

УДК 681.513.8

ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО ИССЛЕДОВАНИЮ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ РЕЛАКСАЦИОННОГО ИТЕРАЦИОННОГО АЛГОРИТМА ПРИ ПОСТРОЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ

А.В. Павлов¹, В.А. Павлов²

¹Международный научно-учебный центр информационных технологий и систем НАНУ и МОНУ ²Открытый международный университет развития человека "Украина", г. Киев

Me_ovechka@bigmir.net, vapavlo@bk.ru

У роботі за допомогою чисельних експериментів досліджена швидкість збіжності до точного розв'язку при побудові нелінійних моделей узагальненим релаксаційним ітераційним алгоритмом (УРІА) МГУА і показано, що вона на порядок нижче, ніж аналогічна швидкість при побудові лінійних моделей.

Ключові слова: метод групового урахування аргументів, узагальнений релаксаційний ітераційний алгоритм, швидкість збіжності, нелінійні моделі.

The paper investigates convergence rate of generalized relaxational iterative algorithm (GRIA) of GMDH in case with convergence to solution (nonlinear model) via numerical experiments. Convergence rate of GRIA in this case is one degree lower then in case with convergence to linear models.

Key words: group method of data handling, generalized relaxational iterative algorithm, convergence rate, nonlinear models.

В работе с помощью численных экспериментов исследована скорость сходимости к точному решению при построении нелинейных моделей обобщённым релаксационным итерационным алгоритмом (ОРИА) МГУА и показано, что она на порядок ниже, чем аналогичная скорость при построении линейных моделей.

Ключевые слова: метод группового учёта аугментов, обобщённый релаксационный итерационный алгоритм МГУА, скорость сходимости, нелинейные модели.

Вступление

В настоящее время мы часто сталкиваемся с задачами моделирования объектов (процессов), которые описываются большим количеством (больше 300) признаков (аргументов). Напомним постановку задачи.

Задана матрица данных \mathbf{X} , $\dim \mathbf{X} = n_W \times m$, где m – количество входных переменных, n_W – количество наблюдений (точек), и вектор \mathbf{y} выходной переменной y , $\dim \mathbf{y} = n_W \times 1$. Выходная переменная y измеряется с помехой ξ . Предполагается ее аддитивность, некоррелированность, математическое ожидание $M(\xi) = 0$, неизвестная дисперсия σ^2 постоянна и неизвестен закон распределения. Пусть задан класс структур моделей Ψ . Необходимо найти оптимальную по минимуму заданного критерия CR модель

$$\hat{\mathbf{y}}_{\mathbf{f}}^* = \mathbf{f}^*(\mathbf{X}, \hat{\Theta}_{\mathbf{f}}), \quad (1)$$

определяемую как

$$\mathbf{f}^* = \arg \min_{\mathbf{f} \in \Psi} CR(\mathbf{y}, \mathbf{f}(\mathbf{X}, \hat{\Theta}_{\mathbf{f}})), \quad (2)$$

где оценки параметров $\hat{\Theta}_f$, $\dim \hat{\Theta}_f = s_f \times 1$, для каждой $\mathbf{f}(\mathbf{X}, \Theta_f) \in \Psi$ – это решение задачи:

$$\hat{\Theta}_f = \arg \min_{\Theta_f \in \mathcal{R}^{s_f}} QR(\mathbf{y}, \mathbf{f}(\mathbf{X}, \Theta_f)). \quad (3)$$

Здесь $QR(\cdot)$ – критерий качества решения задачи оценивания параметров, $CR(\cdot)$ – критерий качества решения задачи выбора оптимальной модели.

Именно в такой постановке задачи формулируется метод группового учёта аргументов (МГУА), предложенный А.Г. Ивахненко, для ее решения. Алгоритмы МГУА строят модели (1), линейные по вектору параметров Θ_f . Все алгоритмы МГУА можно разделить на переборные и итерационные. Последние были разработаны для решения задачи (2), (3) при большом количестве аргументов. Итерационные алгоритмы, в свою очередь, делятся на релаксационные и многорядные алгоритмы.

Для итерационных алгоритмов (далее алгоритмов) важным является их сходимость к точному решению (истинной модели). С момента публикации статьи о первом алгоритме [1] исследованию их сходимости уделялось крайне мало внимания. Из ранних работ следует отметить работу [2], где теоретически доказывается сходимость алгоритма СМЛ (алгоритм релаксационного типа) к точному решению. Этот алгоритм строит модели линейные, как по параметрам Θ_f , так и по переменным x_i , $i = \overline{1, m}$. В работе [3] на нескольких примерах построения линейных и нелинейных по входным переменным моделей показана сходимость обобщённого итерационного алгоритма к точному решению; в [4] разработана принципиально новая методика проведения численных (компьютерных) экспериментов, в соответствии с которой устанавливается не только факт сходимости алгоритма, но и исследуется скорость сходимости, а также условия, от которых она зависит.

1. Постановка задачи

Целью данной работы является исследование скорости сходимости с помощью методики, изложенной в [4], обобщённого релаксационного итерационного алгоритма (ОРИА) МГУА, описанного в работе [5]. Если в [4] скорость сходимости ОРИА исследовалась при построении линейных моделей, то в данной работе исследуются нелинейные модели. Кратко опишем методику исследования скорости сходимости итерационных алгоритмов.

2. Методика проведения численных экспериментов для исследования скорости сходимости итерационных алгоритмов

Определим скорость сходимости итерационного алгоритма как количество итераций r^* , необходимых для получения решения с заданной точностью ε . Как правило, при проведении численных экспериментов r^* существенно зависит от свойств матрицы, подаваемой на вход алгоритма, например: от коррелированности её строк/столбцов, числа её обусловленности и др. Поэтому к ряду

исследуемых в эксперименте параметров (свобода выбора F на каждой итерации, количество s_t одночленов модели и др.) следует добавить характеристику данных, влияющую на скорость сходимости. Не ограничивая общности, пусть это будет одна характеристика Pr .

При проведении численных экспериментов используют Процедуру Генерации Матрицы (ПГМ), в основе которой лежит Генератор Псевдослучайных Чисел (ГПЧ). В экспериментах необходимо генерировать матрицы со свойствами, не влияющими на скорость сходимости алгоритма. Однако с учетом особенности получения матриц параметр Pr является случайной величиной. Поэтому необходимо настроить ПГМ так, чтобы математическое ожидание параметра Pr генерируемых матриц было близко к заданному значению.

Методика исследования скорости сходимости итерационных алгоритмов состоит из следующих этапов:

Этап 1. Определить параметры ПГМ и их значения, позволяющие генерировать матрицы с оценкой математического ожидания характеристики данных Pr , близкой к заданному значению.

Этап 2. Исследовать скорость сходимости алгоритма при изменении значения параметра Pr и неизменных значениях его управляющих параметров.

Этап 3. Для каждого из управляющих параметров алгоритма исследовать скорость сходимости при изменении его значения и неизменных значениях остальных параметров (включая параметр Pr).

Каждый из этапов метода состоит из двух шагов:

Шаг 1. Определить количество реализаций RN^* , удовлетворяющее заданному значению δ для гистограмм распределения параметра r^* при заданном значении исследуемого параметра par , $par \in \{Pr, F, s_t\}$.

1.1 Сгенерировать исходную матрицу с помощью ПГМ.

1.2 Построить модель с помощью исследуемого алгоритма, подав на его вход сгенерированную матрицу.

1.3 Добавить полученное значение r^* в гистограмму.

1.4 Выполнить пункты 1.1-1.3 заданное количество реализаций RN .

1.5 Выполнить пункт 1.4 для разных значений RN , увеличивая его с некоторым интервалом до тех пор, пока мера отличия гистограмм для двух последовательных значений RN не станет удовлетворять заданному значению δ .

Шаг 2. Построить гистограммы распределения параметра r^* для разных значений параметра par , используя найденное количество реализаций RN^* .

На первом этапе метода $par = Pr$. При этом на шаге 2 необходимо найти значения параметров ПГМ, при которых оценка математического ожидания параметра Pr генерируемой матрицы близка к заданному значению.

Согласно [5] ОРИА содержит два метода оценивания параметров, три метода расчёта критериев селекции и два генератора структур при построении нелинейных моделей: с направленным и полным перебором на каждой итерации. Если сходимость ОРИА к точному решению по внутреннему критерию RSS_A не зависит от методов оценивания параметров и расчёта критериев селекции, то от генератора структур она зависит. В частности, алгоритм сходится при использовании генератора с полным перебором (в [6] теоретически доказаны различ-

ные виды сходимости), однако не существует такого доказательства для алгоритма с генератором направленного перебора. Поэтому в данной работе исследуется: насколько быстро сходится и от чего зависит скорость сходимости РИА, использующего генератор с полным перебором (ПП) структур на каждой итерации, при построении нелинейных моделей. Обозначим этот алгоритм РИА ПП.

3. Применение методики для исследования скорости сходимости РИА ПП

В экспериментах \mathbf{X}_A – исходная матрица данных, где её столбцы \mathbf{x}_i , $i = \overline{1, m}$ соответствуют входным переменным x_i . Для построения нелинейных моделей предварительно формируется матрица \mathbf{Z}_A , содержащая вектор-столбцы, отвечающие всем возможным произведениям исходных переменных x_i , $i = \overline{1, m}$ без повторов, ограниченным заданной максимальной степенью $pow > 1$, $\dim \mathbf{Z}_A = n_W \times l$, $l = C_{m+pow}^{pow} - 1 - m$.

Для описания ПГМ введём обозначения: s_{lin} – количество линейных истинных аргументов; s_{mult} – количество мультипликативных истинных аргументов; \mathbf{W}_A – выходная матрица ПГМ, $\mathbf{W}_A = (\mathbf{H}_A : \mathbf{y}_A)$, $\dim \mathbf{W}_A = n_A \times (M + 1)$; n_A – число наблюдений; M – количество аргументов; $\mathbf{H}_A = (\mathbf{X}_A : \mathbf{Z}_A)$. Входными параметрами ПГМ являются: M , n_A , s_{lin} , s_{mult} . Блок-схема алгоритма представлена на рис. 1. В ПГМ используется один из широко известных генераторов псевдослучайных чисел – Mersenne Twister MT19937 из открытой библиотеки C++ Boost [7], период, повторения случайной последовательности которого, составляет 2^{19937} [8]. Псевдослучайные числа генерируются по равномерному закону распределения в интервале $[0; 1]$.

Можно показать, что скорость сходимости РИА ПП зависит от такой характеристики матрицы \mathbf{X}_A , как мера ортогональности системы её вектор-столбцов. Обозначим центрированные по отношению к среднему и нормированные по величине среднеквадратичного отклонения σ вектор-столбцы матрицы \mathbf{X}_A в виде матрицы $\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}_A$. Очевидно, что если вектор-столбцы матрицы $\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}_A$ образуют ортогональную систему, то корреляционная матрица $\Sigma_X = \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}_A^T \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}_A$ является единичной с детерминантом, равным 1. Поэтому в качестве меры ортогональности системы вектор-столбцов матрицы $\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}_A$ выбран детерминант d корреляционной матрицы Σ_X . Поскольку для меры ортогональности не важен знак парной корреляции между вектор-столбцами матрицы $\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}_A$, пусть матрица Σ_X содержит модули значений. Следовательно, $d \in [0; 1]$, причём, если $d = 0$, то матрица Σ_X вырожденная, а при $d = 1$ она единичная.

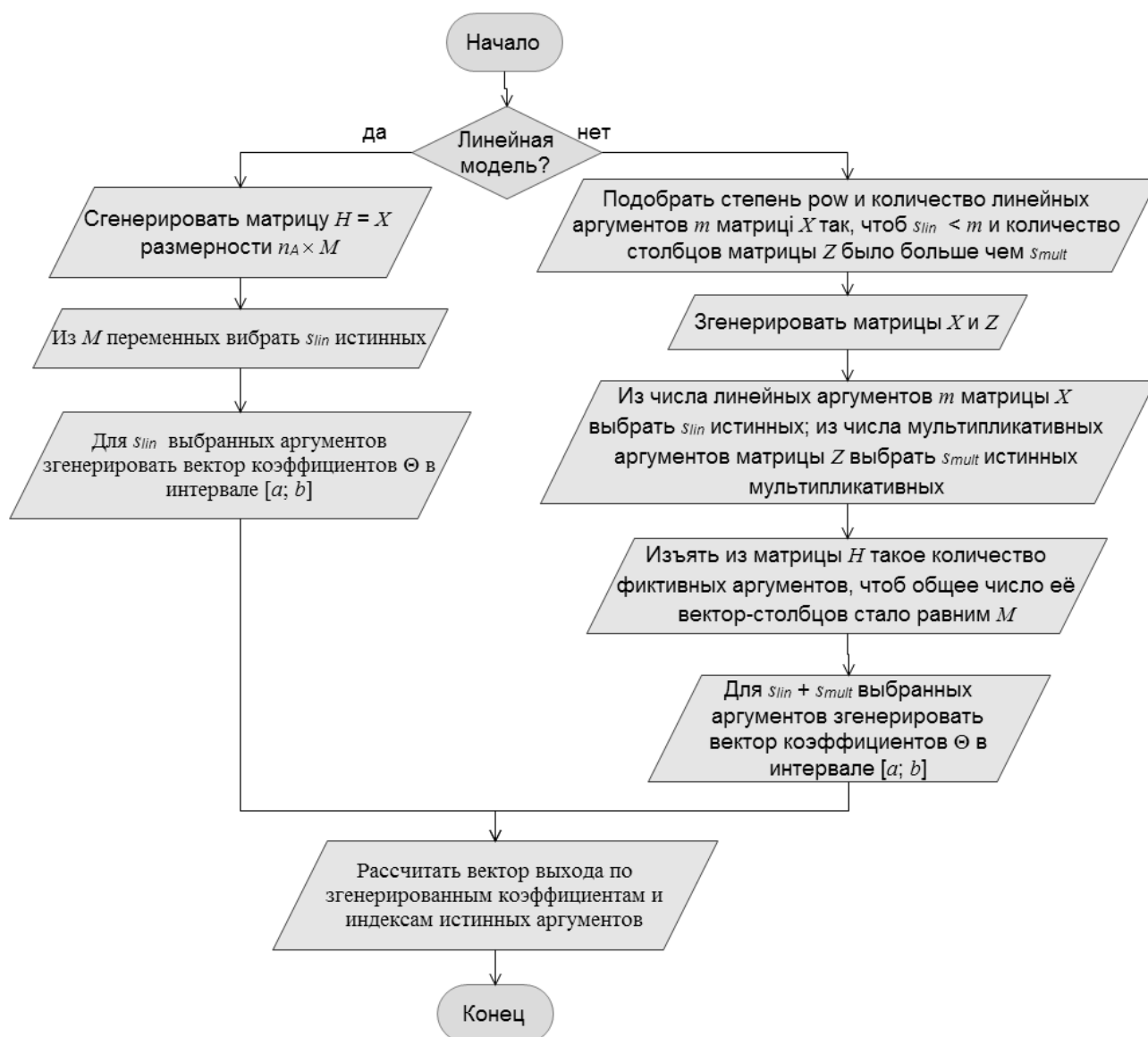


Рис. 1. Блок схема процедуры генерации матрицы

Скорость сходимости алгоритма исследуется при условии, что матрица X_A содержит только истинные аргументы. Сходимость РИА ПП отслеживается по разности критерия $NRSS_A$ лучших моделей на двух соседних итерациях: $NRSS_{A,r}^* - NRSS_{A,r+1}^* = \Delta_{r+1}$. Останов алгоритма осуществляется по условию $\Delta_{r+1} < \varepsilon$, где ε – заданная точность моделирования. Формула для расчёта $NRSS_{A,r}^*$ имеет вид:

$$NRSS_{A,r}^* = \frac{\sum_{i=1}^{n_A} (\tilde{y}_{A,i} - \hat{y}_{A,r,i}^*)^2}{\sum_{i=1}^{n_A} \tilde{y}_{A,i}^2},$$

где $\tilde{y}_{A,i}$ – центрированное на выборке обучения A значение $y_{A,i}$ вектора y_A ; $\hat{y}_{A,r,i}^*$ – соответствующее центрированное значение выхода лучшей модели r -й итерации.

Применим методику исследования скорости сходимости итерационных алгоритмов для анализа свойств РИА ПП при построении нелинейных моделей.

Этап 1. На первом этапе методики следует определить параметры ПГМ и их значения, позволяющие генерировать матрицы с оценкой математического ожидания детерминанта d , близкого к заданному значению. Однако, прежде всего, необходимо определить количество реализаций RN^* , при котором результаты могут быть признаны достоверными.

Процедура определения RN^* основывается на сравнении гистограмм распределения параметра r^* при двух разных значениях RN , где большее из них взято за эталон. Если погрешность гистограммы при меньшем значении RN по отношению к эталону не больше 5%, это значение берётся за RN^* . Подробное описание процедуры дано в [4], где найденное значение $RN^* = 10^5$. Как показали проведенные эксперименты это значение RN^* можно использовать и при исследовании нелинейных моделей.

Процесс генерации двух независимых случайных вектор-столбцов в ПГМ обладает следующим свойством: чем больше количество элементов n_A в векторах, тем меньше значение их парной корреляции. Это объясняется тем, что чем больше размерность векторов, тем большая степень свободы для их представления, и тем больше возможности для взаимной ортогонализации векторов. Поэтому число наблюдений n_A можно использовать для генерации матрицы \mathbf{X}_A с заданным детерминантом матрицы Σ_X , где по диагонали при увеличении значения n_A будут стоять значения, близкие по модулю к 1, а вне диагонали – близкие к нулю. Подтвердим это утверждение численно.

В случае построения нелинейной модели вектор-столбцы \mathbf{x}_i и \mathbf{z}_j матрицы $\mathbf{H}_A = (\mathbf{X}_A : \mathbf{Z}_A)$ имеют между собой парную корреляцию, лежащую в интервале $[0.6; 0.99]$, что указывает на большую степень их линейной зависимости. Поэтому в случае использования в качестве меры ортогональности детерминанта d_H матрицы корреляций $\Sigma_H = \tilde{\mathbf{H}}_A^T \tilde{\mathbf{H}}_A$, он будет близким к нулю, и, что самое главное, даже сколь угодно большое значение параметра n_A не сможет увеличить значение d_H хотя бы на 0.1. Ввиду этого при исследовании нелинейных моделей в качестве меры ортогональности подсчитывается детерминант d только для подматрицы $\Sigma_X = \tilde{\mathbf{X}}_A^T \tilde{\mathbf{X}}_A$ матрицы корреляций Σ_H .

Следует отметить, что для сходимости алгоритма важно, насколько попарно линейно независимыми являются комбинации вектор-столбцов матрицы \mathbf{H}_A . Например, если взять модель:

$$y = \theta_1 x_1^3 + \theta_2 x_2^2 + \theta_3 x_3, \quad (4)$$

которая является нелинейной по переменным, а векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ генерируются случайным образом (их парная корреляция близка к нулю), то скорость сходимости модели (4) будет сравнима со скоростью сходимости для линейной модели: $y = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \theta_3 x_3$.

Для исследования скорости сходимости алгоритма при построении нелинейных моделей была выбрана модель, содержащая как «линейно независи-

мые» между собой x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , так и имеющие ненулевую корреляцию («линейно зависимые») с $x_i, i = \overline{1,5}$, переменные $x_1^2, x_1^3, x_1^2 x_2$:

$$y = 6.29447 - 7.29046x_1 + 8.11584x_2 + 6.70017x_3 - 7.46026x_4 + 9.37736x_5 + 8.26752x_1^2 - 5.57932x_1^3 + 2.64719x_1^2 x_2. \quad (5)$$

Результаты этого эксперимента представлены на рисунках 2 и 3. Параметры алгоритма: свобода выбора $F = 5$, точность моделирования $\varepsilon = 10^{-6}$. Последнее значение выбрано таким, т.к. при $\varepsilon < 10^{-6}$ в процессе построения гистограмм попадают варианты, когда параметр r^* превышает число итераций $R(F)$, при котором алгоритм исчерпывает имеющийся объём оперативной памяти (1.5Гб), поскольку, например, при $F = 5$ получено $R(F) = 4000$.

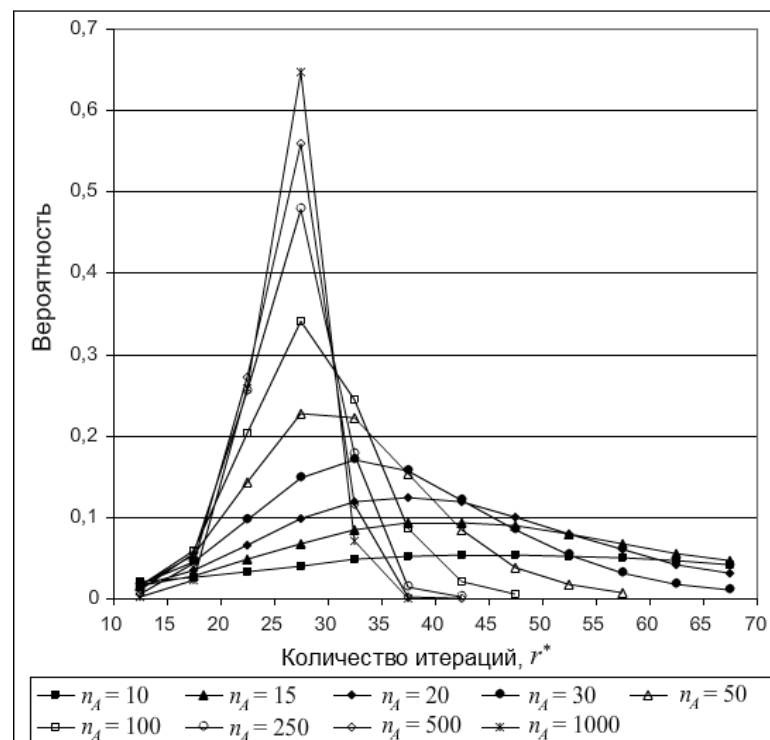


Рис. 2. Гистограммы распределения r^* при изменении количества наблюдений n_A

Над столбиками гистограмм рис. 3 представлены тысячные доли значений усреднённого детерминанта d_{aver} . Усредненное значение детерминанта рассчитывается следующим образом. Вычисляются значения детерминантов d всех матриц, для которых алгоритм сошёлся к решению за r^* итераций, попадающих в соответствующий интервал для r^* . Значение d_{aver} есть среднее рассчитанных значений d .

Анализ рисунков 2 и 3 позволяет заключить, что параметр n_A прямо пропорционально влияет на: 1) значение детерминанта d , а, следовательно, и на меру ортогональности вектор-столбцов матрицы \mathbf{X}_A , поэтому количество наблюдений можно использовать для получения матрицы корреляций с заданным значением детерминанта; 2) скорость сходимости алгоритма.

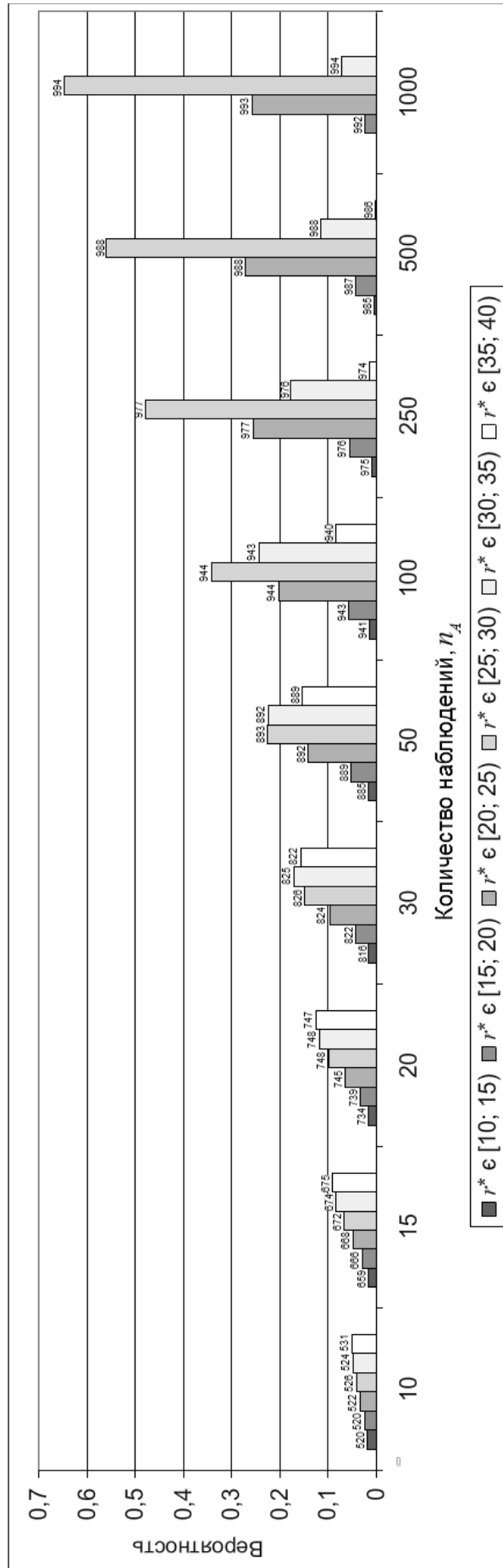


Рис. 3. Гистограммы и соответствующие значения d_{aver} для ряда значений n_A

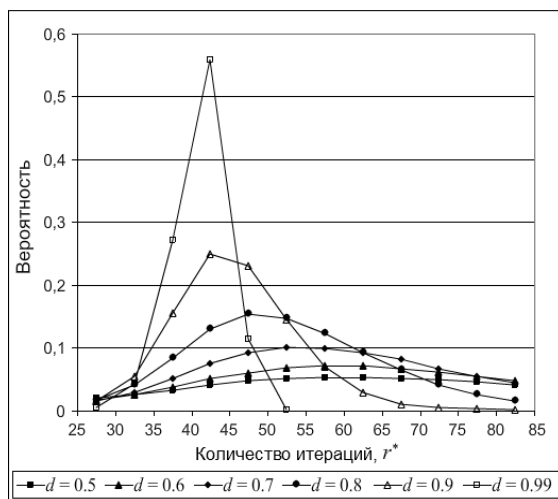
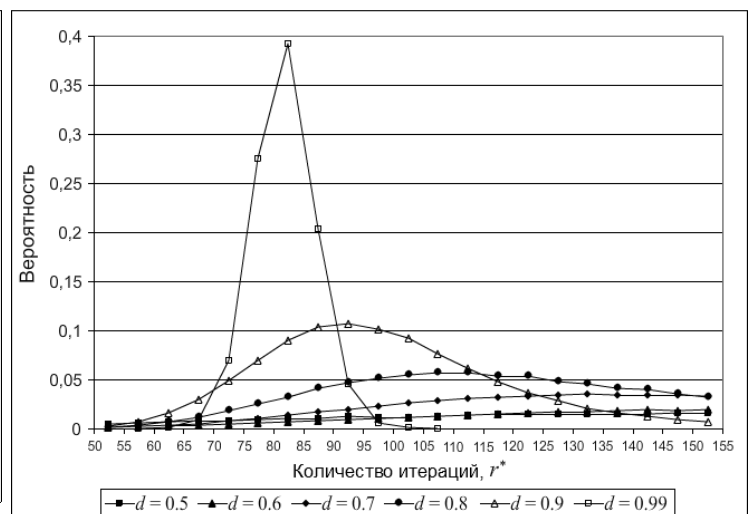
Шаг 1.2. Выполним поиск значений параметров ПГМ, при которых математическое ожидание параметра d генерируемой матрицы близко к заданному значению. Ввиду того, что функция d является монотонно возрастающей от параметра n_A , в качестве алгоритма поиска использовался бинарный поиск. Для модели (5) были определены значения n_A , позволяющие генерировать матрицы X_A с заданным значением детерминанта $d \in D$, $D = \{0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 0.99\}$, см. табл. 1.

Таблица 1.

Количество точек и соответствующее значение детерминанта

d	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.99
n_A	10	12	16	26	57	500

Этап 2. Исследуем скорости сходимости РИА ПП при изменении детерминанта d и неизменных остальных его параметрах для нелинейной модели (5), $d \in D$. Свобода выбора $F = 5$, точность моделирования $\varepsilon = 10^{-6}$. Результаты представлены на рис. 4.

Рис. 4. Гистограммы распределения r^* , модель (5)Рис. 5. Гистограммы распределения r^* , модель (6)

Как видно из рис. 4, детерминант d влияет на скорость сходимости r^* , как количественно, так и качественно: при увеличении d математическое ожидание величины r^* смещается влево (увеличивается скорость сходимости алгоритма), и уменьшается её дисперсия – гистограммы приобретают более выраженный пик (увеличивает вероятность сходимости алгоритма за r_{prob} – количество итераций, соответствующее пику гистограммы).

Следует подчеркнуть, что скорость сходимости к нелинейным моделям существенно зависит от ее структуры. Например, скорость сходимости к модели

$$y = -4.82186 + 9.10802 \cdot x_1 - 7.82742x_2 - 5.4407 \cdot x_3 - 2.3515 \cdot x_4 + 3.55896 \cdot x_5 - 1.37364 \cdot x_1^3 + 7.78903 \cdot x_1 x_2 x_4 + 8.92675 \cdot x_2^3 \quad (6)$$

существенно ниже (рис. 5), чем к модели (5). Это объясняется тем, что модель (5) является более простой по количеству взаимосвязей между нелинейными членами, чем модель (6). Если для сходимости к линейной модели, зависящей от пяти аргументов, при $d = 0.7$ РИА ПП необходимо 21 итерация ($\varepsilon = 10^{-12}$) [4], то для сходимости к модели (5), содержащей также 5 аргументов, – 53 итераций, а к модели (6) – 133 итерации. Причём характер гистограмм у нелинейных моделей является значительно более «размытым», нежели у линейных. Поэтому можно заключить, что скорость сходимости РИА ПП при построении нелинейных моделей на порядок ниже, чем линейных.

Исследуем скорость сходимости РИА ПП при изменении параметров d и s_{lin} и постоянном количестве мультипликативных аргументов s_{mult} . Исследовалась модель (5), $d \in D$, $s_{lin} \in S_{lin}$, $S_{lin} = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $s_{mult} = 3$. Модули округлённых коэффициентов моделей для $s_{lin} \in S_{lin}$ представлены в таблице 2.

Таблица 2.

Коэффициенты нелинейных моделей

s_{lin}	$ \theta_0 $	$ \theta_1 $	$ \theta_2 $	$ \theta_3 $	$ \theta_4 $	$ \theta_5 $	$ \theta_6 $	$ \theta_7 $	$ \theta_8 $	$ \theta_9 $	$ \theta_{10} $
5	6.294	7.29	8.12	6.70	7.46	9.38	5.30	4.00	7.78	1.04	3.15
6											
7											
8											
9											
10											

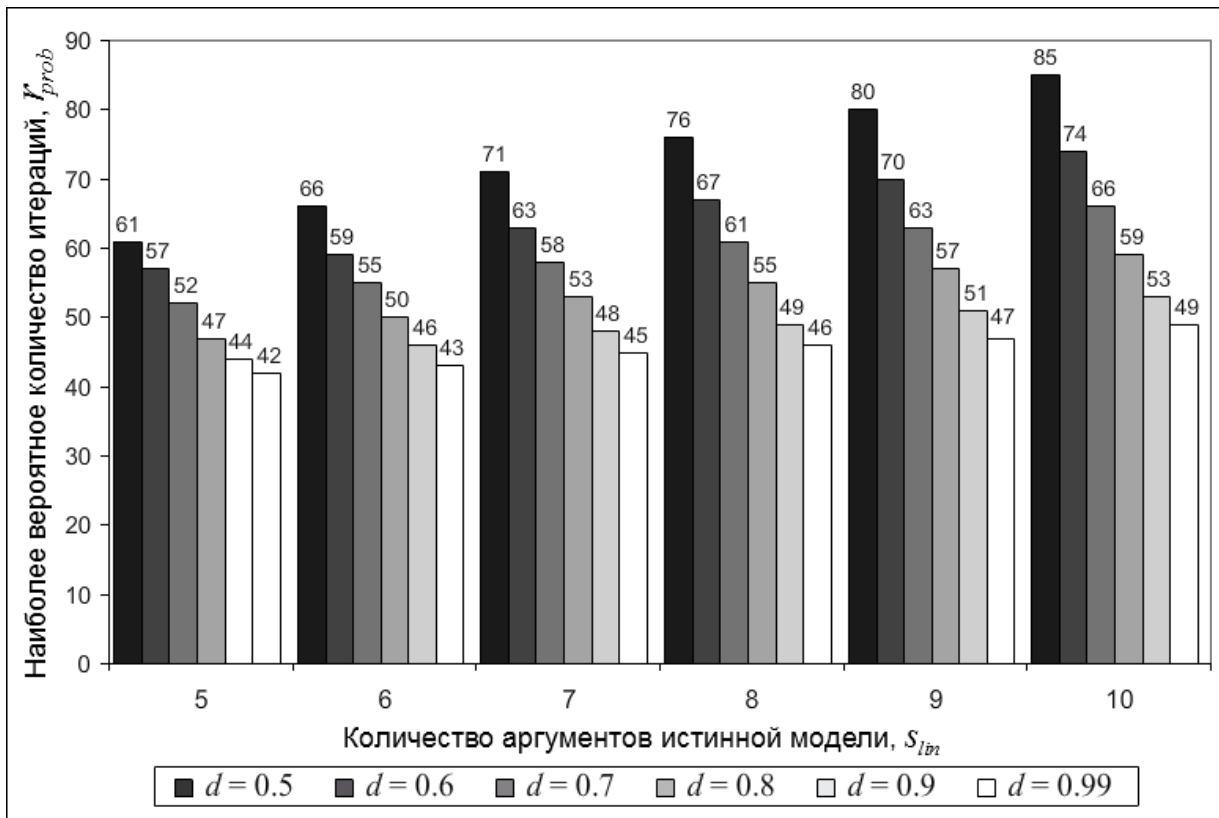


Рис. 6. Значения числа рядов r_{prob} для каждой пары (s_{lin}, d)

Гистограммы строились для каждой пары (s_{lin}, d) , и определялось значение r_{prob} . Свобода выбора $F = 5$, точность моделирования $\varepsilon = 10^{-6}$. Результаты показаны на рис. 6, а их анализ приводит к следующим выводам: 1) значение детерминанта d прямо пропорционально влияет на скорость сходимости алгоритма; 2) значения параметра s_{lin} обратно пропорционально влияют на скорость сходимости алгоритма.

Этап 3. Исследуем скорость сходимости РИА ПП к модели (5) при варьировании свободы выбора F и неизменном параметре d . Пусть $d = 0.7$, тогда $n_A = 17$ (см. таблицу 1). Свобода выбора $F \in \mathfrak{Z}_{nonlin}$, $\mathfrak{Z}_{nonlin} = \{5, 10, 25, 50, 100, 250\}$. Гистограммы для $F = 5$ и $F = 10$ были получены при $RN = 10^6$ с целью удовлетворения заданной точности.

Как видим из результатов, представленных на рис. 7, свобода выбора прямо пропорционально влияет на скорость сходимости алгоритма. Однако характер гистограмм для нелинейной модели значительно отличается от гистограмм для линейной [4]: при изменении F в пределах [25-100] гистограммы имеют не один, а два экстремума. Следует отметить, что при построении гистограмм, изменяя F в пределах [1-250], для любой нелинейной модели с увеличением F левый из экстремумов становится глобальным, а при уменьшении F – правый. Поэтому при увеличении F от 50 до 100 скорость сходимости r^* увеличивается скачкообразно приблизительно в 3 раза (с $r^* = 48$ до $r^* = 17$ итераций).

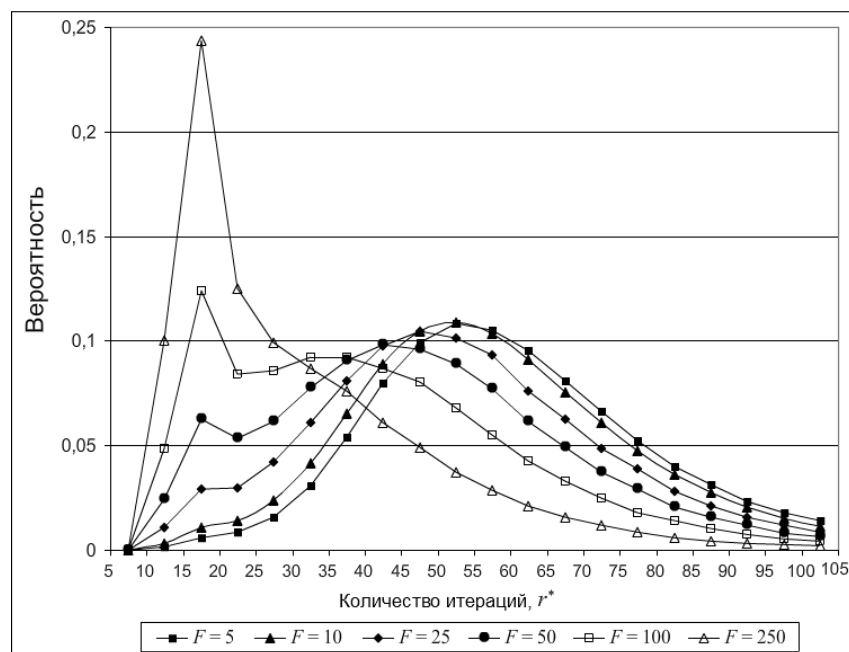


Рис. 7. Гистограммы распределения r^* с изменением параметра F

В таблице 3 проиллюстрирована скорость сходимости лучшей усреднённой нелинейной модели для $F = 50$. Модель усреднена по значениям коэффициентов и критерию. Как видим из таблицы 3, ввиду того, что в эксперименте была задана точность $\varepsilon = 10^{-6}$, алгоритм не смог сойтись к модели (5) достаточно точно. Однако при построении модели

$$y = 6.29447 - 7.29046 \cdot x_1 + 8.11584 \cdot x_2 + 6.70017 \cdot x_1^2 - 7.46026 \cdot x_1 x_2 + 9.37736 \cdot x_2^2 \quad (7)$$

с параметрами алгоритма $n_A = 50$, $RN = 10^4$, $F = 50$ оперативной памяти было достаточно для сходимости алгоритма с точностью $\varepsilon = 10^{-12}$ (см. таблицу 4).

Таблица 3.

Результаты сходимости РИА ПП для модели (5)

№ итерации	$NRSS_A$	θ_0	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7	θ_8
8	$1.4 \cdot 10^{-3}$	5.55	-3.06	8.65	6.66	-7.42	9.37	0	0	1.01
12	$6.4 \cdot 10^{-4}$	5.70	-3.36	8.47	6.68	-7.44	9.37	-0.04	0	1.62
15	$4.7 \cdot 10^{-4}$	5.75	-3.47	8.40	6.69	-7.44	9.37	-0.05	0	1.84
25	$2.9 \cdot 10^{-4}$	5.84	-3.65	8.27	6.69	-7.45	9.37	0.003	-0.088	2.21
35	$2.4 \cdot 10^{-4}$	5.89	-3.73	8.21	6.69	-7.45	9.37	0.017	-0.11	2.39
44	$2.3 \cdot 10^{-4}$	5.91	-3.77	8.18	6.69	-7.45	9.37	0.033	-0.13	2.48
Истинная модель:		6.22	-7.29	8.11	6.7	-7.46	9.37	8.26	-5.57	2.64

Таблица 4.

Результаты сходимости РИА ПП для модели (7)

№ итерации	$NRSS_A$	θ_0	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5
5	$1.34 \cdot 10^{-2}$	5.44639	0	7.55181	0	-7.11667	9.67987
10	$5.11 \cdot 10^{-3}$	6.62952	-6.59114	6.74778	4.97901	-5.74463	9.79954
20	$1.67 \cdot 10^{-3}$	6.35726	-6.76131	7.61762	5.85519	-6.91197	9.56507
43	$3.2 \cdot 10^{-4}$	6.26284	-6.93145	7.98576	6.32843	-7.42516	9.47388
100	$7.78 \cdot 10^{-6}$	6.28432	-7.22814	8.1131	6.64537	-7.47706	9.38612
200	$5.55 \cdot 10^{-9}$	6.29436	-7.28942	8.11563	6.69918	-7.46045	9.37758
289	$1.6 \cdot 10^{-11}$	6.29448	-7.29046	8.11582	6.70016	-7.46025	9.37736
Истинная модель:		6.29447	-7.29046	8.11584	6.70017	-7.46026	9.37736

3. Выводы

В работе осуществлена проверка эффективности работы обобщённого релаксационного итерационного алгоритма (ОРИА) при построении нелинейных моделей. С помощью численных экспериментов исследованы скорость и условия его сходимости к точным моделям. Исходя из анализа полученных результатов можно заключить:

1. Скорость сходимости ОРИА зависит не от того, является модель нелинейной или линейной, а от значения парной корреляции аргументов, входящих в модель: чем она больше, тем ниже скорость сходимости.

2. Установлено, что по величине детерминанта d корреляционной матрицы входных переменных можно судить о скорости сходимости; эта зависимость проявляется как количественно, так и качественно: чем больше детерминант, тем выше скорость сходимости, и тем больше вероятность того, что алгоритм сойдётся за наиболее вероятное количество итераций.

3. Скорость сходимости при построении моделей, имеющих большую парную корреляцию между аргументами (нелинейные модели) на порядок меньше тех моделей, у которых корреляция мала (линейные модели), при одном и том же количестве аргументов. Для сходимости РИА ПП к нелинейной модели, зависящей от пяти аргументов, с точностью $\varepsilon = 10^{-12}$ необходимо около 300 итераций алгоритма, в отличие от линейной (с тем же количеством переменных), где требуется всего 15 итераций.

Также следует отметить, что характеры гистограмм, описывающие вероятность сходимости ОРИА в случае с нелинейными моделями, существенно отличаются от варианта с линейными: они являются более «размытыми», а также при некоторых значениях d имеют два экстремума.

Литература

1. Ивахненко А.Г. Метод группового учета аргументов – конкурент метода стохастической аппроксимации // Автоматика. – 1968. – №3. – С. 58–72.
2. Ивахненко А.Г., Юрачковский Ю.П. Моделирование сложных систем по экспериментальным данным // Москва: Радио и связь, 1987. – 120 с.
3. Булгакова О. С. Узагальнений ітераційний алгоритм індуктивного моделювання з застосуванням мережевих технологій : дис. канд. техн. наук: 05.13.06 / Булгакова Олександра Сергіївна. – К., 2011. – 171 с.
4. Павлов А. В., В. А.Павлов. Методика экспериментальных исследований сходимости итерационных алгоритмов метода группового учёта аргументов // Вісник НТУУ „КПІ”. Інформатика, управління та обчислювальна техніка: Зб. наук. пр. – К.: «Век+», – 2011. – № 54. – С. 3-8.
5. Павлов А. В. Обобщённый релаксационный итерационный алгоритм МГУА // Індуктивне моделювання складних систем. Зб. наук. праць, вип. 2. – К.: МННЦІТС НАНУ, 2011. – С. 95-108.
6. Павлов А.В., Кондрашова Н.В. О сходимости обобщённого релаксационного итерационного алгоритма метода группового учёта аргументов // Управляющие системы и машины, №3, 2012. – С. 24-29, 38.
7. Boost C++ library [Электронный ресурс] — 2011. — Режим доступа: <http://www.boost.org/>.
8. Mersenne twister [Электронный ресурс] – 2011. — Режим доступа: http://en.wikipedia.org/wiki/Mersenne_twister.