УДК 004.42:510.69

*М.С. Нікітченко, О.С. Шкільняк, С.С. Шкільняк, Т.А. Мамедов*
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна
вул. Володимирська, 60, м. Київ, 01601

# РЕНОМІНАТИВНІ ЛОГІКИ З РОЗШИРЕНИМИ РЕНОМІНАЦІЯМИ, РІВНІСТЮ ТА ПРЕДИКАТНИМ ДОПОВНЕННЯМ

*M. Nikitchenko, O. Shkilniak, S. Shkilniak, T. Mamedov*
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine
60, Volodymyrska St., Kyiv, 01601

# RENOMINATIVE LOGICS WITH EXTENDED RENOMINATION, EQUALITY AND PREDICATE COMPLEMENT

Досліджено новий клас програмно-орієнтованих логічних формалізмів – реномінативні логіки з розширеними реномінаціями, предикатами рівності та композицією предикатного доповнення. Описано композиційні алгебри та мови таких логік, досліджено їх семантичні властивості. Для цих логік запропоновано і досліджено низку відношень логічного наслідку, зокрема, відношень логічного наслідку за умов невизначеності. Властивості цих відношень є семантичною основою подальшої побудови для таких логік числень секвенційного типу.
**Ключові слова:** логіка, предикат, композиційна алгебра, реномінація, рівність, логічний наслідок

A new class of program-oriented logical formalisms is investigated – renominative logics with extended renominations, equality predicates, and predicate complement composition. Composition algebras and languages of such logics are described; their semantic properties are investigated. For these logics, a number of logical consequence relations are proposed and investigated, in particular, the logical consequence relations with undefinedness conditions. Properties of these relations form the semantic basis for further construction of sequent-type calculi for the proposed logics.
**Keywords:** logic, predicate, composition algebra, renomination, equality, logical consequence

## Вступ

Апарат математичної логіки є основою сучасних систем штучного інтелекту, програмних систем [1]. Для цього зазвичай використовується класична логіка предикатів та базовані на ній спеціальні логіки. Проте класична логіка має низку принципових обмежень, що ускладнює її використання в інформатиці й програмуванні. Вона недостатньо враховує частковість, неповноту, інформації, її структурованість. Тому вельми актуальною стає проблема побудови нових, програмно-орієнтованих логічних формалізмів. Такими є композиційно-номінативні логіки (КНЛ) часткових квазіарних предикатів (див., напр., [2]). Важливим різновидом програмно-орієнтованих логік, які успішно застосовуються в системах верифікації програм, є логіки Флойда-Хоара [3–5]. Ці логіки використовують тотальні перед- та після-умови (предикати), тому постала проблема їх розширення на випадок часткових предикатів. Продуктивним напрямком такого розширення є введення спеціальної операції (композиції) предикатного доповнення [6]. КНЛ з композицією предикатного доповнення поєднують можливості КНЛ квазіарних предикатів та логік Флойда-Хоара, такі нові логіки названо LC [7]. LC пропозиційного рівня вивчались в [7]. Семантичні властивості першопорядкових LC досліджено в [8], основна увага приділена вивченню відношень логічного наслідку в LC.

Метою пропонованої роботи є дослідження нових класів програмно-орієнтованих логік – реномінативних LC з предикатами рівності. Характерною їх особливістю є використання розширених реномінацій та спеціальних предикатів-індикаторів наявності значення для змінних. Описано композиційні алгебри та мови таких логік, досліджено їх семантичні властивості. Для цих логік запропоновано низку відношень логічного наслідку, зокрема, відношень логічного наслідку за умов невизначеності. Властивості цих відношень є семантичною основою подальшої побудови для таких логік низки числень секвенційного типу.

 

Далі в цій роботі КНЛ із розширеними реномінаціями та предикатами-індикаторами наявності значення для змінних будемо називати $_\perp$КНЛ, скорочено $_\perp$L.

$_\perp$КНЛ, розширені предикатами слабкої рівності та предикатами строгої рівності, будемо називати $_\perp$L= та $_\perp$L≡.

На реномінативному рівні КНЛ та $_\perp$КНЛ будемо називати РНЛ та $_\perp$РНЛ, будемо їх також позначати $L^R$ та $L_\perp{}^R$.

$_\perp$РНЛ з предикатами слабкої рівності будемо позначати $L_\perp{}^{R=}$, а з предикатами строгої рівності – $L_\perp{}^{R\equiv}$.

$_\perp$КНЛ з композицією предикатного доповнення назвемо $_\perp$LC. $_\perp$LC з предикатами слабкої рівності називаємо $_\perp$LC=, а з предикатами строгої рівності – $_\perp$LC≡.

На реномінативному рівні $_\perp$LC, $_\perp$LC=, $_\perp$LC≡ позначатимемо $L_\perp{}^{RC}$, $L_\perp{}^{RC=}$, $L_\perp{}^{RC\equiv}$.

Поняття, які тут не визначаємо, тлумачимо в сенсі [2, 7]. Для полегшення читання нагадаємо основні визначення.

**Операція розширеної реномінації**

Для однозначних функцій пишемо $f(d)\downarrow$, якщо значення $f(d)$ визначене, та $f(d)\uparrow$, якщо значення $f(d)$ невизначене.

Нехай $V$ і $A$ – множини, які будемо трактувати як множину предметних імен (змінних) і множину предметних значень.

$V$-$A$-іменна множина ($V$-$A$-ІМ) – це однозначна функція вигляду $d : V \to A$.

ІМ подаємо як $[v_1 \mapsto a_1, ..., v_n \mapsto a_n, ...]$, де $v_i \in V$, $a_i \in A$, $v_i \neq v_j$ при $i \neq j$.

Множину всіх $V$-$A$-ІМ позначаємо ${}^VA$.

Для ІМ задамо операцію $\|_{-x}$ видалення компоненти з іменем $x$:

$$d\,\|_{-x} = [v \mapsto a \in d \mid v \neq x].$$

Для $Z \subseteq V$ визначаємо:

$$d\,\|_{-Z} = \{v \mapsto a \in d \mid v \notin Z\}.$$

Операцію розширеної реномінації $\mathrm{r}^{[v_1 \mapsto x_1, ..., v_n \mapsto x_n, u_1 \mapsto \perp, ..., u_m \mapsto \perp]} : {}^VA \to {}^VA$ задамо так:

$$\mathrm{r}^{[v_1 \mapsto x_1, ..., v_n \mapsto x_n, u_1 \mapsto \perp, ..., u_m \mapsto \perp]}(d) =$$

$$d\,\|_{-\{v_1, ..., v_n, u_1, ..., u_m\}} \cup [v_1 \mapsto d(x_1), ..., v_n \mapsto d(x_n)].$$

Тут усі $v_i, x_i, u_j \in V$; *с*пеціальний символ $\perp \notin V$ означає відсутність значення.

Якщо тут $d(x_i)\uparrow$, то компонента з іменем $v_i$ відсутня.

Таку операцію $\mathrm{r}^{[v_1 \mapsto x_1, ..., v_n \mapsto x_n, u_1 \mapsto \perp, ..., u_m \mapsto \perp]}$ далі стисло позначаємо $\mathrm{r}^{v_1, ..., v_n, u_1, ..., u_m}_{x_1, ..., x_n, \perp, ..., \perp}$.

Зокрема, маємо $\mathrm{r}^{x}_{\perp}(d) = d\,\|_{-x}$.

Реномінація r з відсутніми параметрами діє як тотожне відображення: $\mathrm{r}(d) = d$.

Введемо для $y_1, ..., y_n$ позначення $\bar{y}$.

Тоді замість $\mathrm{r}^{v_1, ..., v_n, u_1, ..., u_m}_{x_1, ..., x_n, \perp, ..., \perp}$ пишемо $\mathrm{r}^{\bar{v}, \bar{u}}_{\bar{x}, \perp}$.

Традиційна операція реномінації $\mathrm{r}^{\bar{v}}_{\bar{x}}$ [2] є окремим випадком операції $\mathrm{r}^{\bar{v}, \bar{u}}_{\bar{x}, \perp}$.

Порядок пар імен в позначенні операції реномінації *не має значення*. Наприклад, $\mathrm{r}^{v,y,u}_{x,z,\perp}$, $\mathrm{r}^{v,u,y}_{x,\perp,z}$, $\mathrm{r}^{u,y,v}_{\perp,z,x}$ – це різні позначення *однієї й тієї ж* операції.

Розширена реномінація монотонна: якщо $d_1 \subseteq d_2$, то $\mathrm{r}^{\bar{v}, \bar{z}}_{\bar{y}, \perp}(d_1) \subseteq \mathrm{r}^{\bar{v}, \bar{z}}_{\bar{y}, \perp}(d_2)$.

Операція розширеної реномінації асоціативна та некомутативна.

Для розширеної реномінації маємо елімінацію тотожних перейменувань:

$$\mathrm{r}^{\bar{z}, \bar{v}, \bar{u}}_{\bar{z}, \bar{x}, \perp}(d) = \mathrm{r}^{\bar{v}, \bar{u}}_{\bar{x}, \perp}(d).$$

Послідовне застосування двох операцій $\mathrm{r}^{\bar{u}, \bar{s}, \bar{w}, \bar{t}}_{\bar{x}, \bar{a}, \perp, \perp}$ та $\mathrm{r}^{\bar{v}, \bar{s}, \bar{z}, \bar{t}}_{\bar{y}, \bar{c}, \perp, \perp}$ можна подати у вигляді однієї операції реномінації, яку назвемо згорткою операцій $\mathrm{r}^{\bar{u}, \bar{s}, \bar{w}, \bar{t}}_{\bar{x}, \bar{a}, \perp, \perp}$ та $\mathrm{r}^{\bar{v}, \bar{s}, \bar{z}, \bar{t}}_{\bar{y}, \bar{c}, \perp, \perp}$, будемо її позначати $r^{\bar{u}, \bar{s}, \bar{w}, \bar{t}}_{\bar{x}, \bar{a}, \perp, \perp} \bullet^{\bar{v}, \bar{s}, \bar{z}, \bar{t}}_{\bar{y}, \bar{c}, \perp, \perp}$. Для кожного $d \in {}^VA$ тоді $\mathrm{r}^{\bar{u}, \bar{s}, \bar{w}, \bar{t}}_{\bar{x}, \bar{a}, \perp, \perp}(\mathrm{r}^{\bar{v}, \bar{s}, \bar{z}, \bar{t}}_{\bar{y}, \bar{c}, \perp, \perp}(d)) = \mathrm{r}^{\bar{u}, \bar{s}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{z}, \bar{t}}_{\bar{p}, \bar{q}, \bar{y}, \perp, \perp, \perp}(d)$, де кожні $p_i \in \{\bar{p}\}$ та $q_i \in \{\bar{q}\}$ задаємо так:

$$p_i = \begin{cases} y_j, \text{ якщо } x_i = v_j \text{ для деякого } v_j \in \{\bar{v}\}, \\ q_j, \text{ якщо } x_i = s_j \text{ для деякого } s_j \in \{\bar{s}\}, \\ x_i, \text{ якщо } x_i \notin \{\bar{v}, \bar{s}, \bar{z}, \bar{t}\}, \\ \perp, \text{ якщо } x_i = z_j \text{ для деякого } z_j \in \{\bar{z}\}, \\ \perp, \text{ якщо } x_i = t_j \text{ для деякого } t_j \in \{\bar{t}\}; \end{cases}$$

$$q_i = \begin{cases} y_j, \text{ якщо } a_i = v_j \text{ для деякого } v_j \in \{\bar{v}\}, \\ q_j, \text{ якщо } a_i = s_j \text{ для деякого } s_j \in \{\bar{s}\}, \\ a_i, \text{ якщо } a_i \notin \{\bar{v}, \bar{s}, \bar{z}, \bar{t}\}, \\ \perp, \text{ якщо } a_i = z_j \text{ для деякого } z_j \in \{\bar{z}\}, \\ \perp, \text{ якщо } a_i = t_j \text{ для деякого } t_j \in \{\bar{t}\}. \end{cases}$$

Так визначену операцію реномінації $\mathrm{r}^{\bar{u}, \bar{s}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{z}, \bar{t}}_{\bar{p}, \bar{q}, \bar{y}, \perp, \perp, \perp}$ назвемо *згорткою* операцій реномінації $\mathrm{r}^{\bar{u},\bar{s},\bar{w},\bar{t}}_{\bar{x},\bar{a},\perp,\perp}$ (внутрішня, її застосовуємо першою) та $\mathrm{r}^{\bar{v},\bar{s},\bar{z},\bar{t}}_{\bar{y},\bar{c},\perp,\perp}$ (зовнішня, застосовуємо другою); її позначаємо $\mathrm{r}^{\bar{u},\bar{s},\bar{w},\bar{t}}_{\bar{x},\bar{a},\perp,\perp}\bullet^{\bar{v},\bar{s},\bar{z},\bar{t}}_{\bar{y},\bar{c},\perp,\perp}$.

Таким чином, для кожного $d\in{}^VA$

$$\mathrm{r}^{\bar{u},\bar{s},\bar{w},\bar{t}}_{\bar{x},\bar{a},\perp,\perp}(\mathrm{r}^{\bar{v},\bar{s},\bar{z},\bar{t}}_{\bar{y},\bar{c},\perp,\perp}(d)) = \mathrm{r}^{\bar{u},\bar{s},\bar{w},\bar{t}}_{\bar{x},\bar{a},\perp,\perp}\bullet^{\bar{v},\bar{s},\bar{z},\bar{t}}_{\bar{y},\bar{c},\perp,\perp}(d).$$

**Квазіарні предикати, їх різновиди**

Під *V-A*-квазіарним предикатом розуміємо часткову неоднозначну функцію вигляду $P: {}^VA \to \{T, F\}$. Тут $\{T, F\}$ – множина істиннісних значень.

Множину всіх значень, які неоднозначний предикат $P$ може приймати на аргументі (даному) $d\in{}^VA$, позначаємо $P[d]$.

В цій роботі розглядаємо неоднозначні (недетерміновані) предикати реляційного типу – *R*-предикати. Їх трактуємо як відповідності (відношення) між ${}^VA$ та множиною $\{T, F\}$.

Кожний *R*-предикат $Q$ можна однозначно задати за допомогою 2-х множин:
– область істинності $T(Q) = \{d \mid T\in Q[d]\}$;
– область хибності $F(Q) = \{d \mid F\in Q[d]\}$.

Область невизначеності *R*-предиката $Q$ визначається через $T(Q)$ та $F(Q)$ так:
$\perp(Q) = \overline{T(Q)\cup F(Q)} = \overline{T(Q)} \cap \overline{F(Q)}$.

Для $T(Q)$, $F(Q)$, $\perp(Q)$ вживаємо також назви *T*-область, *F*-область, $\perp$-область.

*R*-предикат $Q$ монотонний, якщо:

$$d_1 \subseteq d_2 \Rightarrow Q[d_1] \subseteq Q[d_2].$$

*R*-предикат $Q$ антитонний, якщо:

$$d_1 \subseteq d_2 \Rightarrow Q[d_1] \supseteq Q[d_2].$$

*R*-предикат $P$:
– частковий однозначний, або *P*-предикат, якщо $T(P)\cap F(P) = \varnothing$;
– тотальний, або *T*-предикат, якщо $T(P)\cup F(P) = {}^VA$; тоді $\perp(P) = \varnothing$;
– тотальний однозначний, або *TS*-предикат, якщо $T(P)\cap F(P) = \varnothing$ та $T(P)\cup F(P) = {}^VA$;
– неспростовний (частково істинний), якщо $F(P) = \varnothing$;
– виконуваний, якщо $T(P) \neq \varnothing$;
– тотожно істинний (позн. T), якщо $T(P) = {}^VA$ та $F(P) = \varnothing$;
– тотожно хибний (позн. F), якщо $F(P) = {}^VA$ та $T(P) = \varnothing$;
– всюди невизначений (позн. $\curlywedge$), якщо $T(P) = F(P) = \varnothing$;
– тотально амбівалентний (позн. $\Upsilon$), якщо $T(P) = {}^VA$ та $F(P) = {}^VA$.

У випадку *P*-предикатів маємо $T(Q) = \{d \mid Q(d)\downarrow = T\}$, $F(Q) = \{d \mid Q(d)\downarrow = F\}$.

Маємо 4 константні *R*-предикати T, F, $\curlywedge$, $\Upsilon$. Вони відповідають множинам значень $\{T\}$, $\{F\}$, $\varnothing$, $\{T, F\}$, які *R*-предикат може прийняти на конкретному даному.

Предикати T, F, $\curlywedge$, $\Upsilon$ монотонні й антитонні, при цьому T, F, $\curlywedge$ однозначні.

Класи *V-A*-квазіарних *R*-предикатів та *P*-предикатів позначимо $Pr^{V\text{–}A}$ та $PrP^{V\text{–}A}$.

Класи *V-A*-квазіарних *T*-предикатів та *TS*-предикатів позначимо $PrT^{V\text{–}A}$ та $PrTS^{V\text{–}A}$.

Клас $PrTS^{V\text{–}A}$ до певної міри вироджений, усі *TS*-предикати, за винятком константних T та F, немонотонні й неантитонні.

Спеціальні 0-арні композиції – *предикати-індикатори Ez* – визначають наявність у вхідних даних компоненти з відповідним $z\in V$. Предикати $Ez$ задаємо так:

$$T(Ez) = \{d \mid d(z)\downarrow\};$$
$$F(Ez) = \{d \mid d(z)\uparrow\}.$$

Предикати-індикатори $Ez$ тотальні, однозначні, немонотонні, неантитонні. Кожне $x\in V$ таке, що $x \neq z$, неістотне для $Ez$.

Маємо $Ex \vee \neg Ex$ = T, $Ex \,\&\, \neg Ex$ = F.

Таким чином, в ${}_\perp$КНЛ можна виділити константні предикати.

В логіках квазіарних предикатів ототожнювати й розрізняти значення предметних імен можна за допомогою спеціальних 0-арних композицій – параметризованих за іменами предикатів рівності. Можна розглядати [9] два різновиди цих предикатів:
– *слабкої* (з точністю до визначеності) рівності $=_{\{x,y\}}$;
– *строгої* (точної) *рівності* $\equiv_{\{x,y\}}$.

Предикати $=_{\{x,y\}}$ та $\equiv_{\{x,y\}}$ задаємо так:
$T(=_{\{x,y\}}) = \{d \mid d(x)\downarrow, d(y)\downarrow$ та $d(x) = d(y)\}$,
$F(=_{\{x,y\}}) = \{d \mid d(x)\downarrow, d(y)\downarrow$ та $d(x) \neq d(y)\}$;
$T(\equiv_{\{x,y\}}) = \{d \mid d(x)\downarrow, d(y)\downarrow$ та $d(x) = d(y)\} \cup$
$\cup \{d \mid d(x)\uparrow$ та $d(y)\uparrow\}$,
$F(\equiv_{\{x,y\}}) = \{d \mid d(x)\downarrow, d(y)\downarrow, d(x) \neq d(y)\} \cup$
$\cup \{d \mid d(x)\downarrow, d(y)\uparrow$ або $d(x)\uparrow, d(y)\downarrow\}$.

 

Неістотним для предикатів $=_{\{x,y\}}$ та $\equiv_{\{x,y\}}$ є кожне $z\in V\setminus\{x, y\}$.

Надалі предикати $=_{\{x,y\}}$ та $\equiv_{\{x,y\}}$ скорочено позначаємо $=_{xy}$ та $\equiv_{xy}$; також вживаємо традиційні позначення $x=y$ та $x\equiv y$.

Таким чином, $=_{xy}$ та $=_{yx}$ – це різні позначення *одного і того ж* предиката!

Аналогічно $\equiv_{xy}$ та $\equiv_{yx}$ – теж різні позначення одного і того ж предиката.

Предикати $\equiv_{xy}$ тотальні однозначні, немонотонні й неантитонні. Предикати $=_{xy}$ часткові однозначні та монотонні.

Окремим випадком предикатів $=_{\{x,y\}}$ та $\equiv_{\{x,y\}}$, якщо $x$ та $y$ – це одне і те ж предметне ім’я, є предикати $=_{\{x\}}$ та $\equiv_{\{x\}}$, які будемо позначати $=_{xx}$ та $\equiv_{xx}$, в традиційному вигляді $x=x$ та $x\equiv x$.

Кожне $z\in V\setminus\{x\}$ неістотне для $=_{xx}$, $\equiv_{xx}$.

Для $\equiv_{xx}$ маємо $T(\equiv_{xx}) = {}^VA$ та
$F(=_{xx}) = \varnothing$, звідки $\equiv_{xx}$ = T – константний.

Для предикатів $=_{xx}$ маємо $F(=_{xx}) = \varnothing$, такі $=_{xx}$ – часткові константні предикати.

**Композиційні алгебри $_\perp$РНЛ**

Семантична основа КНЛ – композиційні предикатні системи вигляду $({}^VA, Pr^{V\text{–}A}, C_B)$, де $C_B$ – множина базових композицій. Кожна така система задає дві алгебри: алгебру даних $({}^VA, Pr^{V\text{–}A})$ та композиційну алгебру предикатів $(Pr^{V\text{–}A}, C_B)$.

Опишемо базові композиції $_\perp$РНЛ.

Композиції пропозиційного рівня традиційно називають логічними зв’язками. Вони є аналогами сильних зв'язок Кліні [10], тому їх називають Клінієвими.

За базові логічні зв’язки $R$-предикатів візьмемо $\neg$ та $\vee$, вони задаються так:

$T(\neg P) = F(P)$;

$F(\neg P) = T(P)$;

$T(P\vee Q) = T(P)\cup T(Q)$;

$F(P\vee Q) = F(P)\cap F(Q)$.

Похідні композиції $\to$, &, $\leftrightarrow$ виражаються через базові композиції $\neg$ та $\vee$:

$P\&Q = \neg(\neg P\vee\neg Q)$;

$P\to Q = \neg P\vee Q$;

$P\leftrightarrow Q = (P\to Q)\&(Q\to P)$.

Композиція *розширеної реномінації* $\mathrm{R}^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}: Pr^{V-A}\to Pr^{V-A}$ задається умовою:

$$\mathrm{R}^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(P)[d] = P[\mathrm{r}^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(d)].$$

$\mathrm{R}^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}$ можна визначити через області істинності та хибності предиката $\mathrm{R}^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(P)$:

$$T(\mathrm{R}^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(P)) = \{d\in {}^VA \mid \mathrm{r}^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(d) \in T(P)\};$$

$$F(\mathrm{R}^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(P)) = \{d\in {}^VA \mid \mathrm{r}^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(d) \in F(P)\}.$$

Як і у випадку операції реномінації, порядок пар імен в позначенні композиції реномінації не має значення. Наприклад, $\mathrm{R}^{v,y,u}_{x,z,\perp}$, $\mathrm{R}^{v,u,y}_{x,\perp,z}$, $\mathrm{R}^{u,y,v}_{\perp,z,x}$ – це різні позначення *однієї й тієї ж* композиції.

Композиції реномінації $\mathrm{R}^{\bar v}_{\bar x}$ є окремим випадком композицій $\mathrm{R}^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}$.

Реномінація R без параметрів діє як тотожне відображення: $\mathrm{R}(P) = P$.

Характерною особливістю LC є наявність спеціальної немонотонної 1-арної композиції *предикатного доповнення* $\sim$.

Композицію $\sim$ задаємо так:

$$T({\sim}P) = \perp(P) = \overline{T(P)\cup F(P)},$$

$$F({\sim}P) = \varnothing.$$

Тоді маємо $\perp({\sim}P) = T(P)\cup F(P)$.

Для $P$-предикатів композицію $\sim$ можна задати [7] так:

$$({\sim}P)(d) = \begin{cases} T, \text{ якщо } P(d)\uparrow, \\ \text{невизначене, якщо } P(d)\downarrow \end{cases}$$

Клас $P$-предикатів замкнений щодо композицій $\neg$, $\vee$, $\to$, &, $\mathrm{R}^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}$, $\sim$.

Водночас композиція $\sim$ не зберігає тотальність $R$-предикатів.

**Твердження 1.** Для кожного $Q\in Pr^{V\text{–}A}$ маємо ${\sim}Q \in PrP^{V\text{–}A}$;
для кожного $Q\in PrT^{V\text{–}A}$ маємо ${\sim}Q = \curlywedge$.

Звідси випливає: класи $T$-предикатів та $TS$-предикатів незамкнені щодо $\sim$.

Це означає, що для $T$-предикатів та $TS$-предикатів LC не мають смислу.

В силу незамкненості $PrTS^{V\text{–}A}$ та $PrT^{V\text{–}A}$ щодо $\sim$, а також враховуючи дуальність [2] класів $PrP^{V\text{–}A}$ й $PrT^{V\text{–}A}$ і виродженість $PrTS^{V\text{–}A}$, коректно розглядати лише LC $R$-предикатів та $P$-предикатів.

В загальному випадку $R$-предикатів доцільно розглядати логіки реномінативного рівня $L_\perp{}^R$, $L_\perp{}^{R=}$, $L_\perp{}^{R\equiv}$ та $L_\perp{}^{RC}$, $L_\perp{}^{RC=}$, $L_\perp{}^{RC\equiv}$. У випадку *P*-предикатів маємо відповідні реномінативні логіки $L_\perp{}^{RP}$, $L_\perp{}^{R=P}$, $L_\perp{}^{R\equiv P}$ та $L_\perp{}^{RCP}$, $L_\perp{}^{RC=P}$, $L_\perp{}^{RC\equiv P}$. Для цих логік маємо такі множини базових композицій:

– $C_{\perp R} = \{\neg, \vee, \mathrm{R}^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp} Ex\}$ для $L_\perp{}^R$, $L_\perp{}^{RP}$;

– $C_{\perp R=} = \{\neg, \vee, \mathrm{R}^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}, Ex, =_{xy}\}$ для $L_\perp{}^{R=}$, $L_\perp{}^{R=P}$;

– $C_{\perp R\equiv} = \{\neg, \vee, \mathrm{R}^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}, Ex, \equiv_{xy}\}$ для $L_\perp{}^{R\equiv}$, $L_\perp{}^{R\equiv P}$;

– $C_{\perp RC} = \{\neg, \vee, \mathrm{R}^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}, Ex, \sim\}$ для $L_\perp{}^{RC}$, $L_\perp{}^{RCP}$;

– $C_{\perp RC=} = \{\neg, \vee, \mathrm{R}^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}, Ex, =_{xy}, \sim\}$ для $L_\perp{}^{RC=}$, $L_\perp{}^{RC=P}$;

– $C_{\perp RC\equiv} = \{\neg, \vee, \mathrm{R}^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}, Ex, \equiv_{xy}, \sim\}$ для $L_\perp{}^{RC\equiv}$, $L_\perp{}^{RC\equiv P}$.

Маємо такі *реномінативні композиційні системи R*-предикатів:

– $({}^VA, Pr^{V\text{–}A}, C_{\perp R})$;
– $({}^VA, Pr^{V\text{–}A}, C_{\perp R=})$;
– $({}^VA, Pr^{V\text{–}A}, C_{\perp R\equiv})$;
– $({}^VA, Pr^{V\text{–}A}, C_{\perp RC})$;
– $({}^VA, Pr^{V\text{–}A}, C_{\perp RC=})$;
– $({}^VA, Pr^{V\text{–}A}, C_{\perp RC\equiv})$.

Відповідні *реномінативні композиційні алгебри R*-предикатів:

$A_\perp{}^R = (Pr^{V\text{–}A}, C_{\perp R})$;
$A_\perp{}^{R=} = (Pr^{V\text{–}A}, C_{\perp R=})$;
$A_\perp{}^{R\equiv} = (Pr^{V\text{–}A}, C_{\perp R\equiv})$;
$A_\perp{}^{RC} = (Pr^{V\text{–}A}, C_{\perp RC})$;
$A_\perp{}^{RC=} = (Pr^{V\text{–}A}, C_{\perp RC=})$;
$A_\perp{}^{RC\equiv} = (Pr^{V\text{–}A}, C_{\perp RC\equiv})$.

Клас *P*-предикатів замкнений щодо базових композицій $C_{\perp R}$, $C_{\perp R=}$, $C_{\perp R\equiv}$ та $C_{\perp RC}$, $C_{\perp RC=}$, $C_{\perp RC\equiv}$. Тому в $A_\perp{}^R$, $A_\perp{}^{R=}$, $A_\perp{}^{R\equiv}$ та $A_\perp{}^{RC}$, $A_\perp{}^{RC=}$, $A_\perp{}^{RC\equiv}$ виділяємо такі підалгебри – реномінативні композиційні алгебри *P*-предикатів:

– $A_\perp{}^{RP} = (PrP^{V\text{–}A}, C_{\perp R})$;
– $A_\perp{}^{R=P} = (PrP^{V\text{–}A}, C_{\perp R=})$;
– $A_\perp{}^{R\equiv P} = (PrP^{V\text{–}A}, C_{\perp R\equiv})$;
– $A_\perp{}^{RCP} = (PrP^{V\text{–}A}, C_{\perp RC})$;
– $A_\perp{}^{RC=P} = (PrP^{V\text{–}A}, C_{\perp RC=})$;
– $A_\perp{}^{RC\equiv P} = (PrP^{V\text{–}A}, C_{\perp RC\equiv})$.

Основні властивості пропозиційних композицій аналогічні властивостям класичних логічних зв'язок (див. [11]). Це комутативність $\vee$ та &; асоціативність $\vee$ та &; дистрибутивність для $\vee$ та &; ідемпотентність $\vee$ та &; закони поглинання; закони де Моргана; зняття подвійного заперечення; закон контрапозиції.

**Твердження 2.** Композиції $\neg$, $\vee$, $\mathrm{R}^{\bar v,\bar u}_{\bar y,\perp}$ зберігають тотальність, монотонність і антитонність предикатів.

**Твердження 3.** Нехай $z \in V$ неістотне для *P*. Тоді $\mathrm{R}^{z,\bar v,\bar u}_{y,\bar x,\perp}(P) = \mathrm{R}^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(P)$.

**Твердження 4.** Ім'я $x \in V$ неістотне для $\mathrm{R}^{\bar v,\bar u,x}_{\bar y,\perp,\perp}(P)$, якщо $x \notin \{\bar y\}$.

**Твердження 5.** Властивості, пов'язані з композицією розширеної реномінації:

R) $\mathrm{R}(P) = P$ – тотожна реномінація;

$\mathrm{R}_\perp$I) $\mathrm{R}^{z,\bar v,\bar u}_{z,\bar x,\perp}(P) = \mathrm{R}^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(P)$;

$\mathrm{R}_\perp$U) Нехай $z \in V$ неістотне для *P*; тоді $\mathrm{R}^{z,\bar v,\bar u}_{y,\bar x,\perp}(P) = \mathrm{R}^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(P)$;

$\mathrm{R}_\perp\neg$) $\mathrm{R}^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(\neg P) = \neg \mathrm{R}^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(P)$;

$\mathrm{R}_\perp\vee$) $\mathrm{R}^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(P \vee Q) = \mathrm{R}^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(P) \vee \mathrm{R}^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(Q)$;

$\mathrm{R}_\perp$R) $\mathrm{R}^{\bar v,\bar z}_{\bar y,\perp}(\mathrm{R}^{\bar u,\bar t}_{\bar x,\perp}(P)) = \mathrm{R}^{\bar v,\bar z}_{\bar y,\perp} \circ^{\bar u,\bar t}_{\bar x,\perp}(P)$ – згортка реномінацій.

Згортку композицій реномінації задаємо через згортку операцій реномінації: для довільних $P \in Pr^{V\text{–}A}$ та $d \in {}^VA$ маємо

$$\mathrm{R}^{\bar v,\bar z}_{\bar y,\perp} \circ^{\bar u,\bar t}_{\bar x,\perp}(P)(d) = (\mathrm{R}^{\bar v,\bar z}_{\bar y,\perp}(\mathrm{R}^{\bar u,\bar t}_{\bar x,\perp}(P)))(d) =$$
$$= P(r^{\bar u,\bar t}_{\bar x,\perp} \bullet^{\bar v,\bar z}_{\bar y,\perp}(d)).$$

**Твердження 6.** Властивості реномінації предикатів-індикаторів:

– $\mathrm{R}^{\bar v,\bar u,z}_{\bar x,\perp,\perp}(Ez) = F$; зокрема, $\mathrm{R}^{z}_{\perp}(Ez) = F$;

– $\mathrm{R}^{\bar v,\bar u,z}_{\bar x,\perp,y}(Ez) = Ey$; зокрема, $\mathrm{R}^{z}_{y}(Ez) = Ey$;

– $\mathrm{R}^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}(Ez) = Ez$, якщо $z \notin \{\bar v, \bar u\}$; зокрема: $\mathrm{R}^{v}_{w}(Ez) = Ez$; $\mathrm{R}^{u}_{\perp}(Ez) = Ez$.

Усі предикати вигляду $R^{\bar v,\bar u}_{\bar w,\perp}(Ey)$ є тотальними, для них $\perp(R^{\bar v,\bar u}_{\bar w,\perp}(Ey)) = \varnothing$.

Наявність в ${}_\perp$L предикатів-індикаторів *Ez* дає змогу різними способами задати константні предикати T, F. Найпростіші подання: $\neg Ez \vee Ez$ = T, $\neg Ez \,\&\, Ez$ = F.

Тепер властивості предикатів рівності.

**Твердження 7.** Маємо:

$T(=_{xy}) = T(\equiv_{xy}) \cap T(Ex) \cap T(Ey) \subset T(Ex) \cap T(Ey)$;

$F(=_{xy}) = F(\equiv_{xy}) \cap T(Ex) \cap T(Ey) \subset T(Ex) \cap T(Ey)$.

Згідно $T(Ex) \cap F(Ex) = \varnothing$ отримуємо:

**Твердження 8.** Маємо

$T(=_{xy}) \cap F(Ex) = \varnothing$, $T(=_{xy}) \subset T(Ex)$;

$F(=_{xy}) \cap F(Ex) = \varnothing$, $F(=_{xy}) \subset T(Ex)$.

Константні предикати T та F можна подати за допомогою предикатів $\equiv_{xy}$:

$\equiv_{xx} = \mathrm{T}$; $\neg\equiv_{xx} = \mathrm{F}$; $\equiv_{xy} \vee \neg\equiv_{xy} = \mathrm{T}$.

**Твердження 9.** Маємо подання:

$\mathrm{R}_{\perp}^{x}(=_{xx}) = \text{⅄}$; $=_{xx} = \text{⅄} \vee Ex$.

Використовуючи предикати $Ez$, предикати $\equiv_{xy}$ можна подати через $=_{xy}$.

**Теорема 1** Маємо

$\equiv_{xy} = (=_{xy} \,\&\, Ex \,\&\, Ey) \vee (\neg Ex \,\&\, \neg Ey)$.

$T((=_{xy} \,\&\, Ex \,\&\, Ey) \vee (\neg Ex \,\&\, \neg Ey)) =$

$= (T(=_{xy}) \cap T(Ex) \cap T(Ey)) \cup (T(\neg Ex) \cap T(\neg Ey)) =$

$= (T(=_{xy}) \cap T(Ex) \cap T(Ey)) \cup (F(Ex) \cap F(Ey)) =$

$= T(=_{xy}) \cup (F(Ex) \cap F(Ey)) = T(\equiv_{xy})$,

адже $T(=_{xy}) \subset T(Ex) \cap T(Ey)$.

$F((=_{xy} \,\&\, Ex \,\&\, Ey) \vee (\neg Ex \,\&\, \neg Ey)) =$

$= (F(=_{xy}) \cup F(Ex) \cup F(Ey)) \cap (F(\neg Ex) \cup F(\neg Ey)) =$

$= (F(=_{xy}) \cup F(Ex) \cup F(Ey)) \cap (T(Ex) \cup T(Ey)) =$

$= F(=_{xy}) \cup (F(Ex) \cap T(Ey)) \cup (T(Ex) \cap FEy)) =$

$= F(\equiv_{xy})$, адже $F(=_{xy}) \subset T(Ex) \cap T(Ey)$.

З іншого боку, наявність предикатів ⅄ та $Ez$ дає змогу подати $=_{xy}$ через $\equiv_{xy}$.

**Теорема 2.** Маємо

$=_{xy} = (\equiv_{xy} \,\&\, (\text{⅄} \vee Ex) \,\&\, (\text{⅄} \vee Ey)) \vee$

$\vee (\text{⅄} \,\&\, \neg Ex) \vee (\text{⅄} \,\&\, \neg Ey)$.

Справді, $T(\equiv_{xy} \,\&\, (\text{⅄} \vee Ex) \,\&\, (\text{⅄} \vee Ey)) \vee$
$\vee (\text{⅄} \,\&\, \neg Ex) \vee (\text{⅄} \,\&\, \neg Ey)) = (T(\equiv_{xy}) \cap$
$(\varnothing \cup T(Ex)) \cap (\varnothing \cup T(Ey)) \cup (\varnothing \cap T(\neg Ex)) \cup$
$(\varnothing \cap T(\neg Ey)) = T(\equiv_{xy}) \cap T(Ex) \cap T(Ey) = T(=_{xy})$;

$F(\equiv_{xy} \,\&\, (\text{⅄} \vee Ex) \,\&\, (\text{⅄} \vee Ey)) \vee$
$\vee (\text{⅄} \,\&\, \neg Ex) \vee (\text{⅄} \,\&\, \neg Ey)) = (F(\equiv_{xy}) \cup$
$(\varnothing \cap F(Ex)) \cup (\varnothing \cap F(Ey))) \cap (\varnothing \cup F(\neg Ex)) \cap$
$(\varnothing \cup F(\neg Ey)) = F(\equiv_{xy}) \cap T(Ex) \cap T(Ey) = F(=_{xy})$.

Для $=_{xy}$ та $\equiv_{xy}$ маємо рефлексивність, симетричність, транзитивність.

Властивість симетричності фактично синтаксична, на рівні позначень, адже $\equiv_{xy}$ та $\equiv_{yx}$ – це один і той же предикат, $=_{xy}$ та $=_{yx}$ – це теж один і той же предикат. Зокрема: $\mathrm{R}_{\bar{v},\perp}^{\bar{u},\bar{w}}(\equiv_{xy})$ та $\mathrm{R}_{\bar{v},\perp}^{\bar{u},\bar{w}}(\equiv_{yx})$ – це один і той же предикат; $\mathrm{R}_{\bar{v},\perp}^{\bar{u},\bar{w}}(=_{xy})$ та $\mathrm{R}_{\bar{v},\perp}^{\bar{u},\bar{w}}(=_{yx})$ – один і той же предикат.

Властивості рефлективності випливають з визначень, вони формулюються так.

RfP) Кожний предикат вигляду $=_{xx}$ є неспростовним; кожний предикат вигляду $\equiv_{xx}$ є тотожно істинним, тобто $\equiv_{xx} = \mathrm{T}$.

Властивості транзитивності:

TrP) Для кожного $d \in {}^{V}\!A$ маємо:

$=_{xy}(d) = T$ та $=_{yz}(d) = T \Rightarrow =_{xz}(d) = T$;

$\equiv_{xy}(d) = T$ та $\equiv_{yz}(d) = T \Rightarrow \equiv_{xz}(d) = T$.

Як наслідок маємо:

– кожний предикат вигляду $=_{xy} \,\&\, =_{yz} \to =_{xz}$ неспростовний;

– кожний предикат вигляду $\equiv_{xy} \,\&\, \equiv_{yz} \to \equiv_{xz}$ тотожно істинний: $\equiv_{xy} \,\&\, \equiv_{yz} \to \equiv_{xz} = \mathrm{T}$.

Властивості реномінації $\equiv_{xy}$:

$\mathrm{R}_{\perp}\equiv_{\perp}$) $\mathrm{R}_{\bar{w},\perp,\perp,\perp}^{\bar{v},\bar{u},x,y}(\equiv_{xy}) = \mathrm{T}$;

$\mathrm{R}\equiv_{xx}$) $\mathrm{R}_{\bar{w},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\equiv_{xx}) = \equiv_{xx}$;

$\mathrm{R}_{\perp}\equiv_{2}$) $\mathrm{R}_{\bar{w},\perp,z,s}^{\bar{v},\bar{u},x,y}(\equiv_{xy}) = \equiv_{zs}$;

$\mathrm{R}_{\bar{w},\perp,z,\perp}^{\bar{v},\bar{u},x,y}(\equiv_{xy}) = \neg Ez$;

$\mathrm{R}_{\perp}\equiv_{1}$) за умови $y \notin \{\bar{u},\bar{v}\}$, $x \neq y$ маємо

$\mathrm{R}_{\bar{w},\perp,z}^{\bar{v},\bar{u},x}(\equiv_{xy}) = \equiv_{zy}$;

за умови $y \notin \{\bar{u},\bar{v}\}$, $x \neq y$ маємо

$\mathrm{R}_{\bar{w},\perp,\perp}^{\bar{v},\bar{u},x}(\equiv_{xy}) = \neg Ey$;

$\mathrm{R}_{\perp}\equiv_{0}$) за умови $x, y \notin \{\bar{u},\bar{v}\}$, $x \neq y$ маємо

$\mathrm{R}_{\bar{w},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\equiv_{xy}) = \equiv_{xy}$.

Властивість заміни рівних:

$\equiv\mathrm{R}_{\perp}$r) для кожних $P \in Pr^{A}$ та $d \in {}^{V}\!A$

$\equiv_{xy}(d) = T \Rightarrow \mathrm{R}_{\bar{w},\perp,x}^{\bar{v},\bar{u},z}(P)(d) = \mathrm{R}_{\bar{w},\perp,y}^{\bar{v},\bar{u},z}(P)(d)$.

Властивості реномінації $=_{xy}$:

$\mathrm{R}=_{xx}$) $\mathrm{R}_{\bar{w},\perp,z}^{\bar{v},\bar{u},x}(=_{xx}) = =_{zz}$;

$\mathrm{R}_{\perp}=_{2}$) $\mathrm{R}_{\bar{w},\perp,z,s}^{\bar{v},\bar{u},x,y}(=_{xy}) = =_{zs}$;

$\mathrm{R}_{\perp}=_{1}$) за умови $y \notin \{\bar{u},\bar{v}\}$, $x \neq y$ маємо

$\mathrm{R}_{\bar{w},\perp,z}^{\bar{v},\bar{u},x}(=_{xy}) = =_{zy}$;

$\mathrm{R}_{\perp}=_{0}$) за умови $x, y \notin \{\bar{u},\bar{v}\}$ маємо

$\mathrm{R}_{\bar{w},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(=_{xy}) = =_{xy}$;

$\mathrm{R}_{\perp}=\perp$) $\mathrm{R}_{\bar{w},\perp,\perp}^{\bar{v},\bar{u},x}(=_{xy}) = \text{⅄}$.

Властивість заміни слабко рівних:

$=\mathrm{R}_{\perp}$r) для кожних $P \in Pr^{A}$ та $d \in {}^{V}\!A$

$=_{xy}(d) = T \Rightarrow \Rightarrow \mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,x}(P)(d) = \mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,y}(P)(d)$.

Опишемо властивості, пов'язані з композицією предикатного доповнення.

Згідно визначень отримуємо:

$F(\neg\sim P) = T(\sim P) = \perp(P) = \overline{T(P)} \cap \overline{F(P)}$;

$T(\neg\sim P) = F(\sim P) = \varnothing$;

$\perp(\neg\sim P) = \perp(\sim P) = T(P) \cup F(P)$.

**Твердження 10.** Нехай $Q \in Pr^{V\text{–}A}$, тоді: $\sim\neg Q = \sim Q$; $\sim\sim\sim Q = \sim Q$; $\sim\sim\sim\sim Q = \sim\sim Q$. Для $Q \in PrP^{V\text{–}A}$ додатково: $\sim\sim Q = Q \vee \neg Q$.

Таким чином, багатократне застосування композиції $\sim$ зводиться до 1-кратного та до 2-кратного її застосування.

**Твердження 11.** Маємо таку дію $\sim$ на константні предикати:

$\sim\curlywedge = \mathrm{T}$ та $\sim\mathrm{T} = \sim\mathrm{F} = \sim\Upsilon = \curlywedge$.

Справді, для кожного $d \in {}^{V}A$ маємо

$$\sim\curlywedge(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } \curlywedge(d)\uparrow, \\ \text{невизначене}, & \text{якщо } \curlywedge(d)\downarrow \end{cases} = T.$$

Предикати T, F, $\Upsilon$ тотальні, тому $\sim\mathrm{T} = \sim\mathrm{F} = \sim\Upsilon = \curlywedge$ згідно твердження 1.

Для кожного $Q \in Pr^{V\text{–}A}$ маємо:

**Теорема 3.** $Q \vee \neg Q \vee \sim Q = \mathrm{T}$;

$\sim(Q \vee \neg Q \vee \sim Q) = \curlywedge$.

Справді, $T(Q \vee \neg Q \vee \sim Q) =$

$= T(Q) \cup F(Q) \cup \overline{T(Q) \cup F(Q)} = {}^{V}A$;

$F(Q \vee \neg Q \vee \sim Q) = F(Q) \cap F(\neg Q) \cap F(\sim Q) =$

$= F(Q) \cap T(Q) \cap \varnothing = \varnothing$.

Із визначень отримуємо властивість $\mathrm{R}_{\perp}\sim$-дистрибутивності:

$\mathrm{R}_{\perp}\sim)$ $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\sim Q) = \sim\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(Q)$.

**Теорема 4.** Маємо

$\sim =_{xx} = \neg Ex \vee \curlywedge$; $\sim =_{xy} = \neg Ex \vee \neg Ey \vee \curlywedge$.

Предикати $Ex$ та $\equiv_{xy}$ тотальні, тому $\sim Ez = \curlywedge$ та $\sim\equiv_{xy} = \curlywedge$ згідно твердження 1.

**Мови $_{\perp}$РНЛ**

Опишемо мови РНЛ з композицією предикатного доповнення, розширеними реномінаціями, предикатами-індикаторами та предикатами рівності. Детально розглянемо мови $L_{\perp}^{RC\equiv}$. Із синтаксичного погляду мови $L_{\perp}^{RC\equiv}$ та $L_{\perp}^{RC\equiv P}$ однакові, їх відмінність – у різних класах інтерпретацій.

Далі розглядаємо логіки $P$-предикатів та відповідні класи інтерпретацій.

Алфавіт мови:

– множина $V$ предметних імен (змінних),

– множина $Ps$ предикатних символів,

– множина $Cs_{\perp RC\equiv} = \{\neg, \vee, R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}, \sim, Ex, \equiv_{xy}\}$ символів базових композицій.

Дамо індуктивне визначення множини $Fr$ формул мови:

– кожний $p \in Ps$, кожний $Ex$, кожний $\equiv_{xy}$ є формулою; такі формули атомарні;

– нехай $\Phi, \Psi \in Fr$; тоді $\neg\Phi \in Fr$, $\vee\Phi\Psi \in Fr$, $R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}\Phi \in Fr$, $\sim\Phi \in Fr$.

У множині $V$ виділимо підмножину $V_T \subseteq V$ імен, неістотних для всіх $p \in Ps$ – тотально неістотних імен. Для визначення множин гарантовано неістотних для формул імен таку $\nu$ продовжимо до $\nu : Fr \to 2^V$:

$\nu(\neg\Phi) = \nu(\Phi)$;

$\nu(\vee\Phi\Psi) = \nu(\Phi) \cap \nu(\Psi)$;

$\nu(R^{v_1,\dots,v_n,u_1,\dots,u_m}_{x_1,\dots,x_n,\perp,\dots,\perp}\Phi) =$

$(\nu(\Phi) \cup \{v_1,\dots,v_n, u_1\dots,u_m\}) \setminus \{x_i \mid v_i \notin \nu(\Phi)_{i\in 1,\dots,n}\}$;

$\nu(\sim\Phi) = \nu(\Phi)$;

$\nu(Ex) = V \setminus \{x\}$;

$\nu(\equiv_{xy}) = V \setminus \{x, y\}$.

Розширена сигнатура мови $L_{\perp}^{R\equiv}$ – це $\Sigma = (V, V_T, Cs_{\perp R\equiv}, Ps)$.

**Теорема 5.** Якщо $x \in \nu(\Phi)$, то $x$ неістотне для формули $\Phi$.

Інтерпретуємо мову $L_{\perp}^{RC\equiv}$ на композиційних системах CS = $({}^{V}A, PrP^{V\text{–}A}, C_{\perp RC\equiv})$.

Символи базових композицій інтерпретуємо як відповідні композиції.

Символи $Ex$ інтерпретуємо як відповідні предикати-індикатори $Ex$.

Символи $\equiv_{xy}$ інтерпретуємо як відповідні предикати строгої рівності $\equiv_{xy}$.

Задаємо тотальне однозначне $I : Ps \to PrP^{V\text{–}A}$, яке продовжимо до відображення інтерпретації $I : Fr \to PrP^{V\text{–}A}$:

$I(\neg\Phi) = \neg(I(\Phi))$, $I(\vee\Phi\Psi) = \vee(I(\Phi), I(\Psi))$,

$I(R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}\Phi) = \mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(I(\Phi))$, $I(\sim\Phi) = \sim(I(\Phi))$.

Трійку $\boldsymbol{J} = (\mathrm{CS}, \Sigma, I)$ назвемо *інтерпретацією* мови $L_{\perp}^{RC\equiv}$. Скорочено інтерпретації мови позначаємо як $(A, I)$.

Предметне ім'я $x \in V$ неістотне для формули $\Phi$, якщо при кожній інтерпретації $\boldsymbol{J}$ ім'я $x$ неістотне для предиката $\Phi_J$.

Мову $L_\perp{}^{RC=}$ та $L_\perp{}^{RC=P}$ визначаємо аналогічно мові $L_\perp{}^{RC\equiv}$, лише замість символів $\equiv_{xy}$ пишемо $=_{xy}$.

Мову $L_\perp{}^{RC}$ та $L_\perp{}^{RCP}$ визначаємо аналогічно мові $L_\perp{}^{RC\equiv}$, лише опускаємо пункти для символів $\equiv_{xy}$.

Мови $L_\perp{}^{R\equiv}$ та $L_\perp{}^{R\equiv P}$, $L_\perp{}^{R=}$ та $L_\perp{}^{R=P}$, $L_\perp{}^{R}$ та $L_\perp{}^{RP}$ визначаємо аналогічно мовам $L_\perp{}^{RC\equiv}$, $L_\perp{}^{RC=}$, $L_\perp{}^{RC}$, лише опускаємо пункти, пов'язані з символом $\sim$.

Класи інтерпретацій мови називають семантиками.

У випадках $L_\perp{}^{R}$ та $L_\perp{}^{RC}$ маємо семантики $_\perp\boldsymbol{P}$ та $_\perp\boldsymbol{PC}$.

У випадках $L_\perp{}^{R=}$ та $L_\perp{}^{RC=}$ маємо семантики $_\perp\boldsymbol{P}_=$ та $_\perp\boldsymbol{PC}_=$.

У випадках $L_\perp{}^{R\equiv}$ та $L_\perp{}^{RC\equiv}$ маємо семантики $_\perp\boldsymbol{P}_\equiv$ та $_\perp\boldsymbol{PC}_\equiv$.

Нагадаємо, що ми обмежились розглядом логік $P$-предикатів.

Формула $\Phi$ неспростовна (частково істинна) при інтерпретації $\boldsymbol{J}$, що позн. $\boldsymbol{J} \models \Phi$, якщо предикат $\Phi_J$ – неспростовний.

Формула $\Phi$ неспростовна (частково істинна) в семантиці $\boldsymbol{\alpha}$, що позн. $^{\alpha}\!\models \Phi$, якщо $\boldsymbol{J} \models \Phi$ при кожній $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{\alpha}$.

Формула $\Phi$ тотожно істинна при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ (позн. $\boldsymbol{J} \models_{id} \Phi$), якщо $\Phi_J = \mathrm{T}$.

Формула $\Phi$ тотожно істинна в семантиці $\boldsymbol{\alpha}$ (позн. $^{\alpha}\!\models_{id} \Phi$), якщо $\boldsymbol{J} \models_{id} \Phi$ при кожній $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{\alpha}$.

Якщо семантика $\boldsymbol{\alpha}$ зафіксована, то замість $^{\alpha}\!\models$, $^{\alpha}\!\models_{id}$ пишемо $\models$, $\models_{id}$.

Формула $\Phi$ виконувана при інтерпретації $\boldsymbol{J}$, якщо предикат $\Phi_J$ – виконуваний.

Формула $\Phi$ виконувана в семантиці $\boldsymbol{\alpha}$, якщо $\Phi$ виконувана при деякій $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{\alpha}$.

Із визначень отримуємо:

$\boldsymbol{J} \models_{id} \Phi \Rightarrow \boldsymbol{J} \models \Phi$; $\models_{id} \Phi \Rightarrow \models \Phi$.

В $_\perp$КНЛ множини неспростовних і тотожно істинних формул непорожні:

**Приклад 1.** $^{\alpha}\!\models_{id} Ex \vee \neg Ex$.

**Приклад 2.** $^{\alpha}\!\models =_{xx}$ ($\boldsymbol{\alpha}$ – $_\perp\boldsymbol{P}_=$ чи $_\perp\boldsymbol{PC}_=$).

**Приклад 3.** $^{\alpha}\!\models_{id} \equiv_{xx}$ ($\boldsymbol{\alpha}$ – $_\perp\boldsymbol{P}_\equiv$ чи $_\perp\boldsymbol{PC}_\equiv$).

**Приклад 4** (на основі теореми 3). Для кожних $\Phi \in Fr$ та інтерпретації $\boldsymbol{J}$ маємо $(\Phi \vee \neg\Phi \vee \sim\!\Phi)_J = \mathrm{T}$; $\sim\!(\Phi \vee \neg\Phi \vee \sim\!\Phi)_J =$ ⅄ .

**Приклад 5.** Для кожної $\Phi \in Fr$ $^{\alpha}\!\models_{id} \Phi \vee \neg\Phi \vee \sim\!\Phi$ ($\boldsymbol{\alpha}$ – $_\perp\boldsymbol{PC}$ чи $_\perp\boldsymbol{PC}_=$ чи $_\perp\boldsymbol{PC}_\equiv$).

Формули, які завжди інтерпретуються як константні предикати, назвемо константними. Зокрема,виділяємо $_\mathrm{T}$-формули, $_\mathrm{F}$-формули, $_\perp$-формули. Наприклад, $\equiv_{xx}$ та $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u},x,z}_{\bar{x},\perp,\perp,\perp}(\equiv_{xz})$ – $_\mathrm{T}$-формули; $R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{x},\perp,\perp}(Ez)$ – $_\mathrm{F}$-формула; $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{x},\perp,\perp}(=_{zy})$ – $_\perp$-формула.

**Відношення логічного наслідку**

На множинах формул мов $L_\perp{}^{R}$, $L_\perp{}^{R=}$, $L_\perp{}^{R\equiv}$, $L_\perp{}^{RC}$, $L_\perp{}^{RC=}$, $L_\perp{}^{RC\equiv}$ можна визначити низку відношень логічного наслідку. Зокрема, на ці мови поширимо відомі [2] відношення $^{P}\!\models_{IR}$, $^{P}\!\models_{T}$, $^{P}\!\models_{F}$, $^{P}\!\models_{TF}$, визначені на формулах мови базової РНЛ $L^R$.

Спочатку задамо відношення наслідку для двох формул при фіксованій інтерпретації $\boldsymbol{J}$:

– істиннісний, або $T$-наслідок $_J\!\models_T$:

$$\Phi \ _J\!\models_T \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J) \subseteq T(\Psi_J);$$

– хибнісний, або $F$-наслідок $_J\!\models_F$:

$$\Phi \ _J\!\models_F \Psi \Leftrightarrow F(\Psi_J) \subseteq F(\Phi_J);$$

– сильний, або $TF$-наслідок $_J\!\models_{TF}$:

$$\Phi \ _J\!\models_{TF} \Psi \Leftrightarrow \Phi \ _J\!\models_T \Psi \text{ та } \Phi \ _J\!\models_F \Psi;$$

– неспростовнісний, або $IR$-наслідок $_J\!\models_{IR}$:

$$\Phi \ _J\!\models_{IR} \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J) \cap F(\Psi_J) = \varnothing.$$

Відповідні відношення логічного $\tau$-наслідку в семантиці $\boldsymbol{\alpha}$ задаємо за схемою:

$$\Phi \ ^{\alpha}\!\models_\tau \Psi, \text{ якщо } \Phi \ _J\!\models_\tau \Psi \text{ для кожної } \boldsymbol{J} \in \boldsymbol{\alpha}.$$

Відношення логічного наслідку поширюються на пари множин формул.

Нехай $\Sigma \subseteq Fr$, $\boldsymbol{J}$ – інтерпретація.

Далі позначаємо:

$\bigcap_{\theta\in\Sigma} T(\theta_J)$ як $T^{\cap}(\Sigma_J)$, $\bigcup_{\theta\in\Sigma} T(\theta_J)$ як $T^{\cup}(\Sigma_J)$,

$\bigcap_{\theta\in\Sigma} F(\theta_J)$ як $F^{\cap}(\Sigma_J)$, $\bigcup_{\theta\in\Sigma} F(\theta_J)$ як $F^{\cup}(\Sigma_J)$,

$\bigcap_{\theta\in\Sigma} \perp(\theta_J)$ як $\perp^{\cap}(\Sigma_J)$, $\bigcup_{\theta\in\Sigma} \perp(\theta_J)$ як $\perp^{\cup}(\Sigma_J)$.

Нехай $\Gamma, \Delta \subseteq Fr$.

$\Delta$ є $IR$-наслідком $\Gamma$ при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ (позн. $\Gamma \ _J\!\models_{IR} \Delta$), якщо $T^{\cap}(\Gamma_J) \cap F^{\cap}(\Delta_J) = \varnothing$.

$\Delta$ є $T$-наслідком $\Gamma$ при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ (позн. $\Gamma \ _J\!\models_T \Delta$), якщо $T^{\cap}(\Gamma_J) \subseteq T^{\cup}(\Delta_J)$.

$\Delta$ є $F$-наслідком $\Gamma$ при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ (позн. $\Gamma\ {}_J|\!=_F \Delta$), якщо $F^{\cap}(\Delta_J) \subseteq F^{\cup}(\Gamma_J)$.

$\Delta$ є $TF$-наслідком $\Gamma$ при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ (позн. $\Gamma\ {}_J|\!=_{TF} \Delta$), якщо $\Gamma\ {}_J|\!=_T \Delta$ та $\Gamma\ {}_J|\!=_F \Delta$.

Відповідні відношення логічного $\tau$-наслідку в семантиці $\boldsymbol{\alpha}$ задаємо за схемою:

$\Gamma\ {}^{\alpha}|\!=\tau\ \Delta$, якщо $\Gamma\ {}_J|\!=\tau\ \Delta$ для кожної $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{\alpha}$.

**Відношення логічного наслідку в $_{\perp}$L**

Далі $\boldsymbol{\alpha}$ – це одна із $_{\perp}\boldsymbol{P}$, $_{\perp}\boldsymbol{P}_{=}$, $_{\perp}\boldsymbol{P}_{\equiv}$.

В кожній з логік $L_{\perp}^{RP}$, $L_{\perp}^{R=P}$ та $L_{\perp}^{R\equiv P}$ маємо по 4 різних невироджених відношень (для стислості не пишемо символ $_{\perp}$):

$^{P}|\!=_{IR}$, $^{P}|\!=_{T}$, $^{P}|\!=_{F}$, $^{P}|\!=_{TF}$;
$^{P=}|\!=_{IR}$, $^{P=}|\!=_{T}$, $^{P=}|\!=_{F}$, $^{P=}|\!=_{TF}$;
$^{P\equiv}|\!=_{IR}$, $^{P\equiv}|\!=_{T}$, $^{P\equiv}|\!=_{F}$, $^{P\equiv}|\!=_{TF}$.

Як побачимо нижче, деякі з цих відношень в $L_{\perp}^{R=P}$ є некоректними.

Співвідношення між цими відношеннями можна подати так (тут 3 однотипних співвідношення в $L_{\perp}^{R}$, $L_{\perp}^{R=}$, $L_{\perp}^{R\equiv P}$):

$^{\#}|\!=_{TF} \subset {}^{\#}|\!=_{T} \subset {}^{\#}|\!=_{IR}$; $^{\#}|\!=_{TF} \subset {}^{\#}|\!=_{F} \subset {}^{\#}|\!=_{IR}$;
$^{\#}|\!=_{T} \not\subset {}^{\#}|\!=_{F}$; $^{\#}|\!=_{T} \not\subset {}^{\#}|\!=_{F}$.

Тут позначення: # – одне з $P$, $P$=, $P$≡.

Відношення логічного наслідку задають відношення логічної еквівалентності.

Відношення еквівалентності при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ $_J\!\sim_T$, $_J\!\sim_F$, $_J\!\sim_{TF}$, $_J\!\sim_{IR}$ визначаємо за такою схемою:

$\Phi\ {}_J\!\sim_* \Psi$, якщо $\Phi\ {}_J|\!=_* \Psi$ та $\Psi\ {}_J|\!=_* \Phi$.

Відношення логічної еквівалентності

$^{P}\!\sim_{IR}$, $^{P}\!\sim_{T}$, $^{P}\!\sim_{F}$, $^{P}\!\sim_{TF}$;
$^{P=}\!\sim_{IR}$, $^{P=}\!\sim_{T}$, $^{P=}\!\sim_{F}$, $^{P=}\!\sim_{TF}$;
$^{P}\!\sim_{IR}$, $^{P}\!\sim_{T}$, $^{P}\!\sim_{F}$, $^{P}\!\sim_{TF}$

визначаємо за такою схемою:

$\Phi\ {}^{\alpha}\!\sim_* \Psi$, якщо $\Phi\ {}^{\alpha}|\!=_* \Psi$ та $\Psi\ {}^{\alpha}|\!=_* \Phi$.

**Твердження 12.** Маємо

$\Phi\ {}^{\alpha}\!\sim_* \Psi \Leftrightarrow \Phi\ {}_J\!\sim_* \Psi$ для кожної $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{\alpha}$.

Особливе значення має відношення $_J\!\sim_{TF}$. Це випливає з наступного:

$\Phi\ {}_J\!\sim_{TF} \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J) = T(\Psi_J)$ та $F(\Phi_J) = F(\Psi_J)$.

Отже, $\Phi\ {}_J\!\sim_{TF} \Psi$ означає: $\Phi_J$ та $\Psi_J$ – це один і той же предикат.

Надалі використовуємо позначення:

$|\!=_*$ – довільне з введених відношень;
$^{\equiv}|\!=_*$ – одне з $^{P\equiv}|\!=_{TF}$, $^{P\equiv}|\!=_{T}$, $^{P\equiv}|\!=_{F}$, $^{P\equiv}|\!=_{IR}$;
$^{\#}|\!=_{\rho}$ – відношення типу $\rho$ в конкретній $L_{\perp}^{R}$, $L_{\perp}^{R=}$, $L_{\perp}^{R\equiv}$, де $\rho$ – одне з $IR$, $T$, $F$,$TF$;
$|\!=_{\rho}$ – відношення типу $\rho$, тобто одне з $^{\#}|\!=_{\rho}$, де # – одне з $P$, $P$=, $P$≡;
$^{\#}\!\sim_{TF}$ – одне з $^{P}\!\sim_{TF}$, $^{P=}\!\sim_{TF}$, $^{P\equiv}\!\sim_{TF}$;
$^{\#}\!\sim_{\rho}$ – відношення типу $\rho$ в конкретній $L_{\perp}^{R}$, $L_{\perp}^{R=}$, $L_{\perp}^{R\equiv}$, де $\rho$ – одне з $IR$, $T$, $F$,$TF$;
$\sim_{\rho}$ – відношення типу $\rho$;
$\sim_*$ – одне з $\sim_{\rho}$, де $\rho$ – одне з $IR$, $T$, $F$,$TF$.

Віднощення типів $T$ та $F$ пов’язані:

**Теорема 6**. $\Phi\ |\!=_F \Psi \Leftrightarrow \neg\Psi\ |\!=_T \neg\Phi$.

Основою еквівалентних перетворень є теорема еквівалентності. В $L_{\perp}^{R}$, $L_{\perp}^{R=}$, $L_{\perp}^{R\equiv}$ умова теореми формулюється для $^{\#}\!\sim_{TF}$.

**Теорема 7**. Нехай $\Phi'$ отримано з формули $\Phi$ заміною деяких входжень формул $\Phi_1, ..., \Phi_n$ на формули $\Psi_1, ..., \Psi_n$. Якщо $\Phi_1\ {}^{\#}\!\sim_{TF} \Psi_1$, ..., $\Phi_n\ {}^{\#}\!\sim_{TF} \Psi_n$, то $\Phi \sim_* \Phi'$.

Для відношень $^{\#}\!\sim_T$ та $^{\#}\!\sim_F$ в умові теорема еквівалентності невірна.

Для $^{\#}\!\sim_{IR}$ в умові маємо ослаблене твердження: $\Phi\ {}^{\#}\!\sim_{IR} \Phi'$ замість $\Phi \sim_* \Phi'$.

Аналогом теореми еквівалентності для множин формул є теорема заміни еквівалентних. Вона формулюється однотипно в кожній із $L_{\perp}^{R}$, $L_{\perp}^{R=}$, $L_{\perp}^{R\equiv}$.

**Теорема 8.** Нехай $\Phi\ {}^{\#}\!\sim_{TF} \Psi$, тоді:

$\Phi, \Gamma\ |\!=_* \Delta \Leftrightarrow \Psi, \Gamma\ |\!=_* \Delta$;
$\Gamma\ |\!=_* \Delta, \Phi \Leftrightarrow \Gamma\ |\!=_* \Delta, \Psi$.

Розглянемо властивості введених відношень логічного наслідку.

Для всіх відношень виконується властивість *монотонності*:

M) $\Gamma \subseteq \Lambda$, $\Delta \subseteq \Sigma \Rightarrow (\Gamma\ |\!=_* \Delta \Rightarrow \Lambda\ |\!=_* \Sigma)$.

Властивості *декомпозиції* формул:

$\neg\neg_{\mathrm{L}}$) $\neg\neg\Phi, \Gamma\ |\!=_* \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma\ |\!=_* \Delta$;
$\neg\neg_{\mathrm{R}}$) $\Gamma\ |\!=_* \Delta, \neg\neg\Phi \Leftrightarrow \Gamma\ |\!=_* \Delta, \Phi$;
$\vee_{\mathrm{L}}$) $\Phi\vee\Psi, \Gamma\ |\!=_* \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma\ |\!=_* \Delta$ та $\Psi, \Gamma\ |\!=_* \Delta$;
$\vee_{\mathrm{R}}$) $\Gamma\ |\!=_* \Delta, \Phi\vee\Psi \Leftrightarrow \Gamma\ |\!=_* \Delta, \Phi, \Psi$;
$\neg\vee_{\mathrm{L}}$) $\neg(\Phi\vee\Psi), \Gamma\ |\!=_* \Delta \Leftrightarrow \neg\Phi, \neg\Psi, \Gamma\ |\!=_* \Delta$;
$\neg\vee_{\mathrm{R}}$) $\Gamma\ |\!=_* \Delta, \neg(\Phi\vee\Psi) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \Gamma\ |\!=_* \Delta, \neg\Phi$ та $\Gamma\ |\!=_* \Delta, \neg\Psi$;

Для $|\!=_{IR}$ додатково маємо:

$\neg_{\mathrm{L}}$) $\neg\Phi, \Gamma\ |\!=_{IR} \Delta \Leftrightarrow \Gamma\ {}^{\#}|\!=_{IR} \Delta, \Phi$;
$\neg_{\mathrm{R}}$) $\Gamma\ |\!=_{IR} \Delta, \neg\Phi \Leftrightarrow \Phi, \Gamma\ |\!=_{IR} \Delta$.

Базові властивості, які гарантують *наявність* відношення логічного наслідку:

*C*) $\Phi, \Gamma\ |\!=_* \Delta, \Phi$;

*CL*) $\Phi, \neg\Phi, \Gamma \mid=_T \Delta$;

*CR*) $\Gamma \mid=_F \Delta, \Phi, \neg\Phi$;

*CLR*) $\Phi, \neg\Phi, \Gamma \mid=_{TF} \Delta, \Psi, \neg\Psi$.

Властивості еквівалентних перетворень індуковані властивостями предикатів R, R⊥I, R⊥U, R⊥¬, R⊥∨, R⊥R із твердження 6. Кожна з них задає 4 властивості для відношення логічного наслідку, коли виділена формула чи її заперечення – в лівій чи правій частині відношення. При кожній інтерпретації предикати, що є значеннями виділених формул, збігаються, тому ці властивості вірні для усіх розглянутих відношень логічного наслідку. Наведемо тут для прикладу властивості, індуковані R⊥∨:

$R_{\perp}\vee_{L}$) $R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\Phi \vee \Psi), \Gamma \mid=_* \Delta \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\Phi), \Gamma \mid=_* \Delta \text{ та } R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\Psi), \Gamma \mid=_* \Delta;$$

$R_{\perp}\vee_{R}$) $\Gamma \mid=_* \Delta, R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\Phi \vee \Psi) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \Gamma \mid=_* \Delta, R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\Phi), R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\Psi);$$

$\neg R_{\perp}\vee_{L}$) $\neg R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\Phi \vee \Psi), \Gamma \mid=_* \Delta \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \neg R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\Phi),\ \neg R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\Psi), \Gamma \mid=_* \Delta;$$

$\neg R_{\perp}\vee_{R}$) $\Gamma \mid=_* \Delta, \neg R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\Phi \vee \Psi) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \Gamma \mid=_* \Delta, \neg R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\Phi) \text{ та } \Gamma \mid=_* \Delta, \neg R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\Psi).$$

Для відношень $\mid=_{IR}$ в силу $\neg_L$ та $\neg_R$ властивості вигляду ¬R∗ є похідними.

**Твердження 13.** Нехай предикат $Q$ – тотальний однозначний. Тоді

$A \cap T(Q) \subseteq B \Leftrightarrow A \subseteq B \cup F(Q)$;

$A \cap F(Q) \subseteq B \Leftrightarrow A \subseteq B \cup T(Q)$.

На основі твердження 13 отримуємо, що при перенесенні формули ¬Φ, яка завжди інтерпретується як тотальний однозначний предикат, з лівої частини відношення логічного наслідку у праву і навпаки, можна знімати ¬. Звідси властивості:

$\neg_E$) $\neg Ey, \Gamma \mid=_* \Delta \Leftrightarrow \Gamma \mid=_* \Delta, Ey$;

$\Gamma \mid=_* \Delta, \neg Ey \Leftrightarrow Ey, \Gamma \mid=_* \Delta$;

$\neg_{R\perp E}$) $\neg R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(Ez), \Gamma \mid=_* \Delta \Leftrightarrow \Gamma \mid=_* \Delta, R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(Ez)$;

$\Gamma \mid=_* \Delta, \neg R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(Ez) \Leftrightarrow R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(Ez), \Gamma \mid=_* \Delta$;

$\neg_{\equiv}$) $\Gamma^{\equiv}\mid=_* \neg \equiv_{xy}, \Delta \Leftrightarrow \equiv_{xy}, \Gamma^{\equiv}\mid=_* \Delta$;

$\neg \equiv_{xy}, \Gamma^{\equiv}\mid=_* \Delta \Leftrightarrow \Gamma^{\equiv}\mid=_* \equiv_{xy}, \Delta$;

$\neg_{R\perp\equiv}$) $\Gamma^{\equiv}\mid=_* \Delta, \neg R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(\equiv_{xy}) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(\equiv_{xy}), \Gamma^{\equiv}\mid=_* \Delta;$$

$$\neg R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(\equiv_{xy}), \Gamma^{\equiv}\mid=_* \Delta \Leftrightarrow \Gamma^{\equiv}\mid=_* \Delta, R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(\equiv_{xy}).$$

Для відношень $\mid=_{IR}$ властивості $\neg_E$ та $\neg_{R\perp E}$ є окремими випадками $\neg_L$ та $\neg_R$.

Розглянемо властивості, пов'язані з *предикатами-індикаторами*.

Спрощення при реномінації *Ez*:

$R_{\perp E}$) $R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(Ez), \Gamma \mid=_* \Delta \Leftrightarrow Ez, \Gamma \mid= \Delta$ та

$\Gamma \mid=_* \Delta, R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(Ez) \Leftrightarrow \Gamma \mid=_* \Delta, Ez$ ($z \notin \{\bar{v}, \bar{u}\}$);

$R_{\perp Ev}$) $R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{x},\perp,y}(Ez), \Gamma \mid=_* \Delta \Leftrightarrow Ey, \Gamma \mid= \Delta$ та

$\Gamma \mid=_* \Delta, R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{x},\perp,y}(Ez) \Leftrightarrow \Gamma \mid=_* \Delta, Ey$.

Спрощення – елімінація $_F$-формули:

$El_{RE}$) $\Gamma \mid=_* \Delta, R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{x},\perp,\perp}(Ez) \Leftrightarrow \Gamma \mid=_* \Delta$.

Пов'язана з константними $_F$-формулами умова наявності логічного наслідку:

*CF*) $R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{x},\perp,\perp}(Ez), \Gamma \mid=_* \Delta$.

Опишемо властивості відношень логічного наслідку в $L_{\perp}^{R=}$, пов’язані з $=_{xy}$.

Властивість TrP індукує:

$Tr_L$) $=_{xy}, =_{yz}, \Gamma \mid= \Delta \Leftrightarrow =_{xy}, =_{yz}, =_{xz} \Gamma \mid=_* \Delta$ ($\mid=$ – це ${}^{P=}\mid=_{IR}$ чи ${}^{P=}\mid=_T$);

$Tr_R$) $\Gamma \mid= \Delta, \neg =_{xy}, \neg =_{yz} \Leftrightarrow$ $\Gamma \mid= \Delta, \neg =_{xy}, \neg =_{yz}, \neg =_{xz}$ ($\mid=$ – ${}^{P=}\mid=_{IR}$ чи ${}^{P=}\mid=_F$).

Це випливає із того, що $T(=_{xy}) \cap T(=_{yz}) = T(=_{xy}) \cap T(=_{yz}) \cap T(=_{xz})$.

**Теорема 9.** $Tr_L$ невірна для ${}^{P=}\mid=_F$; $Tr_R$ невірна для ${}^{P=}\mid=_T$.

Справді, для $d = [x \mapsto a, z \mapsto b]$ маємо $d \notin F(=_{xy}) \cup F(=_{yz}) = F(=_{xy} \,\&\, =_{yz})$; проте $d \in F(=_{xz}) \subseteq F(=_{xy} \,\&\, =_{yz} \,\&\, =_{xz})$. Враховуючи теорему 6, тоді $=_{xy} \,\&\, =_{yz} {}^{P=}\mid\neq_F =_{xy} \,\&\, =_{yz} \,\&\, =_{xz}$ та $\neg =_{xy} \vee \neg =_{yz} \vee \neg =_{xz} {}^{P=}\mid\neq_T \neg =_{xy} \vee \neg =_{yz}$.

Транзитивність слабкої рівності порушена для ${}^{P=}\mid=_F$ та ${}^{P=}\mid=_T$, тому й для ${}^{P=}\mid=_{TF}$. Отже, в $L_{\perp}^{R=}$ ці відношення некоректні.

Таким чином, для $L_{\perp}^{R=}$ коректним залишається лише відношення ${}^{P=}\mid=_{IR}$.

Властивість транзитивності ${}^{P=}\mid=_{IR}$:

Tr=) $=_{xy}, =_{yz}, \Gamma\, {}^{P=}\mid=_{IR} \Delta \Leftrightarrow =_{xy}, =_{yz}, =_{xz} \Gamma\, {}^{P=}\mid=_{IR} \Delta$.

Кожна з властивостей $R=_{xx}$, $R_{\perp}=_2$, $R_{\perp}=_1$, $R_{\perp}=_0$ для предикатів задає 2 властивості еквівалентних перетворень для ${}^{P=}\mid=_{IR}$. Для прикладу властивості, задані $R_{\perp}=_1$:

$R_{\perp}=_{1L}$) за умови $y \notin \{\bar{u}, \bar{v}\}$, $x \neq y$ маємо

$$R^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{w},\perp,z}(=_{xy}), \Gamma\, {}^{P=}\mid=_{IR} \Delta \Leftrightarrow =_{zy}, \Gamma\, {}^{P=}\mid=_{IR} \Delta;$$

R$_\perp$=$_{1R}$) за умови $y \notin \{\bar{u}, \bar{v}\}$, $x \neq y$ маємо

$$\Gamma\ {}^{P=}|\!=_{IR} \Delta, R^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{w},\perp,z}(=_{xy}) \Leftrightarrow \Gamma\ {}^{P=}|\!=_{IR} \Delta, =_{zy}.$$

Властивість =R$_\perp$r індукує властивості заміни рівних для відношення ${}^{P}|\!=_{IR}$:

=R$_\perp$r$_L$) $=_{xy}, R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,x}(\Phi), \Gamma\ {}^{P=}|\!=_{IR} \Delta \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow =_{xy}, R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,x}(\Phi), R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,y}(\Phi), \Gamma\ {}^{P=}|\!=_{IR} \Delta;$$

=R$_\perp$r$_R$) $=_{xy}, \Gamma\ {}^{P=}|\!=_{IR} R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,x}(\Phi), \Delta \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow =_{xy}, \Gamma\ {}^{P=}|\!=_{IR} R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,x}(\Phi), R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,y}(\Phi), \Delta.$$

RfP індукує умову наявності ${}^{P=}|\!=_{IR}$:

$C_{\mathrm{Rf=}}$) $\Gamma\ {}^{P=}|\!=_{IR} x = x, \Delta$.

R$_\perp$=$\perp$ дає такі умови наявності ${}^{P=}|\!=_{IR}$:

$C\perp_L$) $R^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{w},\perp,\perp}(=_{xy}), \Gamma\ {}^{P=}|\!=_{IR} \Delta$;

$C\perp_R$) $\Gamma\ {}^{P=}|\!=_{IR} \Delta, R^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{w},\perp,\perp}(=_{xy})$.

Умови наявності ${}^{P=}|\!=_{IR}$ (випливають з $T(=_{xy}) \cap F(Ex) = \varnothing$ та $F(=_{xy}) \cap F(Ex) = \varnothing$):

$CE=_L$) $=_{xy}, \Gamma\ {}^{P=}|\!=_{IR} Ex, \Delta$;

$CE=_R$) $\Gamma\ {}^{P=}|\!=_{IR} =_{xy}, Ex, \Delta$.

На основі TrP отримуємо транзитивність для предикатів рівності $\equiv_{xy}$:

Tr$\equiv$) $\equiv_{xy}, \equiv_{yz}, \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_{*} \Delta \Leftrightarrow \equiv_{xy}, \equiv_{yz}, \equiv_{xz}, \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_{*} \Delta$.

На основі R$_\perp\equiv_\perp$ та того, що $\equiv_{xx}$ = T, маємо елімінацію константної $_T$-формули:

ElR$_\equiv$) $R^{\bar{v},\bar{u},x,y}_{\bar{x},\perp,\perp,\perp}(\equiv_{xy}), \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_{*} \Delta \Leftrightarrow \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_{*} \Delta$.

El$_{\equiv xx}$) $\equiv_{xx}, \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_{*} \Delta \Leftrightarrow \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_{*} \Delta$.

Кожна з властивостей предикатів R$\equiv_{xx}$, R$_\perp\equiv_2$, R$_\perp\equiv_1$, R$_\perp\equiv_0$ задає властивості еквівалентних перетворень (всього 12). Для прикладу властивості, індуковані R$_\perp\equiv_2$:

R$_\perp\equiv_{2L}$) $R^{\bar{v},\bar{u},x,y}_{\bar{w},\perp,z,s}(\equiv_{xy}), \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_{*} \Delta \Leftrightarrow \equiv_{zs}, \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_{*} \Delta$;

$$R^{\bar{v},\bar{u},x,y}_{\bar{w},\perp,z,\perp}(\equiv_{xy}), \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_{*} \Delta \Leftrightarrow \neg Ez, \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_{*} \Delta;$$

R$_\perp\equiv_{2R}$) $\Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_{*} \Delta, R^{\bar{v},\bar{u},x,y}_{\bar{w},\perp,z,s}(\equiv_{xy}) \Leftrightarrow \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_{*} \Delta, \equiv_{zs}$;

$$\Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_{*} \Delta, R^{\bar{v},\bar{u},x,y}_{\bar{w},\perp,z,\perp}(\equiv_{xy}) \Leftrightarrow \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_{*} \Delta, \neg Ez.$$

Властивість $\equiv$R$_\perp$r індукує властивості заміни рівних:

$\equiv$R$_\perp$r$_L$) $\equiv_{xy}, R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,x}(\Phi), \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_{*} \Delta \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \equiv_{xy}, R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,x}(\Phi), R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,y}(\Phi), \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_{*} \Delta;$$

$\equiv$R$_\perp$r$_R$) $\equiv_{xy}, \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_{*} R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,x}(\Phi), \Delta \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \equiv_{xy}, \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_{*} R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,x}(\Phi), R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,y}(\Phi), \Delta;$$

$\equiv\neg$R$_\perp$r$_L$) $\equiv_{xy}, \neg R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,x}(\Phi), \Gamma\ |\!=_{*} \Delta \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \equiv_{xy}, \neg R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,x}(\Phi), \neg R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,y}(\Phi), \Gamma\ |\!=_{*} \Delta;$$

$\equiv\neg$R$_\perp$r$_R$) $\equiv_{xy}, \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_{*} \neg R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,x}(\Phi), \Delta \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \equiv_{xy}, \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_{*} \neg R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,x}(\Phi), \neg R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,y}(\Phi), \Delta.$$

Властивість RfP індукує умову наявності кожного з ${}^{P\equiv}|\!=_{TF}$, ${}^{P\equiv}|\!=_{T}$, ${}^{P\equiv}|\!=_{F}$, ${}^{P\equiv}|\!=_{IR}$:

$C_{\mathrm{Rf}}$) $\Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_{*} \equiv_{xx}, \Delta$.

R$_\perp\equiv\perp$ дає пов'язану з $_T$-формулами умову наявності ${}^{P\equiv}|\!=_{TF}$, ${}^{P\equiv}|\!=_{T}$, ${}^{P\equiv}|\!=_{F}$, ${}^{P\equiv}|\!=_{IR}$:

$CT_\equiv$) $\Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_{*} \Delta, R^{\bar{v},\bar{u},x,z}_{\bar{x},\perp,\perp,\perp}(\equiv_{xz})$.

Властивості, пов'язані з $Ex$ та $\equiv_{xy}$:

$\equiv$E) $\equiv_{xy}, \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_{*} \Delta \Leftrightarrow \equiv_{xy}, Ex, Ey, \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_{*} \Delta$

та $\equiv_{xy}, \Gamma\ {}^{\equiv}|\!=_{*} \Delta, Ex, Ey$.

**Відношення логічного наслідку в $_\perp$LC**

Далі $\alpha$ – це одна із $_\perp$***PC***, $_\perp$***PC***$_=$, $_\perp$***PC***$_\equiv$.

Маємо 12 різних відношень:

${}^{PC}|\!=_{IR}$, ${}^{PC}|\!=_{T}$, ${}^{PC}|\!=_{F}$, ${}^{PC}|\!=_{TF}$;

${}^{PC=}|\!=_{IR}$, ${}^{P=}|\!=_{T}$, ${}^{PC=}|\!=_{F}$, ${}^{PC=}|\!=_{TF}$;

${}^{PC\equiv}|\!=_{IR}$, ${}^{PC\equiv}|\!=_{T}$, ${}^{PC\equiv}|\!=_{F}$, ${}^{PC\equiv}|\!=_{TF}$.

В кожній з $L_\perp^{PC}$, $L_\perp^{PC=}$, $L_\perp^{PC\equiv}$ маємо по 4 таких відношень: ${}^{C\#}|\!=_{IR}$, ${}^{C\#}|\!=_{T}$, ${}^{C\#}|\!=_{F}$, ${}^{C\#}|\!=_{TF}$. Співвідношення між ними такі ж, як між відношеннями ${}^{\#}|\!=_{IR}$, ${}^{\#}|\!=_{T}$, ${}^{\#}|\!=_{F}$, ${}^{\#}|\!=_{TF}$.

Тут і далі $|\!=_{*}$ – одне з цих 12 відношень; $C\#$ – одне з $PC$, $PC=$, $PC\equiv$.

Властивості, в яких не фігурує композиція $^{\sim}$, аналогічні описаним вище властивостям відношень ${}^{\#}|\!=_{IR}$, ${}^{\#}|\!=_{T}$, ${}^{\#}|\!=_{F}$, ${}^{\#}|\!=_{TF}$.

**Теорема 10.** 1) Для відношень ${}^{PC\#}|\!=_{IR}$ коректна декомпозиція $^{\sim}\Phi$ неможлива;
2) $\Phi\ {}^{PC\#}|\!\neq_{T} {}^{\sim}\Phi$ та $\neg{}^{\sim}\Phi\ {}^{PC\#}|\!\neq_{F} \Phi$;
3) завжди $\Gamma\ {}^{PC\#}|\!=_{F} {}^{\sim}\Phi$ та $\neg{}^{\sim}\Phi\ {}^{PC\#}|\!=_{T} \Delta$.

П.1 для ${}^{PC}|\!=_{IR}$ розглянуто в [8]. Випадки ${}^{PC=}|\!=_{IR}$ та ${}^{PC\equiv}|\!=_{IR}$ доводяться аналогічно.

П.2 випливає з того, що для всіх інтерпретацій $\boldsymbol{J}$ $T(\Phi_J) \not\subset T({}^{\sim}\Phi_J) = \perp(\Phi_J)$ та $F(\Phi_J) \not\subset F(\neg{}^{\sim}\Phi_J) = \perp(\Phi_J)$; П.3 – із того, що $F({}^{\sim}\Phi_J) = T(\neg{}^{\sim}\Phi_J) = \varnothing$ для всіх $\boldsymbol{J}$.

Декомпозиція формул необхідна при побудові секвенційного числення, яке формалізує відповідне відношення логічного наслідку. Для ${}^{PC\#}|\!=_{IR}$ декомпозиція вимагає явного виділення $\perp$-області, адже умова для ${}_{J}|\!=_{IR}$ не дає змоги її подати через $T$-область і $F$-область за допомогою $\cap$ та $\cup$. Це означає перехід від ${}^{PC}|\!=_{IR}$ до загальнішого відношення $|\!=_{IR}^{\perp}$ (див. нижче).

 

Згідно теореми 8, для $L_{\perp}^{R=}$ відношення типів $|=_T$, $|=_F$, $|=_{TF}$ некоректні, тому ці відношення некоректні для $L_{\perp}^{RC=}$. Водночас для $L_{\perp}^{RC}$ відношення типу $|=_{IR}$ теж некоректне. Тому $L_{\perp}^{RC=}$ далі не розглядаємо.

Для $L_{\perp}^{RC}$ та $L_{\perp}^{RC\equiv}$ маємо описані вище властивості відношень логічного наслідку:

– декомпозиції $\neg\neg_L$, $\neg\neg_R$, $\vee_L$, $\vee_R$, $\neg\vee_L$, $\neg\vee_R$;

– еквівалентних перетворень на основі $R_{\perp}$, $R_{\perp}I$, $R_{\perp}U$, $R_{\perp}R$, $R_{\perp}\neg$, $R_{\perp}\vee$;

– $R_{\perp E}$, $R_{\perp Ev}$, $\neg_E$, $\neg_{R\perp E}$, $El_{RE}$.

Додатково для $L_{\perp}^{RC\equiv}$ маємо успадковані від $L_{\perp}^{R\equiv}$ властивості, пов'язані з $\equiv_{xy}$:

– $\neg_{\equiv}$, $\neg_{R\perp\equiv}$, $El_{\equiv xx}$, $ElR_{\equiv}$;

– еквівалентних перетворень на основі $R\equiv_{xx}$, $R_{\perp}\equiv_2$, $R_{\perp}\equiv_1$, $R_{\perp}\equiv_0$;

– TrS та $\equiv R_{\perp}r_L$, $\equiv R_{\perp}r_R$, $\equiv\neg R_{\perp}r_L$, $\equiv\neg R_{\perp}r_R$.

Виконуються також успадковані від $L_{\perp}^{R}$ та $L_{\perp}^{R\equiv}$ властивості, які гарантують наявність відношення логічного наслідку:

– $C$, $CL$, $CF$ для ${}^{PC}|=_T$;

– $C$, $CL$, $CF$, $C_{Rf}$, $CT_{\equiv}$ для ${}^{PC\equiv}|=_T$;

– $C$, $CR$, $CF$ для ${}^{PC}|=_F$;

– $C$, $CR$, $CF$, $C_{Rf}$, $CT_{\equiv}$ для ${}^{PC\equiv}|=_F$.

До властивостей еквівалентних перетворень додамо нові, індуковані $R_{\perp}{}^{\sim}$:

$R^{\sim}{}_L$) $R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}({}^{\sim}\Phi), \Gamma \,|=_*\, \Delta \Leftrightarrow {}^{\sim}R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\Phi), \Gamma \,|=_*\, \Delta$;

$R^{\sim}{}_R$) $\Gamma \,|=_*\, \Delta, R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}({}^{\sim}\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \,|=_*\, \Delta, {}^{\sim}R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\Phi)$;

$\neg R^{\sim}{}_L$) $\neg R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}({}^{\sim}\Phi), \Gamma \,|=_*\, \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \neg{}^{\sim}R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\Phi), \Gamma \,|=_*\, \Delta$;

$\neg R^{\sim}{}_R$) $\Gamma \,|=_*\, \Delta, \neg R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}({}^{\sim}\Phi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma \,|=_*\, \Delta, \neg{}^{\sim}R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\Phi)$.

Властивості декомпозиції формул вигляду ${}^{\sim}\Phi$ в ${}^{PC}|=_T$ та ${}^{PC}|=_F$ описано в [8]. Вони поширюються на усі ${}^{C\#}|=_T$ та ${}^{C\#}|=_F$.

**Теорема 11.** Маємо властивості:

${}^{\sim}{}_{LT}$) ${}^{\sim}\Phi, \Gamma \;{}^{C\#}|=_T \Delta \Leftrightarrow \Gamma \;{}^{C\#}|=_T \Delta, \Phi, \neg\Phi$;

${}^{\sim}{}_{RT}$) $\Gamma \;{}^{C\#}|=_T \Delta, {}^{\sim}\Phi \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \;{}^{C\#}|=_T \Delta$ та $\neg\Phi, \Gamma \;{}^{C\#}|=_T \Delta$;

$\neg{}^{\sim}{}_{RF}$) $\Gamma \;{}^{C\#}|=_F \Delta, \neg{}^{\sim}\Phi \Leftrightarrow \Gamma, \Phi, \neg\Phi \;{}^{C\#}|=_F \Delta$;

$\neg{}^{\sim}{}_{LF}$) $\neg{}^{\sim}\Phi, \Gamma \;{}^{C\#}|=_F \Delta \Leftrightarrow \Gamma \;{}^{C\#}|=_T \Delta, \Phi$ та $\Gamma \;{}^{C\#}|=_T \Delta, \neg\Phi$;

$\neg{}^{\sim}{}_{El}$) $\Gamma \;{}^{C\#}|=_T \Delta, \neg{}^{\sim}\Phi \Leftrightarrow \Gamma \;{}^{C\#}|=_T \Delta$;

${}^{\sim}{}_{El}$) ${}^{\sim}\Phi, \Gamma \;{}^{C\#}|=_F \Delta \Leftrightarrow \Gamma \;{}^{C\#}|=_F \Delta$.

$\neg{}^{\sim}{}_{El}$ та ${}^{\sim}{}_{El}$ – це властивості елімінації ${}^{\sim}\Phi$.

Виділені ${}^{\sim}\Phi$ та $\neg{}^{\sim}\Phi$ можуть бути в лівій та в правій частині відношення типу $|=_T$ та типу $|=_F$ – всього 8 комбінацій; 6 вже описано в теоремі 10. Залишились 2 комбінації, які дають умови *гарантованої наявності* відповідного відношення логічного наслідку (див. п.3 теореми 9). Тому маємо:

$C^{\sim}$) $\Gamma \;{}^{C\#}|=_F {}^{\sim}\Phi, \Delta$;

$C\neg^{\sim}$) $\neg{}^{\sim}\Phi, \Gamma \;{}^{C\#}|=_T \Delta$.

Зауважимо, що аналогічна до $C^{\sim}$ властивість для ${}^{C\#}|=_T$ – це ${}^{\sim}{}_{LT}$, аналогічна до $C\neg^{\sim}$ властивість для ${}^{C\#}|=_F$ – це $\neg{}^{\sim}{}_{LF}$.

Для відношень типу $|=_T$ та типу $|=_F$ маємо *різні* властивості декомпозиції формул ${}^{\sim}\Phi$, які не можна подати як спільну властивість для відношень типу $|=_{TF}$.

Для ${}^{C\#}|=_T$ – це ${}^{\sim}{}_{LT}$, ${}^{\sim}{}_{RT}$, $\neg{}^{\sim}{}_{El}$.

Для ${}^{C\#}|=_F$ – це $\neg{}^{\sim}{}_{RF}$, $\neg{}^{\sim}{}_{LF}$, ${}^{\sim}{}_{El}$.

Тому властивості декомпозиції формул ${}^{\sim}\Phi$ для відношень ${}^{C\#}|=_{TF}$ можна явно отримати, поєднуючи відповідні властивості (див. теорему 11) для ${}^{C\#}|=_T$ та ${}^{C\#}|=_F$.

В ${}_{\perp}$LC традиційно задаємо ${}^{\#}\!\sim_{TF}$:

$\Phi \;{}^{\#}\!\sim_{TF} \Psi$, якщо $\Phi \;{}_J\!\sim_{TF} \Psi$ для всіх інтерпретацій $\boldsymbol{J}$ відповідної семантики.

В ${}_{\perp}$LC виконуються традиційні теореми еквівалентності, заміни еквівалентних.

**Відношення логічного наслідку за умов невизначеності**

Некоректність відношень типу $|=_{IR}$ в ${}_{\perp}$LC мотивує перехід до загальніших відношень логічного наслідку за умов невизначеності. Спочатку задамо відношення наслідку за умов невизначеності при фіксованій інтерпретації $\boldsymbol{J}$. Нехай $\Gamma, \mathrm{U}, \Delta \subseteq Fr$.

$\Delta$ є $IR$-наслідком $\Gamma$ за умов невизначеності U при $\boldsymbol{J}$, що позначимо $\mathrm{U} / \Gamma \;{}_J|=_{IR}^{\perp} \Delta$, якщо $T^{\cap}(\Gamma_J) \cap \perp^{\cap}(\mathrm{U}_J) \cap F^{\cap}(\Delta_J) = \varnothing$.

$\Delta$ є $T$-наслідком $\Gamma$ за умов невизначеності U при $\boldsymbol{J}$, що позначимо $\mathrm{U} / \Gamma \;{}_J|=_T^{\perp} \Delta$, якщо $T^{\cap}(\Gamma_J) \cap \perp^{\cap}(\mathrm{U}_J) \subseteq T^{\cup}(\Delta_J)$.

$\Delta$ є $F$-наслідком $\Gamma$ за умов невизначеності U при $\boldsymbol{J}$, що позначимо $\mathrm{U} / \Gamma \;{}_J|=_F^{\perp} \Delta$, якщо $F^{\cap}(\Delta_J) \cap \perp^{\cap}(\mathrm{U}_J) \subseteq F^{\cup}(\Gamma_J)$.

При $\mathrm{U} = \varnothing$ маємо умови традиційних відношень $\Gamma \;{}_J|=_{IR} \Delta$, $\Gamma \;{}_J|=_T \Delta$ та $\Gamma \;{}_J|=_F \Delta$.

Відношення *логічного наслідку за умов невизначеності* в семантиках $_{\perp}\boldsymbol{PC}$ та $_{\perp}\boldsymbol{PC}_{\equiv}$. визначаємо за традиційною схемою: $\mathrm{U} / \Gamma^{\alpha} \models \tau\, \Delta$, якщо $\mathrm{U} / \Gamma_{J} \models \tau\, \Delta$ для всіх $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{\alpha}$. Тут $\boldsymbol{\alpha}$ – $_{\perp}\boldsymbol{PC}$ чи $_{\perp}\boldsymbol{PC}_{\equiv}$, $\tau$ – одне з *IR*, *T*, *F*.

Отримуємо відношення $\models_{IR}^{\perp}$, ${}^{\equiv}\!\models_{IR}^{\perp}$, $\models_{T}^{\perp}$, ${}^{\equiv}\!\models_{T}^{\perp}$, $\models_{F}^{\perp}$, ${}^{\equiv}\!\models_{F}^{\perp}$. За умови $\mathrm{U} = \varnothing$ маємо ${}^{PC}\!\models_{IR}$, ${}^{PC\equiv}\!\models_{IR}$, ${}^{PC}\!\models_{T}$, ${}^{PC\equiv}\!\models_{T}$, ${}^{PC}\!\models_{F}$, ${}^{PC\equiv}\!\models_{F}$.

**Твердження 14.** ${}^{\equiv}\!\models_{T}^{\perp} \subset {}^{\equiv}\!\models_{IR}^{\perp}$;

${}^{\equiv}\!\models_{F}^{\perp} \subset {}^{\equiv}\!\models_{IR}^{\perp}$; $\models_{T}^{\perp} \subset \models_{IR}^{\perp}$; $\models_{F}^{\perp} \subset \models_{IR}^{\perp}$.

Нехай $\models^{\perp}$ – це одне з $\models_{IR}^{\perp}$, ${}^{\equiv}\!\models_{IR}^{\perp}$, $\models_{T}^{\perp}$, ${}^{\equiv}\!\models_{T}^{\perp}$, $\models_{F}^{\perp}$, ${}^{\equiv}\!\models_{F}^{\perp}$. Теорема заміни еквівалентних для них формулюється так.

**Теорема 12.** Нехай $\Phi\ {}^{\#}\!\!\sim_{TF} \Psi$, тоді:

$\mathrm{U} / \Phi, \Gamma \models^{\perp} \Delta \Leftrightarrow \mathrm{U} / \Psi, \Gamma \models^{\perp} \Delta$;

$\mathrm{U} / \Gamma \models^{\perp} \Delta, \Phi \Leftrightarrow \mathrm{U} / \Gamma \models^{\perp} \Delta, \Psi$;

$\mathrm{U}, \Phi / \Gamma \models^{\perp} \Delta \Leftrightarrow \mathrm{U}, \Psi / \Gamma \models^{\perp} \Delta$.

Доведення базується на тому, що для кожної і $\boldsymbol{J}$ маємо $\Phi\ {}_{J}\!\!\sim_{TF} \Psi \Leftrightarrow \Phi_{J} = \Psi_{J}$.

Для множини формул $\Sigma \subseteq Fr$ використаємо позначення ${}^{\neg}\Sigma = \{\neg\Phi \mid \Phi \in \Sigma\}$.

Відношення $\models_{T}^{\perp}$, ${}^{\equiv}\!\models_{T}^{\perp}$, $\models_{F}^{\perp}$, ${}^{\equiv}\!\models_{F}^{\perp}$ можна промоделювати за допомогою ${}^{PC}\!\models_{T}$, ${}^{PC\equiv}\!\models_{T}$, ${}^{PC}\!\models_{F}$, ${}^{PC\equiv}\!\models_{F}$, усунувши умови невизначеності. Для цих відношень маємо:

**Теорема 13 (**про елімінацію умов невизначеності). Для всіх $\Gamma, \mathrm{U}, \mathrm{W}, \Delta \subseteq Fr$:

$\mathrm{W}, \mathrm{U} / \Gamma \models_{T}^{\perp} \Delta \ \Leftrightarrow\ \mathrm{W} / \Gamma \models_{T}^{\perp} \Delta, \mathrm{U}, {}^{\neg}\mathrm{U}$;

$\mathrm{W}, \mathrm{U} / \Gamma\, {}^{\equiv}\!\models_{T}^{\perp} \Delta \ \Leftrightarrow\ \mathrm{W} / \Gamma\, {}^{\equiv}\!\models_{T}^{\perp} \Delta, \mathrm{U}, {}^{\neg}\mathrm{U}$;

$\mathrm{W}, \mathrm{U} / \Gamma \models_{F}^{\perp} \Delta \ \Leftrightarrow\ \mathrm{W} / \Gamma, \mathrm{U}, {}^{\neg}\mathrm{U} \models_{F}^{\perp} \Delta$;

$\mathrm{W}, \mathrm{U} / \Gamma\, {}^{\equiv}\!\models_{F}^{\perp} \Delta \ \Leftrightarrow\ \mathrm{W} / \Gamma, \mathrm{U}, {}^{\neg}\mathrm{U}\, {}^{\equiv}\!\models_{F}^{\perp} \Delta$.

Тут позначення ${}^{\neg}\Sigma = \{\neg\Phi \mid \Phi \in \Sigma\}$.

Отже, доцільно розглядати лише $\models_{IR}^{\perp}$ та ${}^{\equiv}\!\models_{IR}^{\perp}$. Надалі ${}^{\#}\!\models_{IR}^{\perp}$ – одне з $\models_{IR}^{\perp}$, ${}^{\equiv}\!\models_{IR}^{\perp}$.

Властивість монотонності для ${}^{\#}\!\models_{IR}^{\perp}$:

M) Нехай $\Gamma \subseteq \Lambda$, $\mathrm{U} \subseteq \mathrm{W}$, та $\Delta \subseteq \Sigma$; тоді $\mathrm{U} / \Gamma\, {}^{\#}\!\models_{IR}^{\perp} \Delta \Rightarrow \mathrm{W} / \Lambda\, {}^{\#}\!\models_{IR}^{\perp} \Sigma$.

**Теорема 14** (умови гарантованої наявності ${}^{\#}\!\models_{IR}^{\perp}$). Для всіх $\mathrm{U}, \Gamma, \Delta \subseteq Fr$ і $\Phi \in Fr$:

$C_{LR}$) $\mathrm{U} / \Phi, \Gamma\, {}^{\#}\!\models_{IR}^{\perp} \Delta, \Phi$;

$C_{UL}$) $\mathrm{U}, \Phi / \Phi, \Gamma\, {}^{\#}\!\models_{IR}^{\perp} \Delta$;

$C_{UR}$) $\mathrm{U}, \Phi / \Gamma\, {}^{\#}\!\models_{IR}^{\perp} \Delta, \Phi$;

$C^{U}\sim$) $\mathrm{U} / \Gamma\, {}^{\#}\!\models_{IR}^{\perp} \Delta, \sim\!\Phi$;

$C^{U}F$) $\mathrm{U} / R_{\bar{x},\perp,\perp}^{\bar{v},\bar{u},z}(Ez), \Gamma\, {}^{\#}\!\models_{IR}^{\perp} \Delta$;

$C_{RE}^{U}$) $\mathrm{U}, R_{\bar{w},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(Ey) / \Gamma =_{IR}^{\perp} \Delta$;

зокрема, $\mathrm{U}, Ey / \Gamma\, {}^{\#}\!\models_{IR}^{\perp} \Delta$;

$C^{U}_{\mathrm{Rf}}$) $\mathrm{U} / \Gamma\, {}^{\equiv}\!\models_{IR}^{\perp} \Delta, \equiv_{xx}$;

$CT_{\equiv}$) $\mathrm{U} / \Gamma\, {}^{\equiv}\!\models_{*} \Delta, R_{\bar{x},\perp,\perp,\perp}^{\bar{v},\bar{u},x,z}(\equiv_{xz})$.

$C_{R\equiv}^{U}$) $\mathrm{U}, R_{\bar{w},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\equiv_{xy}) / \Gamma\, {}^{\equiv}\!\models_{IR}^{\perp} \Delta$.

**Теорема 15** (властивості декомпозиції). Для всіх $\mathrm{U}, \Gamma, \Delta \subseteq Fr$ і $\Phi, \Psi, \vartheta \in Fr$ маємо:

$\neg_{\mathrm{L}}$) $\mathrm{U} / \neg\Phi, \Gamma\, {}^{\#}\!\models_{IR}^{\perp} \Delta \ \Leftrightarrow\ \mathrm{U} / \Gamma\, {}^{\#}\!\models_{IR}^{\perp} \Delta, \Phi$;

$\neg_{\mathrm{R}}$) $\mathrm{U} / \Gamma\, {}^{\#}\!\models_{IR}^{\perp} \Delta, \neg\Phi \ \Leftrightarrow\ \mathrm{U} / \Phi, \Gamma\, {}^{\#}\!\models_{IR}^{\perp} \Delta$;

$\neg_{\mathrm{U}}$) $\mathrm{U}, \neg\vartheta / \Gamma\, {}^{\#}\!\models_{IR}^{\perp} \Delta \ \Leftrightarrow\ \mathrm{U}, \vartheta / \Gamma\, {}^{\#}\!\models_{IR}^{\perp} \Delta$;

$\vee_{\mathrm{L}}$) $\mathrm{U} / \Phi \vee \Psi, \Gamma\, {}^{\#}\!\models_{IR}^{\perp} \Delta \ \Leftrightarrow$

$\mathrm{U} / \Phi, \Gamma\, {}^{\#}\!\models_{IR}^{\perp} \Delta$ та $\mathrm{U} / \Psi, \Gamma\, {}^{\#}\!\models_{IR}^{\perp} \Delta$;

$\vee_{\mathrm{R}}$) $\mathrm{U} / \Gamma\, {}^{\#}\!\models_{IR}^{\perp} \Delta, \Phi \vee \Psi \Leftrightarrow \mathrm{U} / \Gamma\, {}^{\#}\!\models_{IR}^{\perp} \Delta, \Phi, \Psi$;

$\vee_{\mathrm{U}}$) $\mathrm{U}, \Phi \vee \vartheta / \Gamma\, {}^{\#}\!\models_{IR}^{\perp} \Delta \ \Leftrightarrow\ \mathrm{U}, \Phi, \vartheta / \Gamma\, {}^{\#}\!\models_{IR}^{\perp} \Delta$

та $\mathrm{U}, \Phi / \Gamma\, {}^{\#}\!\models_{IR}^{\perp} \vartheta, \Delta$ та $\mathrm{U}, \vartheta / \Gamma\, {}^{\#}\!\models_{IR}^{\perp} \Phi, \Delta$;

$\sim_{\mathrm{U}}$) $\mathrm{U}, \sim\!\Phi / \Gamma\, {}^{\#}\!\models_{IR}^{\perp} \Delta \ \Leftrightarrow\ \mathrm{U} / \Phi, \Gamma\, {}^{\#}\!\models_{IR}^{\perp} \Delta$

та $\mathrm{U} / \Gamma\, {}^{\#}\!\models_{IR}^{\perp} \Delta, \Phi$;

$\sim_{\mathrm{L}}$) $\mathrm{U} / \sim\!\Phi, \Gamma\, {}^{\#}\!\models_{IR}^{\perp} \Delta \ \Leftrightarrow\ \mathrm{U}, \Phi / \Gamma\, {}^{\#}\!\models_{IR}^{\perp} \Delta$.

Новими тут є специфічні для ${}^{\#}\!\models_{IR}^{\perp}$ властивості декомпозиції $\neg_{\mathrm{U}}$, $\vee_{\mathrm{U}}$, $\sim_{\mathrm{L}}$, $\sim_{\mathrm{U}}$.

Явне виділення $\perp$-областей в ${}^{\#}\!\models_{IR}^{\perp}$ дає змогу робити декомпозицію формул.

Розглянемо властивості еквівалентних перетворень відношень ${}^{\#}\!\models_{IR}^{\perp}$. На відміну від аналогічних властивостей відношень ${}^{\#}\!\models_{IR}$, кожна з властивостей R, $\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{I}$, $\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{U}$, $\mathrm{R}_{\perp}\neg$, $\mathrm{R}_{\perp}\vee$, $\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{R}$, $\mathrm{R}_{\perp}\sim$, властивостей твердження 6, властивостей типу $\mathrm{R}_{\perp}\equiv$ та властивостей $\equiv\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{r}$ продукує 3 однотипні властивості для відношення ${}^{\#}\!\models_{IR}^{\perp}$, коли виділена формула – у лівій чи правій частині цього відношення або входить до умови невизначеності. Для прикладу наведемо властивості, індуковані $\mathrm{R}_{\perp}\sim$ та $\equiv\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{r}$:

$\mathrm{R}\sim_{\mathrm{L}}$) $\mathrm{U} / R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\sim\!\Phi), \Gamma\, {}^{\#}\!\models_{IR}^{\perp} \Delta \ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ \mathrm{U} / \sim\! R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\Phi), \Gamma\, {}^{\#}\!\models_{IR}^{\perp} \Delta$;

$\mathrm{R}\sim_{\mathrm{R}}$) $\mathrm{U} / \Gamma\, {}^{\#}\!\models_{IR}^{\perp} \Delta, R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\sim\!\Phi) \ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ \mathrm{U} / \Gamma\, {}^{\#}\!\models_{IR}^{\perp} \Delta, \sim\! R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\Phi)$;

$\mathrm{R}\sim_{\mathrm{U}}$) $\mathrm{U} / R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\sim\!\Phi), \Gamma\, {}^{\#}\!\models_{IR}^{\perp} \Delta \ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ \mathrm{U} / \sim\! R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\Phi), \Gamma\, {}^{\#}\!\models_{IR}^{\perp} \Delta$;

$\equiv\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{r}_{\mathrm{L}}$) $\mathrm{U} / \equiv_{xy}, R_{\bar{w},\perp,x}^{\bar{v},\bar{u},z}(\Phi), \Gamma\, {}^{\equiv}\!\models_{IR}^{\perp} \Delta \ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathrm{U} / \equiv_{xy}, R_{\bar{w},\perp,x}^{\bar{v},\bar{u},z}(\Phi), R_{\bar{w},\perp,y}^{\bar{v},\bar{u},z}(\Phi), \Gamma\, {}^{\equiv}\!\models_{IR}^{\perp} \Delta$;

$\equiv\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{r}_{\mathrm{R}}$) $\mathrm{U} / \equiv_{xy}, \Gamma\, {}^{\equiv}\!\models_{IR}^{\perp} R_{\bar{w},\perp,x}^{\bar{v},\bar{u},z}(\Phi), \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathrm{U} / \equiv_{xy}, \Gamma\, {}^{\equiv}\!\models_{*} R_{\bar{w},\perp,x}^{\bar{v},\bar{u},z}(\Phi), R_{\bar{w},\perp,y}^{\bar{v},\bar{u},z}(\Phi), \Delta$;

$\equiv R_{\perp} r_{U}) \ \equiv_{xy}, R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,x}(\Phi), \mathrm{U} / \Gamma \ {}^{\equiv}|\!=_{IR}{}^{\perp} \Delta \ \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \ \equiv_{xy}, R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,x}(\Phi), R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{w},\perp,y}(\Phi), \mathrm{U} / \Gamma \ {}^{\equiv}|\!=_{IR}{}^{\perp} \Delta.$$

Властивості $El_{RE}$, $ElR_{\equiv}$, $El_{\equiv xx}$, $\equiv E$, $Tr\equiv$ записуються так, як для ${}^{\equiv}|\!=_{IR}$, але додаються умови невизначеності U.

## Висновки

Досліджено нові класи програмно-орієнтованих логічних формалізмів – реномінативні логіки з рівністю і композицією (операцією) предикатного доповнення. Операції такого типу використовуються в різновидах програмних логік Флойда-Хоара з частковими перед- та після-умовами. Особливістю пропонованих логік є використання предикатів рівності, розширених реномінацій, предикатів-індикаторів наявності значення для змінних. Описано композиційні алгебри і мови таких логік, досліджено їх семантичні властивості. Для цих логік запропоновано і досліджено низку відношень логічного наслідку, зокрема, відношень логічного наслідку за умов невизначеності. На цій семантичній основі в наступних статтях планується побудова для пропонованих логік низки числень секвенційного типу.

## Література

1. Abramsky, S., Gabbay, D., Maibaum, T. (editors) (1993–2000) *Handbook of Logic in Computer Science.* Oxford University Press, Vol. 1–5.
2. Нікітченко, М.С., Шкільняк, О.С., Шкільняк, С.С. (2016) Чисті першопорядкові логіки квазіарних предикатів. *Проблеми програмування*, 2–3, 73–86.
3. Hoare, C. (1969) An axiomatic basis for computer programming. *Comm. ACM*, 12(10), 576–580.
4. Apt, K. (1981) Ten years of Hoare's logic: a survey – part I. *ACM Trans. Program. Lang. Syst.*, 3(4), 431–483.
5. Blass, A., Gurevich, Y. (2001) The underlying logic of Hoare logic, Current Trends in Theoretical Computer Science. *Entering the 21st Century, World Scientific*, 409–436.
6. Ivanov, I., Nikitchenko, M. (2018). On the sequence rule for the Floyd-Hoare logic with partial pre- and post-conditions. *In Proc. of the 14th Int. Conf. on ICT, vol. 2104 of CEUR Workshop Proc.*, 716–724
7. Нікітченко, М.С., Шкільняк, О.С., Шкільняк, С.С., Мамедов, Т.А. (2019) Пропозиційні логіки часткових предикатів з композицією предикатного доповнення. *Проблеми програмування*, 1, 3–13.
8. Шкільняк, О.С. (2019) Відношення логічного наслідку в логіках часткових предикатів з композицією предикатного доповнення. *Проблеми програмування*, 3, 11–27.
9. Шкільняк, С.С. (2019) Першопорядкові композиційно-номінативні логіки з предикатами слабкої та строгої рівності. *Проблеми програмування*, 3, 28–44.
10. Kleene, S.C. (1952) *Introductions to Metamathematics*. Van Nostrand, Princeton.
11. Kleene, S.C. (1967) *Mathematical Logic*. New York.

## References

1. Abramsky, S., Gabbay, D., Maibaum, T. (editors) (1993–2000) *Handbook of Logic in Computer Science.* Oxford University Press, Vol. 1–5.
2. Nikitchenko, M., Shkilniak, O, Shkilniak, S (2016) Chysti pershoporiadkovi logiky kvaziarnyh predykativ. *Problemy programuvannia*, 2–3, 73–86.
3. Hoare, C. (1969) An axiomatic basis for computer programming. *Comm. ACM*, 12(10), 576–580.
4. Apt, K. (1981) Ten years of Hoare's logic: a survey – part I. *ACM Trans. Program. Lang. Syst.*, 3(4), 431–483.
5. Blass, A., Gurevich, Y. (2001) The underlying logic of Hoare logic, Current Trends in Theoretical Computer Science. *Entering the 21st Century, World Scientific*, 409–436.
6. Ivanov, I., Nikitchenko, M. (2018). On the sequence rule for the Floyd-Hoare logic with partial pre- and post-conditions. *In Proc. of the 14th Int. Conf. on ICT, vol. 2104 of CEUR Workshop Proc.*, 716–724.
7. Nikitchenko, M., Shkilniak, O., Shkilniak, S., Mamedov, T. (2019) Propozytsiini logiky czastkovyh predykativ z kompozytzieyu predykatnoho dopovnennia. *Problemy programuvannia*, 1, 3–13.
8. Shkilniak, O. (2019) Vidnoshennia logicznoho naslidku v logikah czastkovyh predykativ z kompozytsieiu predykatnoho dopovnennia. *Problemy programuvannia*, 3, 11–27.
9. Shkilniak, S. (2019) Pershoporiadkovi kompozytsiino-nominatyvni logiky z predykatamy slabkoi ta strohoi rivnosti. *Problemy programuvannia*, 3, 28–44.
10. Kleene, S.C. (1952) *Introductions to Metamathematics*. Van Nostrand, Princeton.
11. Kleene, S.C. (1967) *Mathematical Logic*. New York.

## RESUME

**M. Nikitchenko, O. Shkilniak, S. Shkilniak, T. Mamedov**

**Renominative logics with extended renomination, equality and predicate complement**

The paper proposes and investigates new classes of program-oriented logical formalisms – renominative logics with equality and composition (operation) of predicate complement. We use similar operations in different Floyd-Hoar program logics with partial pre- and post-conditions. The specific of the proposed logics is the use of the extended composition of renomination, 0-ary compositions of weak $=_{xy}$ and strong equality $\equiv_{xy}$, and variable assignment predicates. Various renomination logics are identified: without equality predicates, with $=_{xy}$ and with $\equiv_{xy}$; with the composition of extended renomination and without it. These logics are denoted $L_{\perp}^{R}$, $L_{\perp}^{R=}$, $L_{\perp}^{R\equiv}$; $L_{\perp}^{RC}$, $L_{\perp}^{RC=}$, $L_{\perp}^{RC\equiv}$. The corresponding composition algebras are described and the properties of the compositions are investigated. Emphasis is made on the study of the interaction of the compositions of extended renomination and predicate complement with equality and variable assignment predicates. The languages of the proposed logics are described; a number of properties of the logical consequence relations of the types $|=_{IR}$, $|=_{T}$, $|=_{F}$ for these logics are considered. It is shown that the relations of types $|=_{T}$ and $|=_{F}$ are incorrect for $L_{\perp}^{R=}$ and $L_{\perp}^{RC=}$; the relations of type $|=_{IR}$ are incorrect for $L_{\perp}^{RC}$, $L_{\perp}^{RC=}$, $L_{\perp}^{RC\equiv}$. This demonstrates that $L_{\perp}^{RC=}$ is a degenerated logic. For logics with the predicate complement, it is reasonable to use more general relations of logical consequence with the undefinedness conditions of types $|=_{IR}^{\perp}$, $|=_{T}^{\perp}$, $|=_{F}^{\perp}$. In this case, undefinedness conditions for relations of types $|=_{T}^{\perp}$ and $|=_{F}^{\perp}$ can be eliminated. This allows to reduces them to relations of types $|=_{T}$ та $|=_{F}$. At the same time, relation $|=_{IR}^{\perp}$ cannot be reduced to relation $|=_{IR}$. Properties of the introduced relations of logical consequence are investigated, conditions that guarantee their validity are described, properties of decomposition of formulas are formulated. On this semantic basis, a series of sequent-type calculi for the proposed logics is planned to be constructed.

*Надійшла до редакції 05.09.2019*

 