботи [11] сформулюємо таке твердження.

Теорема 1. [11] Вихідна термодинамічна задача (1)-(4), (6)-(11) еквівалентна у слабкому розумінні варіаційній системі, що складається зі зв'язаних варіаційного рівняння та варіаційної нерівності:

Знайти $(\mathbf{u}, \mathbf{T})^T \in U_0 \times V_T$ таке, що

$$\begin{cases} B(\mathbf{T}, \mathbf{W}) + K(\mathbf{T}, \mathbf{W}) + \tilde{J}_T(\mathbf{u}, \mathbf{T}, \mathbf{W}) - Y(\mathbf{W}) = 0, \quad \forall \mathbf{W} \in V_T \\ A(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + M(\mathbf{T}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) - L(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in U_0 \end{cases} \quad (21)$$

Для зведення варіаційної системи (21) до розв'язування системи зв'язаних лінійного і нелінійного варіаційних рівнянь, застосуємо метод штрафу [23, 25].

Для цього розглянемо варіаційну нерівність, що входить у систему (21), за деякого фіксованого значення $\mathbf{T} = \tilde{\mathbf{T}} \in V_T$:

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + M(\tilde{\mathbf{T}}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) - L(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in U_0, \quad \mathbf{u} \in U_0. \quad (22)$$

Застосовуючи результати праць [24, 26], можна показати, що якщо виконуються умови *леми 1* та $d_{\alpha\beta} \in H_{00}^{1/2}(\Xi_\alpha)$, то задача знаходження елемента $\mathbf{u} \in U_0$, такого що виконується нерівність (22) для будь-якого $\mathbf{v} \in U_0$, має єдиний розв'язок та її розв'язання еквівалентне розв'язанню задачі мінімізації квадратичного функціонала на множині U_0 :

$$F(\mathbf{u}) = A(\mathbf{u}, \mathbf{u})/2 + M(\tilde{\mathbf{T}}, \mathbf{u}) - L(\mathbf{u}) \rightarrow \min_{\mathbf{u} \in U_0}. \quad (23)$$

Зведемо задачу мінімізації (23) на опуклій замкнутій множині U_0 до задачі безумовної мінімізації у вихідному просторі V_0 .

Уведемо штраф за порушення умов непроникнення (9) у такій формі:

$$J_\theta(\mathbf{u}) = \frac{1}{2\theta} \sum_{\{\alpha,\beta\} \in \mathcal{Q}} \int_{S_{\alpha\beta}} \left[(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n} - u_{\beta n})^- \right]^2 dS \geq 0, \quad \mathbf{u} \in V_0, \quad (24)$$

де $\theta > 0$ — параметр штрафу, $y^- = \min\{0, y\}$, та розглянемо задачу мінімізації функціонала зі штрафом у просторі V_0 :

$$F_\theta(\mathbf{u}) = F(\mathbf{u}) + J_\theta(\mathbf{u}) = A(\mathbf{u}, \mathbf{u})/2 + M(\tilde{\mathbf{T}}, \mathbf{u}) - L(\mathbf{u}) + J_\theta(\mathbf{u}) \rightarrow \min_{\mathbf{u} \in V_0}. \quad (25)$$

Штрафний доданок $J_\theta(\mathbf{u})$ — невід'ємний та один раз диференційовний за Гато:

$$J'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\frac{1}{\theta} \sum_{\{\alpha, \beta\} \in Q} \int_{S_{\alpha\beta}} (d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n} - u_{\beta n})^- (v_{\alpha n} + v_{\beta n}) dS, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0. \quad (26)$$

Тут величини $\sigma_{\alpha\beta n} = \sigma_{\alpha n} = \sigma_{\beta n} = (d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n} - u_{\beta n})^- / \theta$ мають сенс нормальних контактних напружень. Диференціал Гато $J'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ — лінійний за \mathbf{v} та нелінійний за \mathbf{u} .

Лема 2. [14, 15] Нехай поверхні $S_{\alpha\beta}$ є ліпшицевими та $d_{\alpha\beta} \in H_{00}^{1/2}(\Xi_\alpha)$. Тоді функціонал $J'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ володіє властивостями:

$$(\forall \mathbf{u} \in V_0)(\exists R_J > 0)(\forall \mathbf{v} \in V_0) \left\{ |J'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq R_J \|\mathbf{v}\|_{V_0} \right\}, \quad (27)$$

$$(\exists D_J > 0)(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V_0) \left\{ |J'_\theta(\mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{v}) - J'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq D_J \|\mathbf{v}\|_{V_0} \|\mathbf{w}\|_{V_0} \right\}, \quad (28)$$

$$(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0) \left\{ J'_\theta(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{v}) - J'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0 \right\}. \quad (29)$$

На основі робіт [14, 15] доведено таку теорему.

Теорема 2. Нехай виконуються умови лемми 1 і лемми 2. Тоді задача (25) має єдиний розв'язок та її розв'язання еквівалентне розв'язанню в просторі V_0 нелінійного по \mathbf{u} варіаційного рівняння:

$$F'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + M(\tilde{\mathbf{T}}, \mathbf{v}) + J'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V_0, \quad \mathbf{u} \in V_0. \quad (30)$$

Крім цього, якщо $\bar{\mathbf{u}}_\theta \in V_0$ — розв'язок задачі (25) (варіаційного рівняння (30)) для $\theta > 0$, а $\bar{\mathbf{u}} \in U_0$ — розв'язок задачі (23) (варіаційної нерівності (22)), то $\bar{\mathbf{u}}_\theta$ збігається сильно в просторі V_0 до $\bar{\mathbf{u}}$ при $\theta \rightarrow 0$, тобто $\|\bar{\mathbf{u}}_\theta - \bar{\mathbf{u}}\|_{V_0} \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} 0$.

Отже, застосувавши метод штрафу, варіаційну нерівність у системі (21) можна наближено замінити нелінійним по \mathbf{u} варіаційним рівнянням, залежним від параметра штрафу $\theta > 0$. У результаті отримаємо наступну варіаційну задачу:

Знайти $(\mathbf{u}, \mathbf{T})^\top \in V_0 \times V_T$ таке, що

$$\begin{cases} B(\mathbf{T}, \mathbf{W}) + K(\mathbf{T}, \mathbf{W}) + \tilde{J}_T(\mathbf{u}, \mathbf{T}, \mathbf{W}) - Y(\mathbf{W}) = 0, \quad \forall \mathbf{W} \in V_T \\ A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + M(\mathbf{T}, \mathbf{v}) + J'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in V_0 \end{cases}. \quad (31)$$

Таким чином, вихідну термодинамічну задачу (1)-(4), (6)-(11) зведено до розв'язування системи (31), що складається зі зв'язаних лінійного і нелінійного варіаційних рівнянь.

3. Алгоритми декомпозиції області

Застосуємо до розв'язування варіаційної системи (31), яка відповідає контактній задачі (1)-(4), (6)-(11), наступний неявний нестационарний ітераційний метод з параметрами:

$$\tilde{G}^k(\mathbf{T}^{k+1}, \mathbf{W}) = \tilde{G}^k(\mathbf{T}^k, \mathbf{W}) - \omega^k \left[B(\mathbf{T}^k, \mathbf{W}) + K(\mathbf{T}^k, \mathbf{W}) + \tilde{J}_T(\mathbf{u}^k, \mathbf{T}^k, \mathbf{W}) - Y(\mathbf{W}) \right], \quad (32)$$

$$G^k(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v}) = G^k(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) - \gamma^k \left[A(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) + M(\mathbf{T}^k, \mathbf{v}) + J'_\theta(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v}) \right], \quad k=0,1,\dots, \quad (33)$$

де $\tilde{G}^k : V_T \times V_T \rightarrow \mathbb{R}$, $G^k : V_0 \times V_0 \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,\dots\}$, — деякі білінійні форми, задані відповідно у просторах V_T і V_0 , $\omega^k, \gamma^k > 0$, $k=0,1,\dots$, — ітераційні параметри, $\mathbf{u}^k \in V_0$, $\mathbf{T}^k \in V_T$, $k=1,2,\dots$, — k -ті наближення до точного розв'язку системи (31), а $\mathbf{u}^0 \in V_0$, $\mathbf{T}^0 \in V_T$ — початкові наближення.

У загальному випадку ітераційний метод (32), (33), застосований до розв'язування варіаційної системи (31), не приводить до декомпозиції задачі за підобластями. Тому опишемо такі варіанти цього методу, які на кожному ітераційному кроці реалізують таку декомпозицію, тобто які зводять розв'язування нелінійної варіаційної системи (31) у всій області Ω до розв'язування послідовності лінійних варіаційних рівнянь в окремих тілах Ω_α . Декомпозиції можна досягти завдяки певному вибору білінійних форм \tilde{G}^k і G^k в ітераційному процесі (32), (33).

Виберемо білінійні форми \tilde{G}^k і G^k у методі (32), (33) так:

$$\tilde{G}^k(\mathbf{T}, \mathbf{W}) = B(\mathbf{T}, \mathbf{W}) + K(\mathbf{T}, \mathbf{W}) + \tilde{J}'_T(\mathbf{u}^k, \mathbf{T}^k, \mathbf{T}, \mathbf{W}), \quad \mathbf{T}, \mathbf{W} \in V_T, \quad (34)$$

$$\tilde{J}'_T(\mathbf{u}^k, \mathbf{T}^k, \mathbf{T}, \mathbf{W}) = \tilde{J}_T(\mathbf{u}^k, \mathbf{T}, \mathbf{W}) = \sum_{\{\alpha, \beta\} \in Q} \int_{S_{\alpha\beta}} \rho_{\alpha\beta}^k (T_\alpha - T_\beta) (W_\alpha - W_\beta) dS,$$

$$G^k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \partial^2 J_\theta(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0, \quad (35)$$

$$\partial^2 J_\theta(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{\theta} \sum_{\{\alpha, \beta\} \in Q} \int_{S_{\alpha\beta}} \chi_{\alpha\beta}^k (u_{\alpha n} + u_{\beta n}) (v_{\alpha n} + v_{\beta n}) dS, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0,$$

$$\rho_{\alpha\beta}^k = \rho_{\alpha\beta}(\sigma_{\alpha n}^k, \phi_{\alpha\beta}^k), \quad \chi_{\alpha\beta}^k = - \left[\text{sgn}(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^k - u_{\beta n}^k) \right]^-, \quad \{\alpha, \beta\} \in Q,$$

де $\tilde{J}'_T(\mathbf{u}^k, \mathbf{T}^k, \mathbf{T}, \mathbf{W})$ — диференціал Гато функціонала J_T по другій змінній у точці $(\mathbf{u}^k, \mathbf{T}^k)^\top$ за напрямком $\mathbf{T} \in V_T$, а $\partial^2 J_\theta(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ — другий субдиференціал Гато функціонала J_θ у точці $\mathbf{u}^k \in V_0$ за напрямками $\mathbf{u} \in V_0$ і $\mathbf{v} \in V_0$.

Ітераційний метод (32), (33) з білінійними формами (34), (35) при $\omega^k = \gamma^k = 1$, $k = 0, 1, \dots$, відповідає неявному напівгладкому методу Ньютона для розв'язування нелінійної варіаційної системи (31). Проте нестационарний ітераційний метод (32), (33), (34), (35) не приводить до декомпозиції задачі за підобластями.

Тепер білінійні форми \tilde{G}^k і G^k у методі (32), (33) виберемо так:

$$\tilde{G}^k(\mathbf{T}, \mathbf{W}) = B(\mathbf{T}, \mathbf{W}) + K(\mathbf{T}, \mathbf{W}) + \tilde{X}^k(\mathbf{u}^k, \mathbf{T}, \mathbf{W}), \quad \mathbf{T}, \mathbf{W} \in V_T, \quad (36)$$

$$G^k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + X^k(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0, \quad (37)$$

де $\tilde{X}^k : V_0 \times V_T \times V_T \rightarrow \mathbb{R}$ і $X^k : V_0 \times V_0 \rightarrow \mathbb{R}$ — наступні функціонали:

$$\begin{aligned} \tilde{X}^k(\mathbf{u}^k, \mathbf{T}, \mathbf{W}) &= \sum_{\{\alpha, \beta\} \in Q} \int_{\tilde{S}_{\alpha\beta}^k} \rho_{\alpha\beta}(\sigma_{\alpha n}^k, \phi_{\alpha\beta}^k) (T_{\alpha n} W_{\alpha n} + T_{\beta n} W_{\beta n}) dS = \\ &= \sum_{\{\alpha, \beta\} \in Q} \int_{S_{\alpha\beta}} \phi_{\alpha\beta}^k \rho_{\alpha\beta}^k (T_{\alpha n} W_{\alpha n} + T_{\beta n} W_{\beta n}) dS, \quad \mathbf{T}, \mathbf{W} \in V_T, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} X^k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \frac{1}{\theta} \sum_{\{\alpha, \beta\} \in Q} \int_{S_{\alpha\beta}^k} (u_{\alpha n} v_{\alpha n} + u_{\beta n} v_{\beta n}) dS = \\ &= \frac{1}{\theta} \sum_{\{\alpha, \beta\} \in Q} \int_{S_{\alpha\beta}} \psi_{\alpha\beta}^k (u_{\alpha n} v_{\alpha n} + u_{\beta n} v_{\beta n}) dS, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0. \end{aligned} \quad (39)$$

Тут $\tilde{S}_{\alpha\beta}^k, S_{\alpha\beta}^k \subseteq S_{\alpha\beta}$, $k \in \mathbb{N}_0$, — деякі задані підмножини поверхонь $S_{\alpha\beta}$, $\{\alpha, \beta\} \in Q$, а $\phi_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x}) = \{0, \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta} \setminus \tilde{S}_{\alpha\beta}^k\} \vee \{1, \mathbf{x} \in \tilde{S}_{\alpha\beta}^k\}$ і $\psi_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x}) = \{0, \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta} \setminus S_{\alpha\beta}^k\} \vee \{1, \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}^k\}$ — характеристичні функції, які визначають ці підмножини. Зокрема, функції $\phi_{\alpha\beta}^k$ і $\psi_{\alpha\beta}^k$ можна задати, як у напівгладкому методі Ньютона, тобто у вигляді

$$\phi_{\alpha\beta}^k \equiv 1, \quad \psi_{\alpha\beta}^k = \chi_{\alpha\beta}^k = \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{u}^k) = -\left[\text{sgn}(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^k - u_{\beta n}^k) \right]^-, \quad \{\alpha, \beta\} \in Q, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (40)$$

Покажемо, що такий вибір \tilde{G}^k і G^k зумовлює декомпозицію за підобластями. Увівши позначення $\tilde{\mathbf{T}}^{k+1} = [\mathbf{T}^{k+1} - (1 - \omega^k) \mathbf{T}^k] / \omega^k$ і $\tilde{\mathbf{u}}^{k+1} = [\mathbf{u}^{k+1} - (1 - \gamma^k) \mathbf{u}^k] / \gamma^k$, запишемо ітераційний метод (32), (33) з білінійними формами (36), (37) у наступному еквівалентному вигляді:

$$B(\tilde{\mathbf{T}}^{k+1}, \mathbf{W}) + K(\tilde{\mathbf{T}}^{k+1}, \mathbf{W}) + \tilde{X}^k(\mathbf{u}^k, \tilde{\mathbf{T}}^{k+1}, \mathbf{W}) = Y(\mathbf{W}) + \tilde{X}^k(\mathbf{u}^k, \mathbf{T}^k, \mathbf{W}) - \tilde{J}_T(\mathbf{u}^k, \mathbf{T}^k, \mathbf{W}), \quad (41)$$

$$A(\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}, \mathbf{v}) + X^k(\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) + M(\mathbf{T}^k, \mathbf{v}) + X^k(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) - J'_\theta(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}), \quad (42)$$

$$\mathbf{T}^{k+1} = \omega^k \tilde{\mathbf{T}}^{k+1} + (1 - \omega^k) \mathbf{T}^k, \quad (43)$$

$$\mathbf{u}^{k+1} = \gamma^k \tilde{\mathbf{u}}^{k+1} + (1 - \gamma^k) \mathbf{u}^k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (44)$$

Оскільки величини, які є спільними для підобластей, відомі з попередньої ітерації, то кожне з варіаційних рівнянь (41) і (42) розпадається на N незалежних варіаційних рівнянь в тілах Ω_α , і метод (41)-(44) еквівалентний такому ітераційному методу:

$$B_\alpha(\tilde{T}_\alpha^{k+1}, W_\alpha) + K_\alpha(\tilde{T}_\alpha^{k+1}, W_\alpha) + \sum_{\beta \in B_\alpha} \int_{S_{\alpha\beta}} \phi_{\alpha\beta}^k \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}^k) \tilde{T}_\alpha^{k+1} W_\alpha dS = Y_\alpha(W_\alpha) + \sum_{\beta \in B_\alpha} \int_{S_{\alpha\beta}} \phi_{\alpha\beta}^k \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}^k) T_\alpha^k W_\alpha dS - \sum_{\beta \in B_\alpha} \int_{S_{\alpha\beta}} \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}^k) (T_\alpha^k - T_\beta^k) W_\alpha dS, \quad \alpha = 1, \dots, N, \quad (45)$$

$$a_\alpha(\tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1}, \mathbf{v}_\alpha) + \frac{1}{\theta} \sum_{\beta \in B_\alpha} \int_{S_{\alpha\beta}} \psi_{\alpha\beta}^k \tilde{u}_{\alpha n}^{k+1} v_{\alpha n} dS = l_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) + M_\alpha(T_\alpha^k, \mathbf{v}_\alpha) + \frac{1}{\theta} \sum_{\beta \in B_\alpha} \int_{S_{\alpha\beta}} \psi_{\alpha\beta}^k u_{\alpha n}^k v_{\alpha n} dS + \frac{1}{\theta} \sum_{\beta \in B_\alpha} \int_{S_{\alpha\beta}} (d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^k - u_{\beta n}^k)^- v_{\alpha n} dS, \quad \alpha = 1, \dots, N, \quad (46)$$

$$T_\alpha^{k+1} = \omega^k \tilde{T}_\alpha^{k+1} + (1 - \omega^k) T_\alpha^k, \quad \alpha = 1, \dots, N, \quad (47)$$

$$\mathbf{u}_\alpha^{k+1} = \gamma^k \tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1} + (1 - \gamma^k) \mathbf{u}_\alpha^k, \quad \alpha = 1, \dots, N, \quad k = 0, 1, \dots \quad (48)$$

На кожній ітерації k методу (45)-(48) необхідно паралельно розв'язувати N незалежних лінійних варіаційних рівнянь (45) в окремих тілах Ω_α , що відповідають задачам теплопровідності з крайовими умовами Робіна (Ньютона) на зонах можливого контакту

$$\sum_{i,j=1}^3 \lambda_{\alpha ij} n_{\alpha i} \partial \tilde{T}_\alpha^{k+1} / \partial x_j + \phi_{\alpha\beta}^k \rho_{\alpha\beta}^k \tilde{T}_\alpha^{k+1} = \rho_{\alpha\beta}^k (T_\beta^k - T_\alpha^k) + \phi_{\alpha\beta}^k \rho_{\alpha\beta}^k T_\alpha^k, \quad \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta},$$

а також N незалежних лінійних варіаційних рівнянь (46) в тілах Ω_α , що відповідають задачам теорії пружності з наступними умовами Робіна на поверхнях $S_{\alpha\beta}$:

$$\tilde{\sigma}_{\alpha\beta n}^{k+1} + \psi_{\alpha\beta}^k \tilde{u}_{\alpha n}^{k+1} / \theta = (d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^k - u_{\beta n}^k)^- / \theta + \psi_{\alpha\beta}^k u_{\alpha n}^k / \theta, \quad \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}$$

та додатковими об'ємними силами. Тому ітераційний метод (45)-(48) належить до паралельних схем Робіна декомпозиції області [13-22].

Вибираючи різні характеристичні функції $\phi_{\alpha\beta}^k = \phi_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x})$, $\psi_{\alpha\beta}^k = \psi_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x})$, $\{\alpha, \beta\} \in Q$, $k = 0, 1, \dots$, тобто різні підмножини $\tilde{S}_{\alpha\beta}^k, S_{\alpha\beta}^k \subseteq S_{\alpha\beta}$, можна отримати різні варіанти методу декомпозиції області (45)-(48). Так, покладаючи $\phi_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x}) \equiv 0$, $\psi_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x}) \equiv 0$, тобто $\tilde{S}_{\alpha\beta}^k = S_{\alpha\beta}^k = \emptyset$, $\forall \alpha, \beta, \forall k$, отримаємо *паралельну схему Неймана*. Інший граничний випадок відповідає $\phi_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x}) \equiv 1$, $\psi_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x}) \equiv 1$, тобто $\tilde{S}_{\alpha\beta}^k = S_{\alpha\beta}^k = S_{\alpha\beta}$, $\forall \alpha, \beta, \forall k$. Однак, числові експерименти, проведені нами, показали, що найефективніше ці функції вибирати у вигляді (40). Тоді алгоритм декомпозиції області (45)-(48) можна вважати певною модифікацією напівгладкого методу Ньютон.

У методах декомпозиції області (45)-(48) на кожному ітераційному кроці k усі задачі теплопровідності та усі задачі теорії пружності розв'язуються паралельно та незалежно одна від одної, а потім обчислюються наступні наближення температур і переміщень за формулами (47) і (48) відповідно.

Нами запропоновано й інші алгоритми декомпозиції області, у яких спершу розв'язуються задачі теплопровідності, знаходяться наступні наближення до температур за формулою (47), а вже потім, застосовуюючи ці наближення, розв'язуються задачі теорії пружності, а також алгоритми декомпозиції області у яких задачі теплопровідності розв'язуються після розв'язування задач теорії пружності та обчислення наступних наближень для переміщень. Перші з цих алгоритмів можна отримати, якщо до розв'язування варіаційної системи (31) застосувати ітераційний метод:

$$\tilde{G}^k(\mathbf{T}^{k+1}, \mathbf{W}) = \tilde{G}^k(\mathbf{T}^k, \mathbf{W}) - \omega^k \left[B(\mathbf{T}^k, \mathbf{W}) + K(\mathbf{T}^k, \mathbf{W}) + \tilde{J}_T(\mathbf{u}^k, \mathbf{T}^k, \mathbf{W}) - Y(\mathbf{W}) \right], \quad (49)$$

$$G^k(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v}) = G^k(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) - \gamma^k \left[A(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) + M(\mathbf{T}^{k+1}, \mathbf{v}) + J'_0(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v}) \right], \quad k = 0, 1, \dots, \quad (50)$$

а останні — якщо використовувати такий метод:

$$G^k(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v}) = G^k(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) - \gamma^k \left[A(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) + M(\mathbf{T}^k, \mathbf{v}) + J'_0(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v}) \right], \quad (51)$$

$$\tilde{G}^k(\mathbf{T}^{k+1}, \mathbf{W}) = \tilde{G}^k(\mathbf{T}^k, \mathbf{W}) - \omega^k \left[B(\mathbf{T}^k, \mathbf{W}) + K(\mathbf{T}^k, \mathbf{W}) + \tilde{J}_T(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{T}^k, \mathbf{W}) - Y(\mathbf{W}) \right], \quad k = 0, 1, \dots \quad (52)$$

Вибравши у цих методах білінійні форми \tilde{G}^k і G^k за формулами (34) і (35) та увівши позначення $\tilde{\mathbf{T}}^{k+1}$ і $\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}$, отримаємо, що ітераційний метод (49), (50) з такими білінійними формами буде еквівалентний алгоритму у декомпозиції області:

$$B_\alpha(\tilde{T}_\alpha^{k+1}, W_\alpha) + K_\alpha(\tilde{T}_\alpha^{k+1}, W_\alpha) + \sum_{\beta \in B_\alpha} \int_{S_{\alpha\beta}} \phi_{\alpha\beta}^k \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}^k) \tilde{T}_\alpha^{k+1} W_\alpha dS = Y_\alpha(W_\alpha) + \sum_{\beta \in B_\alpha} \int_{S_{\alpha\beta}} \phi_{\alpha\beta}^k \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}^k) T_\alpha^k W_\alpha dS - \sum_{\beta \in B_\alpha} \int_{S_{\alpha\beta}} \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}^k) (T_\alpha^k - T_\beta^k) W_\alpha dS, \quad \alpha = 1, \dots, N, \quad (53)$$

$$T_\alpha^{k+1} = \omega^k \tilde{T}_\alpha^{k+1} + (1 - \omega^k) T_\alpha^k, \quad \alpha = 1, \dots, N, \quad (54)$$

$$a_{\alpha}(\tilde{\mathbf{u}}_{\alpha}^{k+1}, \mathbf{v}_{\alpha}) + \frac{1}{\theta} \sum_{\beta \in B_{\alpha}} \int_{S_{\alpha\beta}} \Psi_{\alpha\beta}^k \tilde{u}_{\alpha n}^{k+1} v_{\alpha n} dS = l_{\alpha}(\mathbf{v}_{\alpha}) + M_{\alpha}(T_{\alpha}^{k+1}, \mathbf{v}_{\alpha}) +$$

$$+ \frac{1}{\theta} \sum_{\beta \in B_{\alpha}} \int_{S_{\alpha\beta}} \Psi_{\alpha\beta}^k u_{\alpha n}^k v_{\alpha n} dS + \frac{1}{\theta} \sum_{\beta \in B_{\alpha}} \int_{S_{\alpha\beta}} (d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^k - u_{\beta n}^k)^{-} v_{\alpha n} dS, \quad \alpha = 1, \dots, N, \quad (55)$$

$$\mathbf{u}_{\alpha}^{k+1} = \gamma^k \tilde{\mathbf{u}}_{\alpha}^{k+1} + (1 - \gamma^k) \mathbf{u}_{\alpha}^k, \quad \alpha = 1, \dots, N, \quad k = 0, 1, \dots \quad (56)$$

а ітераційний метод (51), (52) з білінійними формами (34) і (35) еквівалентний наступному МДО:

$$a_{\alpha}(\tilde{\mathbf{u}}_{\alpha}^{k+1}, \mathbf{v}_{\alpha}) + \frac{1}{\theta} \sum_{\beta \in B_{\alpha}} \int_{S_{\alpha\beta}} \Psi_{\alpha\beta}^k \tilde{u}_{\alpha n}^{k+1} v_{\alpha n} dS = l_{\alpha}(\mathbf{v}_{\alpha}) + M_{\alpha}(T_{\alpha}^k, \mathbf{v}_{\alpha}) +$$

$$+ \frac{1}{\theta} \sum_{\beta \in B_{\alpha}} \int_{S_{\alpha\beta}} \Psi_{\alpha\beta}^k u_{\alpha n}^k v_{\alpha n} dS + \frac{1}{\theta} \sum_{\beta \in B_{\alpha}} \int_{S_{\alpha\beta}} (d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^k - u_{\beta n}^k)^{-} v_{\alpha n} dS, \quad \alpha = 1, \dots, N, \quad (57)$$

$$\mathbf{u}_{\alpha}^{k+1} = \gamma^k \tilde{\mathbf{u}}_{\alpha}^{k+1} + (1 - \gamma^k) \mathbf{u}_{\alpha}^k, \quad \alpha = 1, \dots, N, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (58)$$

$$B_{\alpha}(\tilde{T}_{\alpha}^{k+1}, W_{\alpha}) + K_{\alpha}(\tilde{T}_{\alpha}^{k+1}, W_{\alpha}) + \sum_{\beta \in B_{\alpha}} \int_{S_{\alpha\beta}} \Phi_{\alpha\beta}^k \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}^{k+1}) \tilde{T}_{\alpha}^{k+1} W_{\alpha} dS = Y_{\alpha}(W_{\alpha}) +$$

$$+ \sum_{\beta \in B_{\alpha}} \int_{S_{\alpha\beta}} \Phi_{\alpha\beta}^k \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}^{k+1}) T_{\alpha}^k W_{\alpha} dS - \sum_{\beta \in B_{\alpha}} \int_{S_{\alpha\beta}} \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}^{k+1}) (T_{\alpha}^k - T_{\beta}^k) W_{\alpha} dS, \quad \alpha = 1, \dots, N, \quad (59)$$

$$T_{\alpha}^{k+1} = \omega^k \tilde{T}_{\alpha}^{k+1} + (1 - \omega^k) T_{\alpha}^k, \quad \alpha = 1, \dots, N. \quad (60)$$

Отже для розв'язування нелінійної термодетальної задачі запропоновано ряд методів декомпозиції області, які відрізняються порядком розв'язування задач теплопровідності і задач теорії пружності. Крайові задачі Робіна теорії пружності і теплопровідності в окремих тілах Ω_{α} можна розв'язувати різними числовими методами, зокрема методом скінченних елементів (МСЕ) або методом граничних елементів (МГЕ). Далі проведемо дослідження числової ефективності різних алгоритмів декомпозиції області для випадку плоских термодетальних задач.

4. Числові дослідження

Розроблено програмне забезпечення, яке реалізує методи декомпозиції області (45)-(48), (53)-(56) і (57)-(60) для задач про термопружний контакт одного, двох і трьох пружних тіл за умов плоскої деформації або плоского напружено-деформованого стану з використанням скінченноелементних апроксимацій на лінійних і квадратичних трикутних елементах.

За допомогою цього програмного забезпечення, алгоритми МДО апробовано для розв'язування двох термодетальних задач: задачі про контакт одного тіла з нагрітою жорсткою основою та задачі про контактну взаємодію двох пружних тіл за наявності квадратичного зазору між ними.

Спершу, для перевірки достовірності числових результатів, отриманих запропонованими алгоритмами декомпозиції області, було проведено числове дослідження задачі про термоконтактну взаємодію вагомого ізотропного пружного тіла Ω_1 з нагрітою жорсткою основою за умов плоского напружено-деформованого стану (рис. 2), яка розглядалася у роботі [10]. Довжина та висота тіла Ω_1 відповідно дорівнюють $l = 1$ м та $h = 1$ м.

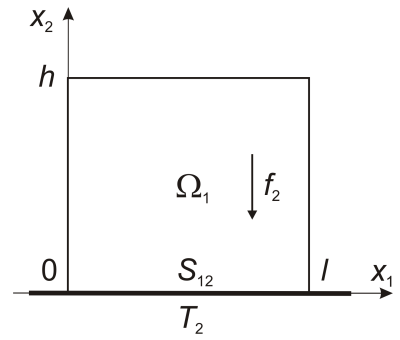


Рис. 2

На кожену точку $\mathbf{x} \in \Omega_1$ діє вектор об'ємних сил $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x})\mathbf{e}_1 + f_2(\mathbf{x})\mathbf{e}_2$, де $f_1(\mathbf{x}) \equiv 0$ Н/м³, $f_2(\mathbf{x}) \equiv$

$\equiv -7800 \cdot 9,81$ Н/м³. Зона можливого контакту рівна $S_{12} = \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2)^T : x_1 \in [0, l], x_2 = 0 \}$,

а відстань між тілом та основою до контакту дорівнює $d_{12}(\mathbf{x}) \equiv 0$ м. Зона конвективного теплообміну $\Gamma_1^t = \Gamma_1 \setminus S_{12}$ є вільною від навантажень. Модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона тіла Ω_1 відповідно дорівнюють $E_1 = 210$ ГПа та $\nu_1 = 0,3$.

Початкова температура тіла рівна $T_{10}(\mathbf{x}) \equiv 0^\circ$ С. Коефіцієнт лінійно розширення, коефіцієнт теплопровідності, коефіцієнт конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем та температура зовнішнього середовища відповідно становлять $\tilde{\beta}_{1L} = 10^{-5}$ 1/°С, $\lambda_1 = 47$ Вт/(м·К), $\rho_1^c = 23$ Вт/(м²·К), $T_1^c = 0^\circ$ С. Коефіцієнт контактного теплообміну з основою визначається за формулою [10]:

$$\rho_{12}(\sigma_{12n}, \varphi_{12}) = \begin{cases} 3 \cdot 10^3 \left(1 + |\sigma_{12n}|^{0,6} / 10^4 \right), & \sigma_{12n} < 0, \varphi_{12} = 0 \\ 3 \cdot 10^3 \left(1 + 10^4 \varphi_{12} \right), & \sigma_{12n} = 0, \varphi_{12} > 0 \end{cases}, \quad (61)$$

де $\varphi_{12}(\mathbf{x}) = d_{12}(\mathbf{x}) - u_{1n}(\mathbf{x})$, а $\sigma_{12n}(\mathbf{x})$ — нормальне контактне напруження. Температура основи рівна T_2 .

Задачу розв'язано за допомогою алгоритмів декомпозиції області (45)-(48), (53)-(56) і (57)-(60). Оскільки друге тіло (основа) є абсолютно жорстким, то на кожній ітерації k цих алгоритмів розв'язуються лише варіаційні рівняння для тіла Ω_1 , тобто при $N = 1$. При цьому вважається, що всюди у цих алгоритмах $u_{2n}^k = 0$, $k = 0, 1, \dots$, а температура $T_2^k = T_2$, $k = 0, 1, \dots$, є заданою. Для розв'язування варіаційних рівнянь теплопровідності та теорії пружності на кожному кроці застосовано МСЕ з 16384 квадратичними тругтними скінченними елементами. Характеристичні функції ψ_{12}^k та ϕ_{12}^k в алгоритмах декомпозиції області задавали за формулою (40). Коефіцієнт штрафу задавали за стрижневою моделлю у вигляді $\theta = ch(1 - \nu_1^2) / E_1$, де c — безрозмірний параметр штрафу. Для зупинки ітераційного процесу застосовували критерій $\|u_{1n}^{k+1} - u_{1n}^k\|_2 / \|u_{1n}^{k+1}\|_2 \leq \varepsilon_u$, де

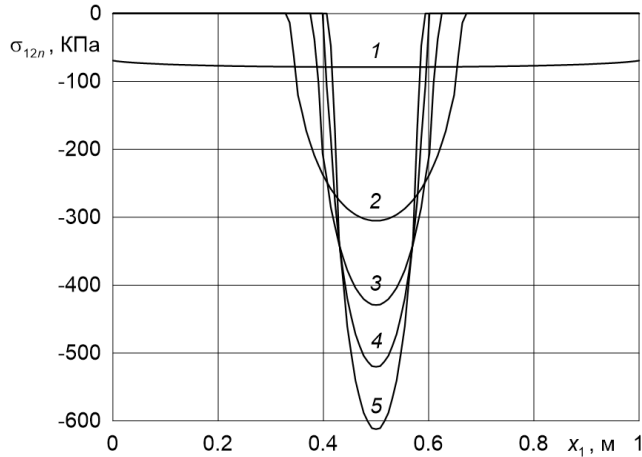


Рис. 3

$\|u_{1n}\|_2 = \sqrt{\sum_j [u_{1n}(x^j)]^2}$ — дискретна норма, $x^j \in S_{12}$ — вузли скінченноелементного розбиття межі S_{12} , а $\varepsilon_u > 0$ — відносна точність для переміщень. Ітераційні параметри γ^k і ω^k , $k \in \mathbb{N}_0$, задавали однаковими на різних ітераціях, тобто $\gamma^k = \gamma > 0$, $\omega^k = \omega > 0$, $k = 0, 1, \dots$. Початкові наближення для переміщення і температури вибирали відповідно у вигляді $u_{1n}^0(\mathbf{x}) \equiv 10^{-8}$ м і $T_1^0(\mathbf{x}) \equiv 10^{-4}$ °С. Обчислення проведено за параметрів $\gamma = \omega = 0,6$, $c = 0,0025$, $\varepsilon_u = 10^{-3}$.

Здійснено порівняння числових результатів, отриманих МДО, з числовими розв'язками, які одержані для цієї задачі у роботі [10] за допомогою ітераційного методу, на кожному кроці якого розв'язуються методом спряжених градієнтів незв'язані варіаційне рівняння і варіаційна нерівність зі застосуванням скінченноелементних апроксимацій на лінійних трикутних елементах.

На рис. 3 наведено графіки розподілів нормального контактного напруження σ_{12n} за різних значень температури жорсткої основи T_2 , отримані МДО (45)-(48). Криві 1-5 на цьому рисунку відповідають результатам для $T_2 = 0$; 2,5; 5; 7,5 та 10 °С. Числові результати, зображені на кривій 1 та кривій 5, повністю узгоджуються з числовими розв'язками, що отримані у праці [10].

Отже, при збільшенні температури T_2 жорсткої основи, відбувається зменшення істинної зони контакту та зменшення мінімуму контактних напружень σ_{12n} , який досягається у центрі ділянки контакту (за $x_1 = 0,5$ м).

Також здійснено порівняння швидкості збіжності різних алгоритмів МДО. У таблиці 1 наведено загальну кількість ітерацій m методів (45)-(48), (53)-(56) і (57)-(60), яку необхідно виконати для досягнення точності $\varepsilon_u = 10^{-3}$ за безрозмірного параметра штрафу $c = 0,01$ для різних значень температури основи T_2 .

Таблиця 1. Кількість ітерацій m , необхідних для досягнення точності $\varepsilon_u = 10^{-3}$

$T_2, \text{ }^\circ\text{C}$	0	2,5	5	7,5	10
m , МДО (45)-(48)	9	13	13	14	13
m , МДО (53)-(56)	9	12	12	13	12
m , МДО (57)-(60)	9	13	13	14	13

Звідси бачимо, що при зростанні температури T_2 , кількість ітерацій m суттєво не збільшується. Крім цього, робимо висновок, що швидкості збіжності усіх трьох алгоритмів є майже однаковими.

Також розглянуто задачу про термомеханічний контакт двох пружних ізотропних тіл Ω_1 і Ω_2 з квадратичним міжконтактним зазором за умов плоскої деформації. Крайові умови та схему контакту для цієї задачі зображено на рис. 4. Обидва тіла мають однакову довжину та однакову висоту, які відповідно дорівнюють $l = 4$ м та $h = 1$ м. Осадка верхнього тіла рівна $\Delta = 1,366r_0$, де $r_0 = 10^{-3}$ м. Масові сили — відсутні. Ділянка можливого контакту дорівнює $S_{12} = \{\mathbf{x}: x_1 \in [0, l/2], x_2 = h\}$. Зазор між тілами до деформації описується функцією $d_{12}(\mathbf{x}) = r_0 x_1^2$. Зони конвективного теплообміну зі зовнішнім середовищем мають вигляд $\Gamma_1^t = \Gamma_1 \setminus S_{12}$, $\Gamma_2^t = \Gamma_2 \setminus S_{21}$. Коефіцієнти конвективного теплообміну дорівнюють $\rho_\alpha^c(\mathbf{x}) \equiv 23 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$, $\mathbf{x} \in \Gamma_\alpha^t \setminus \Gamma_\alpha^0$, $\rho_\alpha^c(\mathbf{x}) \equiv 0 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$, $\mathbf{x} \in \Gamma_\alpha^0$, $\alpha = 1, 2$, де $\Gamma_1^0 = \{\mathbf{x}: x_1 = 0, x_2 \in (0, h)\}$, $\Gamma_2^0 = \{\mathbf{x}: x_1 = 0, x_2 \in (h, 2h)\}$. Температура зовнішнього середовища на нижній ділянці $\Gamma_1^T = \{\mathbf{x}: x_1 \in [0, l], x_2 = 0\} \subset \Gamma_1^t$ частини Γ_1^t межі нижнього тіла дорівнює $T_1^c(\mathbf{x}) \equiv T_1^p$, $\mathbf{x} \in \Gamma_1^T$, а на решті частини цієї межі ця температура рівна нулю: $T_1^c(\mathbf{x}) \equiv 0 \text{ }^\circ\text{C}$, $\mathbf{x} \in \Gamma_1^t \setminus \Gamma_1^T$. Температура зовнішнього середовища на всій частині Γ_2^t межі верхнього тіла є однаковою і рівна нулю: $T_2^c(\mathbf{x}) \equiv 0 \text{ }^\circ\text{C}$, $\mathbf{x} \in \Gamma_2^t$. Модулі Юнга, коефіцієнти Пуассона, коефіцієнти теплопровідності та коефіцієнти лінійного розширення обох тіл є однаковими та відповідно дорівнюють $E_1 = E_2 = 210 \text{ ГПа}$, $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 47 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $\tilde{\beta}_{1L} = \tilde{\beta}_{2L} = 10^{-5} \text{ 1}/^\circ\text{C}$. Початкові температури тіл рівні нулю: $T_{\alpha 0}(\mathbf{x}) \equiv 0 \text{ }^\circ\text{C}$, $\alpha = 1, 2$.

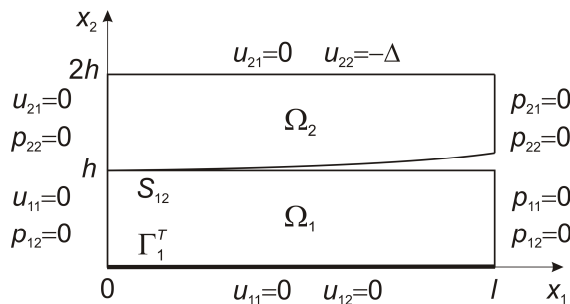


Рис. 4

Коефіцієнт контактного теплообміну між тілами, як і для попередньої задачі, вибирали за формулою (61), де $\varphi_{12}(\mathbf{x}) = d_{12}(\mathbf{x}) - u_{1n}(\mathbf{x}) - u_{2n}(\mathbf{x}') —$ фактична відстань між тілами, а $\sigma_{12n}(\mathbf{x}) —$ нормальне контактне напруження.

Задачу розв'язано методами декомпозиції області (45)-(48), (53)-(56) і (57)-(60) при $N = 2$. Для розв'язування на кожній ітерації варіаційних рівнянь теплопровідності та теорії пружності для кожного з тіл застосовано МСЕ з 4096 квадратичними трикутними скінченними елементами. Характеристичні функції ψ_{12}^k та ϕ_{12}^k вибирали у вигляді (40). Коефіцієнт штрафу визначали за допомогою стрижневої моделі для двох тіл у вигляді $\theta = ch(1/E_1 + 1/E_2)$ [13], де $c —$ безрозмірний параметр штрафу. Для завершення ітераційного процесу використовували такий критерій:

$$\|u_{\alpha n}^{k+1} - u_{\alpha n}^k\|_2 / \|u_{\alpha n}^{k+1}\|_2 \leq \varepsilon_u, \quad \alpha = 1, 2.$$

Початкові наближення для переміщень вибирали на основі стрижневої моделі за формулами [13]:

$$u_{1n}^0(\mathbf{x}) = \frac{ch[d_{12}(\mathbf{x}) - \Delta]^-}{(1+c)\theta E_1}, \quad u_{2n}^0(\mathbf{x}) = \frac{ch[d_{12}(\mathbf{x}) - \Delta]^-}{(1+c)\theta E_2} + \Delta,$$

а початкові наближення для температур задавали сталими: $T_\alpha^0(\mathbf{x}) \equiv 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}$, $\alpha = 1, 2$. Обчислення проведено за ітераційних параметрів $\gamma^k = \omega^k = 0,7$, $k = 0, 1, \dots$, безрозмірного параметра штрафу $c = 0,03$ та відносної точності для переміщень $\varepsilon_u = 10^{-3}$.

На рис. 5 зображено розподіли нормального контактного напруження $\sigma_{12n}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in S_{12}$, отримані алгоритмом декомпозиції області (45)-(48) за різних значень температури T_1^P , яка діє на нижню грань тіла Ω_1 . Криві 1-5 на цьому рисунку відповідають числовим результатам при $T_1^P = 0; 25; 50; 75; 100 \text{ }^\circ\text{C}$.

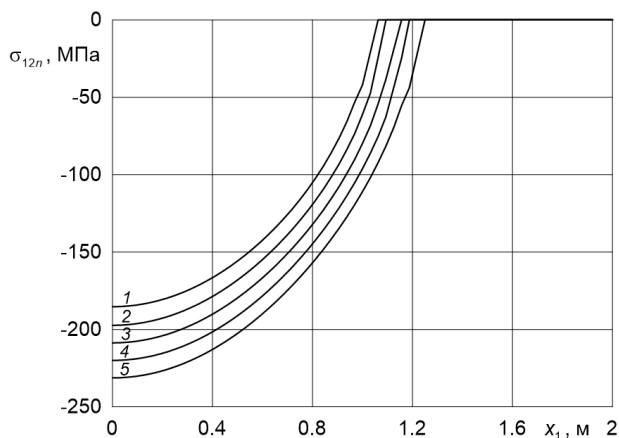


Рис. 5

Звідси бачимо, що при збільшенні значень температури T_1^p відбувається збільшення істинної ділянки контакту та зменшення значень контактних напружень σ_{12n} .

У таблиці 2 наведено загальну кількість ітерацій m алгоритмів декомпозиції області (45)-(48), (53)-(56), (57)-(60) за різних значень температури T_1^p , яку необхідно здійснити для досягнення точності $\varepsilon_u = 10^{-3}$ за параметра штрафу $c = 0,05$.

Таблиця 2. Кількість ітерацій m , необхідних для досягнення точності $\varepsilon_u = 10^{-3}$

$T_1^p, ^\circ\text{C}$	0	10	25	50	75	100
m , МДО (45)-(48)	5	22	36	49	58	64
m , МДО (53)-(56)	5	22	35	49	57	64
m , МДО (57)-(60)	5	22	36	50	58	64

Отже, при збільшенні значень температури T_1^p нижньої грані нижнього тіла, кількість ітерацій методів декомпозиції області зростає. При цьому швидкість збіжності усіх трьох алгоритмів є майже однаковою.

Висновки. Використовуючи метод штрафу, одержано слабе формулювання задачі про односторонній механічний і неідеальний тепловий контакт багатьох пружних тіл у вигляді системи зв'язаних лінійного і нелінійного варіаційних рівнянь у гільбертовому просторі.

Для розв'язування отриманої системи розроблено ряд ітераційних алгоритмів декомпозиції області типу Робіна, на кожній ітерації яких необхідно паралельно або послідовно розв'язувати два незв'язані лінійні варіаційні рівняння для кожного з тіл, одне з яких відповідає задачі теплопровідності з умовами Ньютонна на поверхнях можливого контакту, а інше — задачі теорії пружності з умовами Робіна на цих поверхнях та додатковими об'ємними силами у тілах. Ці алгоритми відрізняються один від одного за порядком розв'язування задач теплопровідності та теорії пружності.

Здійснено числову реалізацію запропонованих методів для плоских термоконтактних задач зі застосуванням МСЕ з лінійними і квадратичними трикутними елементами. Досліджено задачу про термомеханічний контакт пружного скінченного тіла з нагрітою жорсткою основою за умов плоского напруженого стану та задачу про термоконтактну взаємодію двох пружних тіл з квадратичним зазором за умов плоскої деформації. Для першої задачі здійснено порівняння числових результатів із розв'язками, одержаними іншим числовим методом у роботі [10]. Для обох задач проаналізовано розподіли нормальних контактних напружень. Досліджено швидкість збіжності різних алгоритмів МДО. Для другої задачі показано, що збільшення значень заданої на межі температури призводить до зростання загальної кількості ітерацій, необхідних для завершення ітераційного процесу. Для першої та другої задач встановлено, що швидкості збіжності паралельного та двох послідовних (відносно порядку розв'язування задач теплопровідності та теорії пружності) алгоритмів декомпозиції області суттєво не відрізняються.

Література

- [1] *Johansson L., Klarbring A.* Thermoelastic frictional contact problems: Modelling, finite element approximation and numerical realization // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* — 1993. — Vol. 105. — P. 181-210.
- [2] *Zavarise G., Wriggers P., Schrefler B. A.* On augmented Lagrangian algorithms for thermomechanical contact problems with friction // *Int. J. Numer. Methods Engrg.* — 1995. — Vol. 38. — P. 2929-2949.
- [3] *Oancea V. G., Laursen T. A.* A finite element formulation of thermomechanical rate-dependent frictional sliding // *Int. J. Numer. Methods Engrg.* — 1997. — Vol. 40. — P. 4275-4311.
- [4] *Xing H. L., Makinouchi A.* Three dimensional finite element modeling of thermomechanical frictional contact between finite deformation bodies using R-minimum strategy // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* — 2002. — Vol. 191. — P. 4193-4214.
- [5] *Скородинський І. С., Лазько В. А.* Квазістатична термофрикційна задача при наявності узагальненого лінійно-дисипативного механізму міжфазного проковзування // *Вісн. держ. ун-ту «Львів. політехніка».* Сер. Прикл. математика. — 1996. — № 299. — С. 144-154.
- [6] *Скородинський І. С.* Ітераційні алгоритми для розв'язування квазістатичної однієї термофрикційної задачі // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* — 2000. — Т. 36, № 6. — С. 65-71.
- [7] *Мартиняк Р. М., Чумак К. А.* Термопружний контакт півпросторів, що мають однакові термічні дистортивності, за наявності теплопроникного міжповерхневого просвіту // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* — 2008. — Т. 51, № 3. — С. 163-175.
- [8] *Мартуняк Р., Чумак К.* Effect of heat-conductive filler of interface gap on thermoelastic contact of solids // *Int. J. Heat Mass Transfer.* — 2012. — Vol. 55, No. 4. — P. 1170-1178.
- [9] *Chumak K. A., Martynyak R. M.* Thermal rectification between two thermoelastic solids with a periodic array of rough zones at the interface // *Int. J. Heat Mass Transfer.* — 2012. — Vol. 55, No. 21-22. — P. 5603-5608.
- [10] *Бобилёв А. А. (мл.).* Задача о контактном взаимодействии весомого упругого тела с односторонним жестким нагретым основанием // *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій.* — 2010. — Вип. 14. — С. 64-71.
- [11] *Бобилёв А. А. (мл.).* Задача о сжатии упругой двухслойной полосы жесткими нагретыми выпуклыми штампами // *Вісн. Дніпропетр. ун-ту.* Сер. Механіка. — 2010. — Вип. 14, т. 2. — С. 15-22.
- [12] *Бобильов О. О. (мол.), Лобода В. В.* Осесиметрична контактна задача термопружності для тришарового пружного циліндра з жорстким нерівномірно нагрітим сердечником // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* — 2013. — Т. 56, № 4. — С. 149-157.
- [13] *Прокопишин І. І.* Паралельні схеми методу декомпозиції області для контактних задач теорії пружності без тертя // *Вісник Львівського університету.* Сер. прикл. математика та інформатика. — 2008. — Вип. 14. — С. 123-133.
- [14] *Прокопишин І. І.* Схеми декомпозиції області на основі методу штрафу для задач контакту пружних тіл: дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фіз.-мат. наук: спеціальність 01.05.02 — «Мат. моделювання та обчисл. методи». — Львів, 2010. — 163 с.
- [15] *Dyyak I. I., Prokopyshyn I. I., Prokopyshyn I. A.* Penalty Robin-Robin domain decomposition methods for unilateral multibody contact problems of elasticity: Convergence results // *arxiv.org.* — 2012. — <http://arxiv.org/pdf/1208.6478v1.pdf>. — 32 p.
- [16] *Прокопишин І. І.* Методи декомпозиції області для задач про односторонній контакт нелінійно пружних тіл // *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології.* — 2012. — Вип. 15. — С. 75-87.
- [17] *Прокопишин І. І., Дияк І. І., Мартиняк Р. М.* Числове дослідження задач про контакт трьох пружних тіл методами декомпозиції області // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* — 2013. — Т. 49, № 1. — С. 46-55.
- [18] *Мартиняк Р. М., Прокопишин І. А., Прокопишин І. І.* Контакт пружних тіл за наявності нелінійних вінклерівських поверхневих шарів // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* — 2013. — Т. 56, № 3. — С. 43-56.
- [19] *Penalty Robin-Robin domain decomposition schemes for contact problems of nonlinear elasticity / I. I. Prokopyshyn, I. I. Dyyak, R. M. Martynyak, I. A. Prokopyshyn // Lect. Notes Comput. Sci. Eng.* — 2013. — Vol. 91. — P. 647-654.
- [20] *Прокопишин І. І.* Схеми декомпозиції області на основі методу штрафу для задач про ідеальний контакт пружних тіл // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* — 2014. — Т. 57, № 1. — С. 41-56.

- [21] Domain decomposition methods for problems of unilateral contact between elastic bodies with nonlinear Winkler covers / I. I. Prokopyshyn, I. I. Dyyak, R. M. Martynyak, I. A. Prokopyshyn // Lect. Notes Comput. Sci. Eng. — 2014. — Vol. 98. — P. 739-748.
- [22] Прокопишин І. І. Методи декомпозиції області для задачі про статичну рівновагу системи пружних тіл, з'єднаних через тонкі нелінійні прошарки // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2015. — Вип. 21. — С. 173-185.
- [23] Kikuchi N., Oden J. T. Contact Problem in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods. — Philadelphia: SIAM, 1988. — 489 p.
- [24] Кравчук А. С. Постановка задачи о контакте нескольких деформируемых тел как задачи нелинейного программирования // ПММ. — 1978. — Т. 42, № 3. — С. 467-473.
- [25] Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — Москва: Мир, 1972. — 588 с.
- [26] Кузьменко В. И. О вариационном подходе к теории контактных задач для нелинейно-упругих слоистых тел // ПММ. — 1979. — Т. 43, № 5. — С. 893-901.

Domain decomposition algorithms for problems of thermomechanical contact between several elastic bodies

Ihor Prokopyshyn

We consider a thermoelastic multibody contact problem for finite bodies with unilateral mechanical and imperfect thermal contact conditions. Using a penalty method, we obtain a weak formulation of this problem in the form of a system of linear and nonlinear variational equations in Hilbert space. To solve this variational system, we propose a class of iterative Robin type domain decomposition algorithms. In each iterative step of these algorithms one have to solve two linear variational equations for each of the bodies, which correspond to heat conduction problem with Newton boundary conditions on the possible contact areas and linear elasticity problem with additional volume forces and Robin boundary conditions respectively. The program implementation of proposed algorithms is made for plane thermoelastic contact problems with the use of linear and quadratic finite element approximations on triangles. The numerical analysis is performed for one-body and two-body thermoelastic contact problems.

Алгоритмы декомпозиции области для задач термомеханического контакта нескольких упругих тел

Ігорь Прокопишин

Рассмотрена термоупругая контактная задача для нескольких тел конечных размеров при условиях одностороннего механического и неидеального теплового контакта между телами. С помощью метода штрафа, получена слабая формулировка этой задачи в виде системы линейного и нелинейного вариационных уравнений в гильбертовом пространстве. Для решения этой системы предложен ряд итерационных алгоритмов декомпозиции области типа Робина, на каждом шаге которых необходимо решать два линейные вариационные уравнения для каждого из тел, одно из которых соответствует задачи теплопроводности с условиями Ньютона на зонах возможного контакта, а другое — задачи теории упругости с условиями Робина на этих зонах и дополнительными объемными силами в телах. Выполнена программная реализация разработанных методов для плоских термомеханических задач с использованием конечно-элементных аппроксимаций. Численные исследования проведены для задач контакта одного и двух термоупругих тел.

Отримано 28.12.17