УДК: 518.85 https://doi.org/10.15407/jai2024.01.064

К.Е. Юштін[1], Є.В. Івохін[2]
[1,2]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна
пр. Глушкова, 4д, м. Київ, 83000
[2]Національний транспортний університет, Україна
вул. М. Омеляновича-Павленка, 1, м. Київ, 01010
[1]gkons@univ.kiev.ua
[2]ivohin@knu.ua
[1]https://orcid.org/0000-0002-5826-7408
[2]https://orcid.org/0009-0001-9881-2343

ПРО ВПЛИВ СПОСОБІВ ДЕФАЗИФІКАЦІЇ НА РЕЗУЛЬТАТИ РОЗВ’ЯЗАННЯ НЕЧІТКОЇ ЗАДАЧІ КОМІВОЯЖЕРА

Анотація. У статті досліджується підхід до використання нечітких чисел і методу динамічного програмування для пошуку розв’язків задачі комівояжера з урахуванням нечіткого представлення часу в реальних умовах руху, що дозволяє сформулювати нечітку оптимізаційну задачу для знаходження найкращого значення цільової функції, яка визначається величиною необхідного для подорожі між містами часу. Задача комівояжера (traveling salesman problem, TSP) — це класична задача комбінаторної оптимізації, яка передбачає пошук найкоротшого або найбільш швидкого маршруту на множині міст. Для формалізації невизначеності та неточності вхідних даних, пов’язаної з впливом суб’єктивності в оцінках тривалості необхідних для переміщення проміжків часу, використовуються нечіткі числа. Для оперування з нечіткими числами запропоноване їх перетворення до спеціального вигляду, формалізація отриманих нечітких результатів у чітке подання проводиться на основі методу центру тяжіння (CoG). Проведено порівняння результатів, отриманих на основі вирішення чіткої задачі комівояжера на основі дефазифікованих часових відстаней та дефазифікації розв’язку нечіткої задачі комівояжеру. Отримано результати, які підтвердили залежність розв’язку від способу дефазифікації. Розроблено програму, яка використовувалася для порівняння результатів задачі комівояжера з використанням чітких і нечітких чисел на основі динамічного методу. Зроблено висновок, який свідчить, що використання трапецієвидних нечітких чисел з методом динамічного програмування приводить до покращення результатів задачі порівняно з використанням чітких чисел на основі дефазифікації нечітких відстаней. Наведено способи впровадження та проаналізовано проблемні області застосування результатів обчислень, що демонструє конструктивність запропонованого підходу для дослідження реальних процесів.

Ключові слова: задача комівояжера, нечіткі числа, метод динамічного програмування, дефазифікація, нечітке представлення часу, неточність, невизначеність.

K. Yushtin[1], Ye. Ivohin[2]
[1,2]Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine
Glushkova st., 4d, Kyiv, 83000
[2] National Transport University, Ukraine
St. M. Omelyanovicha-Pavlenka, 1, Kyiv, 01010
[1]gkons@univ.kiev.ua
[2]ivohin@knu.ua
[1]https://orcid.org/0000-0002-5826-7408
[2]https://orcid.org/0009-0001-9881-2343

ABOUT DEFUZZIFICATION METHODS INFLUENCE ON FUZZY TRAVELING SALESMAN PROBLEM’S SOLVING

Abstract. The article investigates the approach to using fuzzy numbers and the method of dynamic programming to find solutions to the traveling salesman problem, considering the fuzzy representation of time in real travel conditions. This allows for formulating a fuzzy optimization problem to find the best value of the objective function, which is determined by the amount of time required to travel between cities. The traveling salesman problem (TSP) is a classic problem of combinatorial optimization, which involves finding the shortest or fastest route among a set of cities. Fuzzy numbers are used to formalize the uncertainty and imprecision of input data, associated with the subjectivity in estimates of the duration of necessary travel intervals. For operating with fuzzy numbers, their transformation into a special form is proposed, and the formalization of the obtained fuzzy results into a crisp representation is carried out based on the center of gravity (CoG) method. A comparison of the results obtained based on solving the deterministic traveling salesman problem using defuzzified time distances and the defuzzification of the solution to the fuzzy traveling salesman problem was conducted. The results confirmed the dependency of the solution on the method of defuzzification. A program was developed that was used to compare the results of the traveling salesman problem using crisp and fuzzy numbers based on the dynamic method. A conclusion is drawn, indicating that the use of trapezoidal fuzzy numbers with the dynamic programming method leads to improved results of the problem compared to using crisp numbers based on the defuzzification of fuzzy distances. Methods of implementation and problematic areas of application of the computation results are presented and analyzed, demonstrating the constructiveness of the proposed approach for studying real processes.

Keywords: traveling salesman problem, fuzzy numbers, dynamic programming method, defuzzification, fuzzy representation of time, imprecision, uncertainty.

Вступ

Проблеми сучасної логістики мають певні особливості, що призводять до труднощів у розв'язуванні різних логістич-них задач, частина з яких може бути вирішена завдяки роботі менеджерського відділу. Інші задачі потребують аналізу та оптимізації логістичних операцій, включаючи планування, координацію та контроль руху та зберігання товарів, послуг і інформації. Залучення математичних підходів для розв'язування логістичних задач набуває широкого впровадження, конкретний зміст якого залежить від характеру проблеми та наявних даних. Іноді вдається знайти нетипові методики розв'язання відомих задач, однією з яких є задача комівояжера.

Задачу комівояжеру вперше було сформульовано ірландським математиком В. Р. Гамільтоном у XIX столітті, зміст якої полягає у необхідності скласти маршрут руху в рамках заданої сукупності зв'язаних між собою пунктів (міст), що утворюють транспортну мережу конкретного регіону. Комівояжеру необхідно скласти маршрут, за яким він має відвідати усі міста мережі з урахуванням умови, щоб відстань, яку потрібно подолати, або час подолання були мінімальними. Особливістю задачі є те, що маршрут повинен містити усі пункти, що прописані у задачі, причому, кожен з пунктів потрібно відвідати не більше одного разу.

Задача комівояжера (ЗК) є класичною проблемою комбінаторної оптимізації. Мета задачі - знаходження найбільш оптимального за довжиною або тривалістю маршруту при однократному відвідуванні комівояжером усіх міст деякої сукупності за умови початку з заданого міста та повернення до нього ж. Задача комівояжеру належить до класу NP-складних проблем. У теорії складності алгоритмів клас NP (Non-deterministic Polynomial time) включає всі завдання, вирішення яких може бути перевірено за поліноміальний час. Це означає, що якщо вже існує передбачуваний розв'язок задачі, то його правильність (чи неправильність) можна підтвердити за час, який масштабується поліноміально з розміром вхідних даних. NP-важка задача - це категорія задач, які мають щонайменше ту ж складність, як і завдання в класі NP.

Для розв'язування задачі комівояжера можна пронумерувати міста цілими числами $(1,2,3,\ldots,n)$, тоді маршрут комівояжера буде описуватись циклічною перестановкою номерів міст, у якій усі номери різні. Будь-яка перестановка з номерів, яка подана у такому вигляді, представляє можливий розв'язок задачі, а отже, існує *(n-1)!* можливих шляхів для побудови його маршруту. Проблема комівояжера полягає в тому, щоб вибрати оптимальний з точки зору довжини або тривалості подорожі маршрут, який задовольняє деяким додатковим обмеженням.

В реальному житті неможливо точно передбачити тривалість або вартість на переміщення між містами. Для врахування цієї особливості можна використати поняття нечітких множин (чисел), які введено Л.Заде в роботі [1] і які дозволяють формалізувати неточності та невизначеності проблеми. За останні роки з'явилось багато робіт та досліджень на основі цієї методології та її застосування до розв'язування різних задач оптимізації, методів підтримки прийняття рішень тощо. У даному випадку за умови, що тривалість або вартість переїздів не є сталими і можуть бути описані за допомогою нечітких чисел, задача комівояжера формулюється як нечітка задача комівояжера (НЗК).

Постановка оптимізаційної задачі комівояжера з нечіткими за своєю природою даними представляє собою одну із важливих нечітких задач оптимізації, вирішення яких наразі необхідно у процесах транспортування, забезпечення логістики, маршрутизації та розподілу даних з врахуванням небезпеки та невизначеності реальних ситуацій. У цій статті для вирішення НЗК запропоновано методику, що базується на використанні схеми динамічного програмування.

В реальних задачах величини тривалості або вартості подорожі між окремими пунктами транспортної мережі важко заздалегідь визначити, найчастіше вони задаються наближено з урахуванням суб'єктивних факторів або впливу зовнішніх умов, пов'язаних з оцінками часової тривалості або вартості переміщення за ділянками маршруту. Це призводить до необхідності врахування та формалізації невизначеності на основі різних методик. Одним з таких підходів, що може бути використаний у цьому випадку, базується на залученні формалізацій у вигляді нечітких чисел.

У випадку НЗК нечіткі числа можуть використовуватися для опису цільової функції тривалості або довжини маршруту та додаткових обмежень, що дозволяє формалізувати неточність або суб'єктивність вхідних характеристик оптимізаційної задачі.

Огляд літератури

Застосування теорії нечітких множин, нечітких чисел для розв'язування прикладних задач оптимізації відображено у багатьох роботах [2-8]. Серед публікацій, присвячених задачі комівояжера, потрібно відзначити роботу [2], у якій запропоновано спосіб пошуку шляхів «розв'язання нечіткої задачі комівояжера з різними функціями належності». В роботі [3] запропоновано концепцію прийняття рішень у нечіткому середовищі. Робота [4] присвячена методам розв'язання задач нечіткого лінійного програмування з урахуванням декількох цільових функцій. З іншого боку, для розв'язування класичної задачі комівояжера, як комбінаторної задачі, запропоновано багато різних методів на основі жадібних та евристичних підходів, які дозволяють знаходити локальні оптимальні розв'язки (наприклад, [5,6]). Тому поєднання даних методик з можливістю використання нечітких чисел для врахування невизначеності в оптимізаційних задачах представляє як теоретичний, так і практичний інтерес.

У даній статті пропонуються способи пошуку ефективних (локальних) розв'язків нечіткої задачі комівояжера для визначення найкоротшого за тривалістю маршруту на основі методу динамічного програмування.

Загальні поняття нечітких множин та нечітких чисел

Запропонована Л. Заде [1] теорія нечітких множин є одним з ефективних підходів до формалізації невизначеності.

Означення 1. [9] Нечіткою множиною $\tilde{A}$ універсальної множини X, називається сукупність пар $\tilde{A} = \{(\mu_{\tilde{A}}(x), x)\}$, де $\mu_{\tilde{A}} : X \to [0,1]$ – відображення множини X в одиничний відрізок $[0,1]$ і називається функцією належності нечіткої множини $\tilde{A}$.

Значення функції належності $\mu_{\tilde{A}}(x)$ для елемента $x \in X$ називається ступенем належності. Інтерпретацією ступеня належності $\mu_{\tilde{A}}(x)$ є суб'єктивна міра того, наскільки елемент $x \in X$ відповідає поняттю, зміст якого формалізується нечіткою множиною $\tilde{A}$.

Означення 2. Нечітка множина $\tilde{A}$ називається опуклою [9], якщо

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(y))$$

для всіх $x, y \in X, \lambda \in (0,1)$.

Розглянемо в якості універсальної множини X множину дійсних чисел, тобто $X = R$.

Означення 3. [9] Нечітка множина $\tilde{A}$ визначена на множині дійсних чисел R^1 є нечітким числом, якщо виконуються наступні властивості:

i. множина $\tilde{A}$ опукла;

ii. множина $\tilde{A}$ нормальна, тобто існує таке $x \in R$, що $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$;

iii. функція належності $\mu_{\tilde{A}}(x)$ напів-неперервна зверху;

iv. носій нечіткого числа $\sup p(\tilde{A})$ є підмножиною універсальної множини R .

Означення 4. [9] Нечітким трапецієподібним числом $\tilde{A}$ називається впорядкована четвірка дійсних чисел (a_1, a_2, a_3, a_4), $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$, для якої визначено функцію належності $\mu_{\tilde{A}}(x)$ вигляду:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1}, \textit{якщо}\; a_1 \leq x \leq a_2 \\ 1, \textit{якщо}\; a_2 \leq x \leq a_3 \\ \dfrac{a_4 - x}{a_4 - a_3}, \textit{якщо}\; a_3 \leq x \leq a_4 \end{cases} \tag{1}$$

Означення 5. Нечітким прямокутно-трапецієподібним числом $\tilde{A}$ будемо називати впорядковану трійку дійсних чисел (a_1, a_2, a_3), $a_1 \leq a_2 \leq a_3$, для якої визначено функцію належності $\mu_{\tilde{A}}(x)$ вигляду:

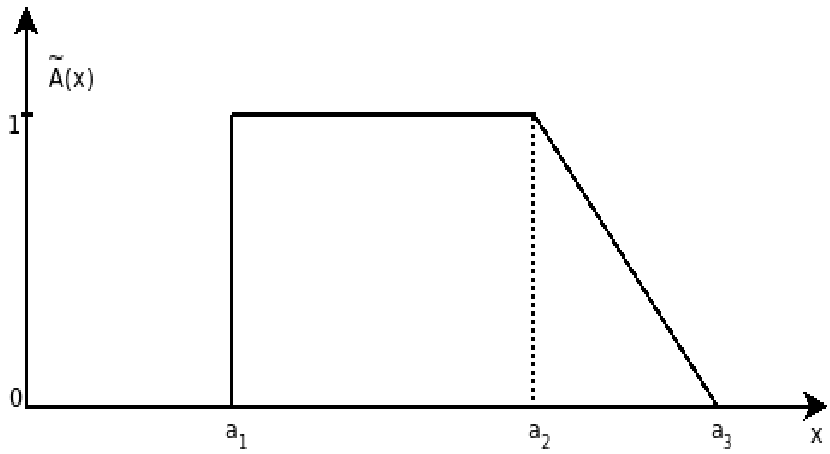

Рис. 1. Прямокутно-трапецієподібне нечітке число (з нульовим лівим розподілом)

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0, \textit{якщо } x \le a_1 \textit{ або } x \ge a_3 \\ 1, \textit{якщо } a_1 \le x \le a_2 \\ \dfrac{a_3 - x}{a_3 - a_2}, \textit{якщо } a_2 \le x \le a_3 \end{cases} \quad (2)$$

Якщо до задання нечіткого числа застосувати підхід на основі гаусоподібного розподілу з відповідними характеристиками, то в узагальненому випадку трапецієподібне нечітке число можна представити дещо в іншому вигляді:

$$\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4) = ([a_2, a_3], \alpha, \beta) = (m, w, \alpha, \beta), \quad (3)$$

де буде використовуватися середня точка $m = \dfrac{a_2 + a_3}{2}$ та напівширина плато

$w = \dfrac{a_3 - a_2}{2}$, а коефіцієнти $\alpha = a_2 - a_1$ та $\beta = a_4 - a_3$ визначають лівий та правий розподіл нечіткого числа $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ відповідно. За таким принципом прямокутно-трапецієподібне нечітке число можна представити з нульовим значенням лівого розподілу:

$$\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3) = ([a_1, a_2], \beta) = (m, w, \beta), \quad (4)$$

де $m = \dfrac{a_1 + a_2}{2}$, $w = \dfrac{a_2 - a_1}{2}$, $\beta = a_3 - a_2$.

Означення 6. Нечітким прямокутно-трикутним числом $\tilde{A}$ будемо називати впорядковану пару дійсних чисел (a_1, a_2), $a_1 \le a_2$, для якої визначено функцію належності $\mu_{\tilde{A}}(x)$ вигляду:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0, \textit{якщо } x \le a_1 \textit{ або } x \ge a_2 \\ \dfrac{a_2 - x}{a_2 - a_1}, \textit{якщо } a_1 \le x \le a_2 \end{cases} \quad (5)$$

Зрозуміло, що прямокутно-трикутне число є частинним випадком прямокутно-трапецієподібного нечіткого числа. Тому такі числа аналогічно можна представити у гаусоподібному вигляді з нульовим значенням лівого розподілу і нульовою шириною плато:

$$\tilde{A} = (a_1, a_2) = (a_1, \beta) = (a_1, \beta), \quad (6)$$

де $\beta = a_2 - a_1$.

Такі нечіткі числа для скорочення надалі будемо називати нечіткими трикутними числами з нульовим значенням лівого розподілу.

Арифметичні операції над прямо-кутно - трапецієподібними нечіткими числами

Для оперування з наведеними вище нечіткими числами визначимо правила виконання арифметичних операції, що базуються на їх поданні у гаусоподібному вигляді.

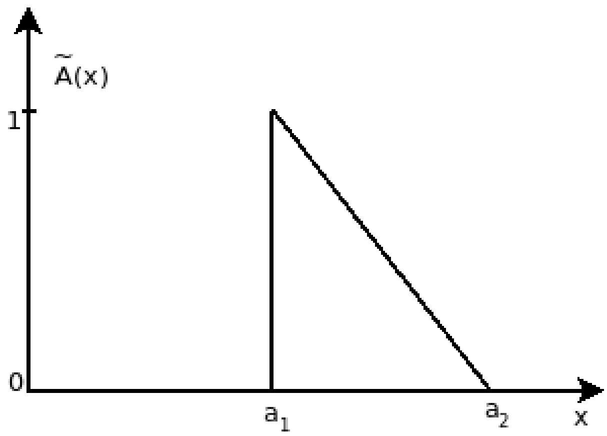

Рис. 2. Прямокутно-трикутне нечітке число

В якості середньої точки такого подання береться звичайне середньо-арифметичне значення границь плато, лівий та правий розподіли обчислюються відповідно до правила решітки, за яким для довільних дійсних чисел a, b покладемо $a \cup b = \max\{a, b\}$ та $a \cap b = \min\{a, b\}$.

Тоді для довільних трапецієподібних нечітких чисел $\widetilde{A} = \left(m\left(\widetilde{A}\right), w\left(\widetilde{A}\right), \beta_1\right)$ та $\widetilde{B} = \left(m\left(\widetilde{B}\right), w\left(\widetilde{B}\right), \beta_2\right)$ можна визначити наступні операції додавання, віднімання, множення та ділення (які у загальному випадку позначимо символом °):

$$\begin{aligned}\widetilde{A} \circ \widetilde{B} &= \left(m\left(\widetilde{A}\right) \circ m\left(\widetilde{B}\right), w\left(\widetilde{A}\right) \cup w\left(\widetilde{B}\right), \beta_1 \cup \beta_2\right)\\ &= \left(m\left(\widetilde{A}\right) \circ m\left(\widetilde{B}\right), \max\left(w\left(\widetilde{A}\right), w\left(\widetilde{B}\right)\right), \max\left(\beta_1, \beta_2\right)\right)\end{aligned} \tag{7}$$

Остаточно маємо

$$\begin{aligned}\widetilde{A} + \widetilde{B} &= \left(m\left(\widetilde{A}\right) + m\left(\widetilde{B}\right), w\left(\widetilde{A}\right) \cup w\left(\widetilde{B}\right), \beta_1 \cup \beta_2\right)\\ &= \left(m\left(\widetilde{A}\right) + m\left(\widetilde{B}\right), w\left(\widetilde{A}\right) + w\left(\widetilde{B}\right), \max\left(\beta_1, \beta_2\right)\right)\\ \widetilde{A} - \widetilde{B} &= \left(m\left(\widetilde{A}\right) - m\left(\widetilde{B}\right), w\left(\widetilde{A}\right) \cup w\left(\widetilde{B}\right), \beta_1 \cup \beta_2\right)\\ &= \left(m\left(\widetilde{A}\right) - m\left(\widetilde{B}\right), \max\left(w\left(\widetilde{A}\right), w\left(\widetilde{B}\right)\right), \max\left(\beta_1, \beta_2\right)\right)\\ \widetilde{A} \times \widetilde{B} &= \left(m\left(\widetilde{A}\right) \times m\left(\widetilde{B}\right), w\left(\widetilde{A}\right) \cup w\left(\widetilde{B}\right), \beta_1 \cup \beta_2\right)\\ &= \left(m\left(\widetilde{A}\right) \times m\left(\widetilde{B}\right), \max\left(w\left(\widetilde{A}\right), w\left(\widetilde{B}\right)\right), \max\left(\beta_1, \beta_2\right)\right)\\ \widetilde{A} \div \widetilde{B} &= \left(m\left(\widetilde{A}\right) \div m\left(\widetilde{B}\right), w\left(\widetilde{A}\right) \cup w\left(\widetilde{B}\right), \beta_1 \cup \beta_2\right)\\ &= \left(m\left(\widetilde{A}\right) \div m\left(\widetilde{B}\right), \max\left(w\left(\widetilde{A}\right), w\left(\widetilde{B}\right)\right), \max\left(\beta_1, \beta_2\right)\right)\end{aligned}$$

Впорядкування прямокутно-трапецієподібних нечітких чисел

Для реалізації операцій порівняння та проведення ранжування нечітких чисел природньо використовувати спосіб на основі медіанного середнього значення. Іншими словами, якщо для кожного $\widetilde{A} = \left(a_1, a_2, a_3\right) \in F\left(R\right)$ визначити функцію ранжування $\Re : F\left(R\right) \to R$ з урахуванням величини медіанного середнього значення у вигляді $\Re\left(\widetilde{A}\right) = \left[\left(\dfrac{a_1 + a_2}{2}\right) + \left(\dfrac{\beta}{4}\right)\right]$, тоді для довільних двох трапецієподібних нечітких чисел $\widetilde{A} = \left(a_1, a_2, a_3\right)$ та $\widetilde{B} = \left(b_1, b_2, b_3\right)$ маємо можливі наступні варіанти порівняння:

$\widetilde{A} \succ \widetilde{B}$ тоді і лише тоді, якщо $\Re\left(\widetilde{A}\right) > \Re\left(\widetilde{B}\right)$;

$\widetilde{A} \prec \widetilde{B}$ тоді і лише тоді, якщо $\Re\left(\widetilde{A}\right) < \Re\left(\widetilde{B}\right)$;

$\widetilde{A} \approx \widetilde{B}$ тоді і лише тоді, якщо $\Re\left(\widetilde{A}\right) = \Re\left(\widetilde{B}\right)$.

Дефазифікація трапецієподібних нечітких чисел

Дефазифікація представляє собою процес перетворення нечіткого результату до чіткого (числового) значення для наступного аналізу та порівняння. Це важливий крок у методиці застосування нечіткого підходу, особливо в задачах нечіткого управління та нечіткої бізнес-логіки, де потрібно перетворити нечіткі розв'язки на конкретні події або числові значення. Існують різні методики дефазифікації, серед яких найбільш поширеними [7] є:

- метод лівого, правого або середнього значення максимуму, який обирає ліве (мінімальне), праве (максимальне), або середнє значення ядра, в межах якого функція належності досягає максимуму;
- метод центру тяжіння (Center of Gravity, CoG);
- метод бісектора площі (Bisector of Area, BoA), який знаходить значення x_b, яке ділить площу під кривою функції належності на дві рівні частини.

Для проведення порівняння результатів дослідження будемо використовувати методи центру тяжіння та метод бісектору площі.

У методі центру тяжіння точка дефазифікації обчислюється як центр тяжіння нечіткої множини. Для дискретної множини формула виглядає так:

$$CoG = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu(x_i) \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} \mu(x_i)}, \qquad (8)$$

де x_i - точки в просторі результату, а $\mu(x_i)$ - ступінь належності кожної точки. У випадку неперервного розподілу формула має вигляд:

$$CoG = \frac{\int_{a_1}^{a_4} x \cdot \mu(x) dx}{\int_{a_1}^{a_4} \mu(x) dx}. \qquad (8')$$

Наприклад, для трикутного нечіткого числа з нульовим лівим розподілом (6), точка дефазифікації дорівнює

$$CoG(\widetilde{A}) = \frac{a_2 + 2a_1}{3}.$$

В методі бісектора площі шукається точка x_b така, що площа під кривою функції належності зліва від x_b дорівнює половині загальної площі під усією функцією. Формула для визначення цієї точки [10]:

$$\int_{-\infty}^{x_b} \mu(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x) dx \qquad (9)$$

Для нечіткого трикутного числа $\widetilde{A}$ з нульовим лівим розподілом (6), точка x_b становить

$$a_b = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(a_1 + \left(\sqrt{2} - 1 \right) \cdot a_2 \right).$$

Нескладно перевірити, що для нечіткого трикутного числа $\widetilde{A}$ з нульовим лівим розподілом операція дефазифікації $deff\,(\cdot)$ при використанні описаних методів є адитивною:

$$deff\left(\widetilde{A} + \widetilde{B}\right) = deff\left(\widetilde{A}\right) + deff\left(\widetilde{B}\right) \qquad (10)$$

Для нечіткого трапецієподібного числа $\widetilde{A}$ з нульовим лівим розподілом властивість адитивності (10) в загальному випадку не справджується.

Математичне формулювання нечіткої задачі комівояжера

Традиційні проблеми розв'язання задач оптимізації суттєво ускладнюються у випадку врахування неточних параметрів, що обмежує можливість застосування відомих підходів до вирішення задачі. Необхідність у знаходженні оптимальних розв'язків, важливість ефективного розв'язання задачі комівояжера в умовах невизначеності та неточності спонукають до пошуку різних методів та алгоритмів вирішення розглянутої проблеми.

Конкретизуємо зміст нечіткої задачі комівояжера. В якості цільової функції НЗК розглянемо критерій тривалості маршруту. За умови врахування нечітко заданої формалізації часу переміщень між окремими пунктами мережі міст отримуємо проблему пошуку найшвидшого маршруту для задачі комівояжера.

У цьому випадку необхідно знайти циклічну перестановку номерів міст, що має відвідати комівояжер, відповідно до якої затрати часу будуть мінімальні за умови, що кожен з пунктів потрібно відвідати не більше одного разу і повернутись до вихідної точки. Математичне формулювання нечіткої задачі комівояжера можна записати так: потрібно мінімізувати цільову функцію

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \widetilde{t}_{ij} x_{ij}, \qquad (11)$$

де часові витрати на переміщення між пунктами задаються у вигляді матриці T з елементами у вигляді трапецієподібних нечітких чисел, можливі шляхи з'єднання між містами подаються матрицею X за умов виконання обмежень:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \text{ для всіх } (j = 1,2,...,n),$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \text{ для всіх } (i = 1,2,...,n),$$

та $x_{ij} = 0$ або 1 для всіх $i, j = 1,2,...,n$.

Для програмної реалізації у матриці T елементи $\tilde{t}_{ii}$ необхідно задати великими додатними числами для того, щоб отримати у розв'язку $x_{ii} = 0$ для всіх $i = 1,2,....,n$.

Однією з реалізацій методу динамічного програмування для розв'язання задачі комівояжера є алгоритм Хелда-Карпа [11], для якого відомо, що він має часову складність $O(n^2 2^n)$ і просторову складність $O(n2^n)$, що робить його значно швидше повного перебору, особливо на відносно невеликих наборах вхідних даних.

Для формалізації підходу для розв'язання задачі комівояжера на множині міст в мережі визначимо граф $G(S,E)$, де S - множина вершин (вузлів), E - множина ребер.

Через $C(S,i)$ позначимо тривалість найкоротшого маршруту комівояжера, який починається і закінчується в місті i за умови відвідування кожного міста в поточній підмножині $\bar{S}$ множини вузлів S рівно один раз, $\bar{S} \subset S$. Тоді величину $C(\bar{S},i)$ можна обчислити за такою формулою:

$$C(\bar{S},i) = \min_{j \in S, j \neq i} \left(C(\bar{S} \setminus \{i\}, j) + t_{ij} \right), \quad (12)$$

де $\bar{S}$ - підмножина всіх міст, крім деякого початкового, яке визначає стан задачі, i та j - номера міст в множині $\bar{S}$, t_{ij} - тривалість часу проїзду від міста i до міста j, $C(\bar{S} \setminus \{i\}, j)$ - тривалість найкоротшого шляху, за яким комівояжер відвідує всі міста в $\bar{S}$, за винятком міста i, починаючи і закінчуючи у місті j.

Як і у випадку розв'язування чіткої задачі комівояжера для нечіткого варіанта, даний підхід реалізується на основі побудови просторового дерева станів, що містить усі можливі шляхи.

Далі розглянемо чисельні приклади. Для початку розглянемо задачу.

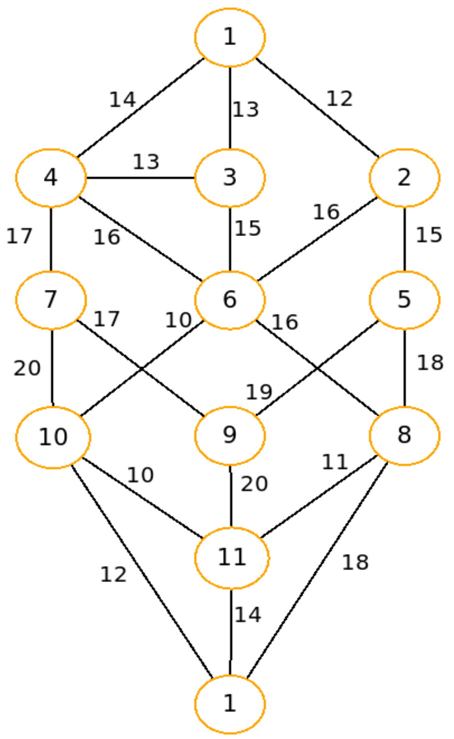

Рис. 3. Приклад чіткої задачі комівояжера

Для даної задачі оптимальним розв'язком є маршрут

$$1 \to 2 \to 6 \to 10 \to 11 \to 8 \to 5 \to \\ \to 9 \to 7 \to 4 \to 3 \to 1, \quad (13)$$

для якого величина мінімального шляху становить 156 одиниць.

Введемо нечіткість кожного шляху між містами за правилами

$$\tilde{t}_{ij} = (d_{ij}, d_{ij} \cdot 1.5 + 0.6 + (i+j) \cdot 0.1, \\ d_{ij} \cdot 1.8 + 1.5 + (i+j) \cdot 0.75) \quad (14)$$

де i, j - номера міст, d_{ij} - чітко задана тривалість переміщення. Внесення подібної нечіткості відповідає порівнянню нечітких чисел за методом лівого максимуму (оскільки це значення залишається рівним значенню для чіткої задачі). Тоді нечіткі значення тривалості переїзду між містами будуть визначатися величинами, наведени-ми у табл.1.

Якщо знайти найкраще значення нечіткої тривалості загальної подорожі, то вона буде визначатися (для всіх методів) нечітким числом:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \tilde{t}_{ij} x_{ij} = (156, 253.8, 396.30),$$

для якої, відповідно, $CoG = 245.530$ та $a_b = 246.921$. Даний результат досягається на основі обрання послідовності подорожі у вигляді (13), який був отриманий для чіткої задачі комівояжеру.

В інший спосіб, якщо кожну відстань дефазифікувати і вирішити задачу для відстаней, наведених в колонках CoG та a_b в таблиці 1, то для методу CoG мінімальна тривалість буде становити $\sum CoG = 245.649$ і досягатись на послідовності

$$1 \to 3 \to 4 \to 7 \to 9 \to 5 \to 8 \to \\ \to 11 \to 10 \to 6 \to 2 \to 1. \quad (15)$$

Для методу бісектора площі шлях не зміниться, але загальна мінімальна триваліть буде дорівнювати

$$\sum a_b = 247.125 .$$

Таким чином, можна зробити висновок, що при внесенні нечіткості до чіткої задачі комівояжера, оптимальний маршрут у задачі може змінитись. Подібна ситуація (змінений шлях в дефазифікованій нечіткій задачі за методом порівняння CoG) спостерігається і у випадку, якщо внести менші величини у діапазони нечіткості, наприклад,

$$\tilde{t}_{ij} = (d_{ij}, d_{ij} \cdot 1.2 + 0.6 + (i+j) \cdot 0.1, \\ d_{ij} \cdot 1.4 + 1.5 + (i+j) \cdot 0.75).$$

Таблиця 1. Нечіткі значення тривалості переміщення між містами мережі

i	j	a_1	a_2	a_3	CoG	a_b
1	2	12	18.9	25.35	17.2337	17.9103
1	3	13	20.5	27.90	18.8037	19.4807
1	4	14	22.1	30.45	20.3742	21.0508
1	8	18	28.5	40.65	26.6586	27.3284
1	10	13	19.7	31.35	19.1806	19.2160
1	11	14	22.8	35.70	22.0797	22.1915
2	5	15	23.8	33.75	22.1870	22.7852
2	6	16	25.4	36.30	23.7584	24.3543
3	4	13	20.8	30.15	19.5295	19.9751
3	6	15	24,0	35.25	22.6731	23.1125
4	6	16	25,6	37.80	24.2450	24.6810
4	7	17	27,2	40.35	25.8170	26.2495
5	8	18	28,9	43.65	27.6335	27.9799
5	9	19	30,5	46.20	29.2058	29.5481
6	8	16	26,0	40.80	25.2245	25.3274
6	10	10	17,2	31.50	17.7688	17.1875
7	9	17	27.7	44.10	27.0429	27.0556
7	10	20	32.3	50.25	31.2685	31.4386
8	11	11	19.0	35.55	19.8387	19.1381
9	11	20	32.6	52.50	32.0067	31.9191
10	11	10	17.7	35.25	19.0165	18.246

Висновки

У статті наведено результати дослідження щодо використання нечітких чисел і методу динамічного програмування для пошуку розв'язків задачі комівояжера з урахуванням нечіткого представлення часу в реальних умовах руху. Для формалізації невизначеності та неточності вхідних даних, пов'язаних з впливом суб'єктивно-сті в оцінках тривалості необхідних для переміщення між окремими містами проміжків часу, використовуються нечіткі числа. Проведення розрахунків з нечіткими числами здійснюється на основі їх перетворення до спеціального вигляду, а для подання отриманих нечітких результатів у чіткому вигляді використано метод центра тяжіння (CoG) і бісектора площі, обмеженої кривою функції належності. Проведено порівняння результатів, отриманих на основі вирішення чіткої задачі комівояжера на основі дефазифікованих часових відстаней та дефазифікації розв'язку нечіткої задачі комівояжеру. Отримано результати, які підтвердили залежність розв'язку від способу дефазифікації. Зроблено висновок про доцільність використання трапеціє-подібних нечітких чисел при розв'язанні нечіткої задачі комівояжера за допомогою алгоритму динамічного програмування, що дозволило отримати кращі результати оптимізації маршруту порівняно з використанням чітких чисел на основі дефазифікації нечітко заданих відстаней. Наведено практичні приклади застосування результатів дослідження, зазначено конструктивність запропонованого підходу для вивчення реальних прикладних процесів.

Література

1. Zadeh. L.A., Fuzzy sets, Information and Control, 8, 338-353 (1965).

2. Kumar, A.; Gupta, A. 2011. Methods for solving fuzzy assignment problems and fuzzy travelling salesman problems with different membership functions, Fuzzy Information and Engineering 3(1): 3–21.

3. Bellman, R.E. and L.A. Zadeh (1970), Decision making in fuzzy environment, Management science 17, 144-164.

4. Zimmermann, H.-J. 1978. Fuzzy programming and linear programming with several objective functions, Fuzzy Sets and Systems 1(1): 45-55.

5. N. Christofides (1985). Vehicle Routing, in The Traveling Salesman Problem, Lawler, Lenstra, RinooyKan and Shmoys, eds., John Wiley, 431- 448.

6. Dantzig GB, Fulkerson DR, Johnson SM (1954). Solution of a Large-scale Traveling Salesman Problem. Operations Research, 2, 393410.

7. R.R. Yager, A procedure for ordering fuzzy subsets of the unit interval. Information Sciences, 1981, 24, 143-161.

8. Tien Fuling. Applying interactive fuzzy multi-objective Linear programming to transportation planning decisions//Journal of information and optimization sciences.–2006.–V.27. – №1.– P.107-126.

9. Bablu Jana, Tapan Kumar Roy. Multi-Objective Fuzzy Linear Programming and Its Application in Transportation Model//Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences. – 2005. – V.21. – No.2. – P.243-268.

10. Kaufman A., Gupta M.M. Introduction to Fuzzy Arithmetic, Theory and applications /Van Nostrand Reinhold Co. Inc.,Workingham, Berkshire, 2003. 361p.

References

1. Zadeh. L.A., Fuzzy sets, Information and Control, 8, 338-353 (1965).

2. Kumar, A.; Gupta, A. 2011. Methods for solving fuzzy assignment problems and fuzzy travelling salesman problems with different membership functions, Fuzzy Information and Engineering 3(1): 3–21.

3. Bellman, R.E. and L.A. Zadeh (1970), Decision making in fuzzy environment, Management science 17, 144-164.

4. Zimmermann, H.-J. 1978. Fuzzy programming and linear programming with several objective functions, Fuzzy Sets and Systems 1(1): 45–55.

5. N. Christofides (1985). Vehicle Routing, in The Traveling Salesman Problem, Lawler, Lenstra, RinooyKan and Shmoys, eds., John Wiley, 431-448.

6. Dantzig GB, Fulkerson DR, Johnson SM (1954). Solution of a Large-scale Traveling Salesman Problem. Operations Research, 2, 393410.

7. R.R.Yager, A procedure for ordering fuzzy subsets of the unit interval. Information Sciences, 1981, 24, 143-161

8. Tien Fuling. Applying interactive fuzzy multi-objective Linear programming to transportation planning decisions // Journal of information and optimization sciences. – 2006. – V.27. – №1. – P.107-126.

9. Bablu Jana, Tapan Kumar Roy. Multi-Objective Fuzzy Linear Programming and Its Application in Transportation Model// Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences. – 2005. – V.21. – No.2. – P.243-268.

10. Kaufman A., Gupta M.M. Introduction to Fuzzy Arithmetic, Theory and applications / Van Nostrand Reinhold Co. Inc., Workingham, Berkshire, 2003. 361p.

The article has been sent to the editors 16.01.24.
After processing 10.02.24.
Submitted for printing 20.03.24.