СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ

И.В. СЕРГИЕНКО, Е.Ф. ГАЛБА, В.С. ДЕЙНЕКА

УДК 512.64 : 519.61

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И РАЗЛОЖЕНИЯ ВЗВЕШЕННЫХ ПСЕВДООБРАТНЫХ МАТРИЦ, ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ И РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЗАДАЧ. I. ПОЛОЖИТЕЛЬНО-ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ВЕСА

Ключевые слова: *взвешенные псевдообратные матрицы, взвешенные нормальные псевдорешения, представления взвешенных псевдообратных матриц, разложения взвешенных псевдообратных матриц, регуляризация, итерационные методы, задачи наименьших квадратов с ограничениями.*

ВВЕДЕНИЕ

Определение взвешенной псевдообратной матрицы с положительно-определенными весами впервые было дано в 1964 году в работе [1]. В 1968 году в [2] введено понятие косой псевдообратной матрицы. В [3] показано, что множество взвешенных псевдообратных матриц, введенных в [1], совпадает с множеством косых псевдообратных матриц, введенных в [2]. Отметим, что в 1961 году в [4] использовался частный случай взвешенной псевдообратной матрицы. В ряде работ (см., например, [5–7]) исследовалась ML-взвешенная псевдоинверсия. Различные виды псевдоинверсии и ее приложений рассматривались в [8–11]. Большой обзор литературы по различным видам псевдоинверсии имеется в [12]. В дальнейшем, если не оговорено противное, в настоящей работе будет рассматриваться взвешенная псевдоинверсия, определенная в [1–3]. Так как взвешенная псевдообратная матрица с положительно-определенными весами [1–3] является обобщением псевдообратной матрицы Мура–Пенроуза [13, 14], ее исследование представляет теоретический интерес с точки зрения обобщения свойств псевдообращения по Муру–Пенроузу. Кроме того, интерес к взвешенным псевдообратным матрицам в значительной степени обусловлен их приложениями. В частности, это задачи наблюдения и управления [1, 15, 16], статистики [8, 11, 17–19], идентификации [20], нелинейного программирования [21], задачи наименьших квадратов с ограничениями [7, 22], задачи вычисления L- [23] и Lg-псевдорешений [20]. К задачам наименьших квадратов с ограничениями приходят при математическом моделировании процессов в различных предметных областях: физике, экономике, обществе [24].

Настоящая работа носит обзорный характер и написана преимущественно на основе статей авторов, посвященных развитию теории взвешенной псевдоинверсии в направлении исследования свойств взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений, получения и исследования представлений и разложений взвешенных псевдообратных матриц, а также использованию полученных представлений и разложений взвешенных псевдообратных матриц для построения и исследования регуляризованных задач и итерационных методов вычисления взвешенных псевдообратных матриц, взвешенных нормальных псевдорешений, решения задач наименьших квадратов с ограничениями. Данная работа посвящена взвешенной псевдоинверсии с положительно-определенными весами. Исследованию взвешенной псевдоинверсии с вырожденными весами (положительно-полуопределенными) будет посвящена отдельная статья.

Работа состоит из восьми разделов. Разд. 1 носит вспомогательный характер. В нем приведены определения, обозначения, введены матричные и векторные нормы, рассмотрены свойства взвешенных псевдообратных и симметризуемых матриц. В разд. 2 даны представления взвешенных псевдообратных матриц в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых и симметричных матриц. Устанавливается связь взвешенных псевдообратных матриц со взвешенными нормальными псевдорешениями. В разд. 3 построено взвешенное сингулярное разложение матриц и псевдообратных к ним. Разд. 4 посвящен получению и исследованию разложениий взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные ряды и матричные степенные произведения с положительными показателями степеней. Разд. 5 посвящен тем же вопросам, что и разд. 4, но для разложений с отрицательными показателями степеней. Кроме того, получены многочленные предельные представления взвешенных псевдообратных матриц, построены и исследованы регуляризованные задачи для вычисления приближений к взвешенным псевдообратным матрицам и взвешенным нормальным псевдорешениям. В разд. 6 приведено и исследовано ряд итерационных процессов с различными скоростями сходимости для вычисления приближений к решению указанных выше задач. В разд. 7 приведены формулы для представления взвешенной псевдообратной матрицы через псевдообратную матрицу Мура–Пенроуза и частные виды взвешенных псевдообратных матриц. Разд. 8 посвящен адаптации методов вычисления взвешенных нормальных псевдорешений для построения алгоритмов решения задач наименьших квадратов с ограничениями.

Отметим, что в работе везде предполагается вещественность используемых скаляров, векторов, матриц и пространств.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ, ВЕКТОРНЫЕ И МАТРИЧНЫЕ НОРМЫ, СИММЕТРИЗУЕМЫЕ МАТРИЦЫ

Введем необходимые для дальнейшего изложения обозначения и определения. Обозначим $\mathbf{R}^{m\times n}$ множество действительных матриц размера $m\times n$. Пусть $A\in\mathbf{R}^{m\times n}$, $X\in\mathbf{R}^{n\times m}$, а $B\in\mathbf{R}^{m\times m}$ и $C\in\mathbf{R}^{n\times n}$ — симметричные положительно-определенные матрицы. Тогда взвешенная псевдообратная матрица для матрицы A определяется как единственная матрица $X=A^{+}_{BC}$, удовлетворяющая четырем условиям [1, 3]:

$$AXA=A,\ XAX=X,\ (BAX)^{T}=BAX,\ (CXA)^{T}=CXA. \tag{1}$$

При $B=C=E$, где E — единичная матрица, система матричных уравнений (1) будет определять псевдообратную матрицу Мура–Пенроуза [13, 14] к матрице A, которую обозначим A^{+}_{EE}.

Обозначим $\mathbf{R}^{n}$ n-мерное векторное пространство над полем действительных чисел, где векторы — матрицы размера $n\times 1$. Пусть H — симметричная положительно-определенная матрица. Обозначим $\mathbf{R}^n(H)$ евклидово пространство со скалярным произведением $(u, v)_H = (Hu, v)_E$ и нормой $||u||_H = (u, u)_H^{1/2}$, где $(u, v)_E = u^T v$.

Определим норму прямоугольной матрицы [25]. Пусть $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $H \in \mathbf{R}^{m \times m}$ и $V \in \mathbf{R}^{n \times n}$ — симметричные положительно-определенные матрицы, x — произвольный вектор из $\mathbf{R}^n$. Норму матрицы A введем соотношением

$$||A||_{HV} = \sup_{x \neq 0} \frac{||AVx||_H}{||x||_{E_n}} = \sup_{x \neq 0} \frac{||H^{1/2} AVx||_{E_m}}{||x||_{E_n}}, \tag{2}$$

где нижний индекс при единичной матрице означает ее размерность.

По аналогии с [26] можно убедиться, что при таком определении норма матрицы A равна

$$||A||_{HV} = [\lambda_{\max}(VA^T HAV)]^{1/2}, \tag{3}$$

где $\lambda_{\max}(L)$ — максимальное собственное значение матрицы L.

В [25] показано, что функция матрицы, определенная формулой (2), является аддитивной матричной нормой.

Пусть $A \in \mathbf{R}^{m \times p}$, $B \in \mathbf{R}^{p \times n}$, а $H \in \mathbf{R}^{m \times m}$, $V \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $M \in \mathbf{R}^{p \times p}$ — симметричые положительно-определенные матрицы. Тогда для нормы произведения двух прямоугольных матриц имеем оценку [25]

$$||AB||_{HV} \leq ||A||_{HM^{-1}} ||B||_{M^2 V}.$$

Теперь определим норму для квадратной матрицы [27]. Пусть $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ — произвольная квадратная матрица, $H \in \mathbf{R}^{n \times n}$ — симметричная положительно-определенная матрица, x — произвольный вектор из $\mathbf{R}^n$. Норму матрицы A определим соотношением

$$||A||_H = \sup_{x \neq 0} \frac{||Ax||_H}{||x||_H} = \sup_{x \neq 0} \frac{||H^{1/2} AH^{-1/2} H^{1/2} x||_E}{||H^{1/2} x||_E}. \tag{4}$$

Функция $||\cdot||_H$, определенная формулой (4), является мультипликативной матричной нормой, которая равна

$$||A||_H = [\lambda_{\max}(H^{-1/2} A^T HAH^{-1/2})]^{1/2}. \tag{5}$$

Матричная норма (4) согласована с векторной нормой, т.е. $||Ax||_H \leq$ $\leq ||A||_H \, ||x||_H$.

Замечание 1. Из (3) и (5) следует, что введенная соотношением (4) матричная норма для квадратных матриц является частным случаем матричной нормы, введенной для прямоугольных матриц формулой (2), если в последней положить, что A — квадратная матрица и $V = H^{-1/2}$. Поэтому для нормы $||A||_H$, введенной соотношением (4), можно пользоваться обозначением $||A||_{HH^{-1/2}}$.

Отметим некоторые свойства симметризуемых матриц. В настоящей работе будем пользоваться следующим определением симметризуемых матриц.

Определение 1 [28]. Вещественная матрица U называется симметризуемой, если существует такая симметричная положительно-определенная матрица H, называемая симметризатором, что выполняется равенство $U^T H = HU$.

Очевидно, третье и четвертое условия в определении взвешенной псевдообратной матрицы с положительно-определенными весами означают, что матрицы AX и XA симметризуемы симметризаторами B и C соответственно. В отличие от взвешенной псевдообратной матрицы для псевдообратной матрицы Мура–Пенроуза третье и четвертое условия соответственно означают, что матрицы AX и XA симметричны. Поэтому симметризуемые матрицы имеют такое же важное значение при исследовании взвешенных псевдообратных матриц, как и симметричные матрицы при исследовании псевдообратных матриц Мура–Пенроуза.

Отметим некоторые из работ, в которых определялись симметризуемые матрицы и изучались их свойства. Симметризуемая согласно определению 1 матрица U является частным случаем H-симметричных матриц [29, 30], где H предполагается симметричной невырожденной знаконеопределенной матрицей. В работе [31] матрица A называется симметризуемой, если существует такая симметричная положительно-определенная матрица V, что выполняется равенство $VA^T = AV$. В [32] матрица X называется правым (левым) симметризатором для A, если $AX\ (XA)$ — симметричная. Тогда согласно определению 1 матрица U симметризуема слева, а матрица A в [31] — справа. В [33] определены симметризуемые матрицы с вырожденными (положительно-полуопределенными) симметризаторами. В работе [34] предложен алгоритм для вычисления левого симметризатора.

Определение 2[35]. Квадратная вещественная матрица Q называется H-взвешенной ортогональной (ортогональной с весом H), если ее столбцы ортонормальны в смысле скалярного произведения $(\cdot,\cdot)_H$, т.е. если выполняется условие $Q^T HQ = E$, где H — симметричная положительно-определенная матрица.

Аналогично тому, как это доказывается для симметричных матриц (см., например, [28]), для симметризуемых матриц можно показать, что их собственные значения вещественны, а собственные векторы симметризуемой матрицы с матрицей симметризации H, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны в смысле скалярного произведения $(\cdot,\cdot)_H$. Для симметризуемых матриц имеет место [35] следующая теорема.

Теорема 1. Симметризуемая симметризатором H матрица U может быть приведена к диагональной форме с помощью H-взвешенного ортогонального преобразования, т.е. существует такая H-взвешенная ортогональная матрица Q, что $Q^T HUQ = \Lambda$, а матрица U представляется в виде

$$U = Q\Lambda Q^T H, \tag{6}$$

где $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_i)$, λ_i — собственные значения матрицы U.

Определение 3. Представление симметризуемой матрицы формулой (6) называется взвешенным спектральным разложением этой матрицы с весом H.

Замечание 2. Непосредственной проверкой устанавливается, что для невырожденной симметризуемой симметризатором H матрицы U обратная ей матрица также симметризуема симметризатором H и представима в виде

$$U^{-1} = Q\Lambda^{-1} Q^T H. \tag{7}$$

Взвешенное спектральное разложение матриц используется для получения предельных представлений взвешенных псевдообратных матриц [35], разложения взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные ряды [25], для построения взвешенного сингулярного разложения матриц и взвешенных псевдообратных к ним (разд. 3).

Для симметризуемых матриц имеет место следующее предельное представление.

Лемма 1. Для симметризуемой симметризатором H положительно-полуопределенной в смысле скалярного произведения $(\cdot,\cdot)_H$ матрицы U имеет место соотношение

$$U = \lim_{\delta \to +0} (U + \delta E)^{-1} U^2 = \lim_{\delta \to +0} U^2 (U + \delta E)^{-1}. \tag{8}$$

Формулы (7), (8) используются для получения предельных представлений взвешенных псевдообратных матриц [35] аналогично соответствующей процедуре, приведенной в [8], для получения предельных представлений псевдообратных матриц Мура–Пенроуза.

При исследовании итерационных процессов в ряде работ использовались оценки для нормы произведения симметризуемой слева положительно-определенным симметризатором и произвольной прямоугольной матриц и для нормы произведения произвольной прямоугольной и симметризуемой слева положительно-определенным симметризатором матриц, установленные соответственно в [25] и [35]. Результаты исследований указанных работ сформулируем в виде лемм.

Лемма 2. Пусть $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, а $L \in \mathbf{R}^{m \times m}$ — симметризуемая слева положительно-определенным симметризатором $H \in \mathbf{R}^{m \times m}$ матрица, $V \in \mathbf{R}^{n \times n}$ — любая симметричная положительно-определенная матрица. Тогда

$$||LA||_{HV} \le ||L||_{HH^{-1/2}} ||A||_{HV} = \rho(L) ||A||_{HV},$$

где $\rho(L)$ — спектральный радиус матрицы L.

Лемма 3. Пусть $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, а $L \in \mathbf{R}^{n \times n}$ — симметризуемая слева положительно-определенным симметризатором $V \in \mathbf{R}^{n \times n}$ матрица, $H \in \mathbf{R}^{m \times m}$ — любая симметричная положительно-определенная матрица. Тогда

$$||AL||_{HV^{-1/2}} \le ||L||_{VV^{-1/2}} ||A||_{HV^{-1/2}} = \rho(L) ||A||_{HV^{-1/2}}.$$

При исследовании свойств взвешенных псевдообратных матриц часто используются соотношения для рангов матриц, связанных со взвешенной псевдоинверсией, которое устанавливает [35] следующая лемма.

Лемма 4. Матрицы A, $A^+_{BC} A$, $C^{-1} A^T BA$, $A^T BAC^{-1}$, $AC^{-1} A^T B$, $A^+_{BC} AC^{-1} A^T BA$ имеют один и тот же ранг.

2. ВЗВЕШЕННОЕ ПСЕВДООБРАЩЕНИЕ И ВЗВЕШЕННОЕ НОРМАЛЬНОЕ ПСЕВДОРЕШЕНИЕ. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЗВЕШЕННЫХ ПСЕВДООБРАТНЫХ МАТРИЦ С ПОМОЩЬЮ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ СИММЕТРИЗУЕМЫХ МАТРИЦ

Вопрос существования и единственности взвешенной псевдообратной матрицы с положительно-определенными весами рассматривался в [1, 2]. В работе [36] доказано существование и единственность взвешенной псевдообратной матрицы с использованием теоремы Гамильтона–Кэли, что дало возможность представить взвешенную псевдообратную матрицу в терминах коэффициентов характеристического многочлена симметризуемой матрицы.

Теорема 2. Матрица $X = A^+_{BC}$, определенная условиями (1), существует и единственна. Она представима в виде

$$A_{BC}^{+} = C^{-1} S A^T B, \tag{9}$$

где $S = f\,(A^T BAC^{-1})$ — многочлен от матрицы $A^T BAC^{-1}$ вида

$$S = -\alpha_k^{-1} \Big[(A^T BAC^{-1})^{k-1} + \alpha_1 (A^T BAC^{-1})^{k-2} + \ldots + \alpha_{k-1} E \Big], \tag{10}$$

α_p, $p = 1, \ldots, n,$ — коэффициенты характеристического многочлена

$$f\,(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_n = \det\,[\lambda E - A^T BAC^{-1}],$$

α_k — последний, отличный от нуля коэффициент этого многочлена.

Следствие 1. Из (9), (10) следует, что взвешенная псевдообратная матрица A_{BC}^{+} имеет также представления

$$A_{BC}^{+} = S_1 C^{-1} A^T B = C^{-1} A^T B S_2 = C^{-1/2} S_3 C^{-1/2} A^T B = C^{-1} A^T B^{1/2} S_4 B^{1/2},$$

где S_1, S_2 — многочлены от симметризуемых матриц, а S_3, S_4 — многочлены от симметричных матриц следующего вида:

$$S_1 = -\alpha_k^{-1} \Big[(C^{-1} A^T BA)^{k-1} + \alpha_1 (C^{-1} A^T BA)^{k-2} + \ldots + \alpha_{k-1} E \Big],$$

$$S_2 = -\alpha_k^{-1} \Big[(AC^{-1} A^T B)^{k-1} + \alpha_1 (AC^{-1} A^T B)^{k-2} + \ldots + \alpha_{k-1} E \Big],$$

$$S_3 = -\alpha_k^{-1} \Big[(C^{-1/2} A^T BAC^{-1/2})^{k-1} +$$

$$+ \alpha_1 (C^{-1/2} A^T BAC^{-1/2})^{k-2} + \ldots + \alpha_{k-1} E \Big],$$

$$S_4 = -\alpha_k^{-1} \Big[(B^{1/2} AC^{-1} A^T B^{1/2})^{k-1} +$$

$$+ \alpha_1 (B^{-1/2} AC^{-1} A^T B^{-1/2})^{k-2} + \ldots + \alpha_{k-1} E \Big].$$

Следствие 2. Из (9), (10) следует, что симметризуемые идемпотентные матрицы $A_{BC}^{+} A$ и AA_{BC}^{+} имеют следующие представления:

$$A_{BC}^{+} A = C^{-1} S A^T BA = f\,(C^{-1} A^T BA) =$$

$$= -\alpha_k^{-1} \Big[(C^{-1} A^T BA)^k + \alpha_1 (C^{-1} A^T BA)^{k-1} + \ldots + \alpha_{k-1} C^{-1} A^T BA \Big],$$

$$AA_{BC}^{+} = AC^{-1} S A^T B = f\,(AC^{-1} A^T B) =$$

$$= -\alpha_k^{-1} \Big[(AC^{-1} A^T B)^k + \alpha_1 (AC^{-1} A^T B)^{k-1} + \ldots + \alpha_{k-1} AC^{-1} A^T B \Big].$$

Следствие 3. Имеют место равенства $SA^T BAC^{-1} A^T = A^T BAC^{-1} SA^T = = A^T$, $A^T BAA_{BC}^{+} = A^T B$, $A_{BC}^{+} AC^{-1} A^T B = C^{-1} A^T B$.

Так как каждая из матриц $A^T BAC^{-1}$, $C^{-1} A^T BA$, $AC^{-1} A^T B$ — произведение двух симметричных положительно-определенной и положительно-полуопределенной матриц, их собственные значения неотрицательны и вещественны [37].

Относительно матриц $A_{BC}^{+} A$ и $C^{-1} A^T BA$ (AA_{BC}^{+} и $AC^{-1} A^T B$) имеет место следующее утверждение [25, 35].

Лемма 5. Матрицы $A^+_{BC}A$ и $C^{-1}A^TBA$ (AA^+_{BC} и $AC^{-1}A^TB$) коммутируют, имеют полную общую систему собственных векторов и их нуль-пространства совпадают.

Из представления взвешенной псевдообратной матрицы формулой (9) следует соответствующее представление псевдообратной матрицы Мура–Пенроуза, полученное в [38]. В работе [8] описан алгоритм, позволяющий на основе представления псевдообратной матрицы Мура–Пенроуза в терминах коэффициентов характеристического многочлена матрицы A^TA вычислять эту матрицу.

Формула (9) использовалась при исследовании свойств взвешенных псевдообратных матриц с положительно-определенными весами, в том числе: при обосновании разложений взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные ряды [25, 39], в матричные степенные произведения [40], получении и исследовании предельных представлений взвешенных псевдообратных матриц [35].

Замечание 3. Пусть $\mathrm{rk}(A)=1$. Тогда согласно лемме 4 $\mathrm{rk}(A^TBAC^{-1})=1$ и на основании (9), (10) получаем формулу для вычисления взвешенной псевдообратной матрицы к матрице A $A^+_{BC}=$ $=[\mathrm{tr}(A^TBAC^{-1})]^{-1}C^{-1}A^TB$, когда ранг последней равен единице, где $\mathrm{tr}(L)$ — след матрицы L.

Теперь установим связь взвешенного псевдообращения матриц со взвешенным нормальным псевдорешением систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и решением по методу взвешенных наименьших квадратов. Пусть

$$Ax=f,\quad x\in\mathbf{R}^n,\quad f\in\mathbf{R}^m, \tag{11}$$

— СЛАУ с произвольной матрицей $A\in\mathbf{R}^{m\times n}$.

Определение 4. Вектор x^+, который является решением задачи: найти

$$\min_{x\in\Omega}||x||_C,\quad \Omega=\operatorname{Arg}\min_{x\in\mathbf{R}^n}||Ax-f||_B, \tag{12}$$

назовем взвешенным нормальным псевдорешением с положительно-определенными весами системы (11).

Определение 5. Вектор $x^{(1,3)}$, который является решением задачи: найти $\min\limits_{x\in\mathbf{R}^n}||Ax-f||_B$, назовем решением по методу взвешенных наименьших квадратов с положительно-определенным весом B системы (11).

Обозначим $Y=A_B^{(1,3)}\in\mathbf{R}^{n\times m}$ матрицу, удовлетворяющую условиям $AYA=A$, $(BAY)^T=BAY$, где $B\in\mathbf{R}^{m\times m}$ — симметричная положительно-определенная матрица, и укажем некоторые свойства решений по методу взвешенных наименьших квадратов и взвешенных нормальных псевдорешений [36].

Лемма 6. Вектор $x^{(1,3)}=A_B^{(1,3)}f$ удовлетворяет условию

$$||Ax^{(1,3)}-f||_B=\min_{x\in\mathbf{R}^n}||Ax-f||_B. \tag{13}$$

Согласно лемме 6 вектор $x^{(1,3)}=A_B^{(1,3)}f$ минимизирует взвешенную норму невязки системы (11), т.е. является решением по методу взвешенных наименьших квадратов данной СЛАУ. Но это решение в общем случае неединственно. Множество решений по методу взвешенных наименьших квадратов устанавливает следующее утверждение.

Лемма 7. Множество векторов, удовлетворяющих (13), определяется формулой $x^{(1,3)} = A_B^{(1,3)} f + (E - A^{(1)} A) y$, где y — произвольный вектор из $\mathbf{R}^n$, $A^{(1)}$ — матрица, удовлетворяющая первому условию в (1).

Теорема 3. Вектор $x^+ = A_{BC}^+ f$ является единственным решением задачи (12), т.е. взвешенным нормальным псевдорешением системы (11).

3. ВЗВЕШЕННОЕ СИНГУЛЯРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ И ВЗВЕШЕННОЕ ПСЕВДООБРАЩЕНИЕ МАТРИЦ

Известно (см., например, [24, 41]), что для любой вещественной прямоугольной матрицы размера $m \times n$ существуют такие две ортогональные матрицы, с помощью которых исходную матрицу можно привести к прямоугольной диагональной матрице, т.е. к такой прямоугольной матрице D, что $d_{ij} = 0$ для всех $i \neq j$. Из полученного соотношения следует формула разложения матрицы по сингулярным числам. На основании сингулярного разложения матрицы получено представление для псевдообратной матрицы Мура–Пенроуза.

В настоящем разделе указанные выше результаты обобщаются [42] с целью использования в соответствующих преобразованиях взвешенных ортогональных матриц. Полученные результаты, связанные со взвешенными сингулярными числами, обобщают соответствующие соотношения, полученные для обычных сингулярных чисел.

Теорема 4[42]. Для матрицы $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ существуют взвешенные ортогональные матрицы $U \in \mathbf{R}^{m \times m}$ и $V \in \mathbf{R}^{n \times n}$ с весами B и C соответственно, такие, что

$$U^T BAV = D = \begin{cases} \| \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_r, 0, \ldots, 0) O_m^{n-m} \|, & \text{если } m \leq n, \\ \left\| \begin{matrix} \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_r, 0, \ldots, 0) \\ O_{m-n}^n \end{matrix} \right\|, & \text{если } m \geq n, \end{cases}$$

$$A = UDV^T C, \tag{15}$$

где $B \in \mathbf{R}^{m \times m}$ и $C \in \mathbf{R}^{n \times n}$ — произвольные симметричные положительно-определенные матрицы, столбцы матриц U и V — ортонормированные собственные векторы в $\mathbf{R}^m(B)$ и $\mathbf{R}^n(C)$ симметризуемых матриц $AC^{-1}A^T B$ и $C^{-1}A^T BA$ соответственно, а d_i — квадратные корни из собственных значений матриц $AC^{-1}A^T B$, $i = 1, \ldots, m$, если $m \leq n$, и $C^{-1}A^T BA$, $i = 1, \ldots, n$, если $m \geq n$, $O_k^l \in \mathbf{R}^{k \times l}$ — нулевая матрица, r — ранг матрицы A.

Отметим, что ненулевые собственные значения матриц $AC^{-1}A^T B$ и $C^{-1}A^T BA$ совпадают как собственные значения матриц, полученных в результате перестановки матриц-сомножителей [43].

Определение 6. Разложение вида (15) называется взвешенным сингулярным разложением (разложением по взвешенным сингулярным числам) матрицы A в отличие от сингулярного разложения [24], которое является его частным случаем при $B = C = E$.

Определение 7. Квадратные корни из общих собственных значений матриц $AC^{-1}A^T B$ и $C^{-1}A^T BA$ называются взвешенными сингулярными числами матрицы A.

Отметим, что из взвешенного сингулярного разложения матрицы следует обычное сингулярное разложение матрицы, взвешенное спектральное разложение симметризуемой матрицы и спектральное разложение симметричной матрицы.

Пусть $D_{EE}^{+} \in \mathbf{R}^{n \times m}$ — диагональная матрица с ненулевыми элементами $d_{ii}^{+} = d_i^{+}$, $i = 1, \ldots, r$, где $d_i^{+} = d_i^{-1}$, а d_i определены в теореме 4. Непосредственной проверкой условий (1) нетрудно убедиться, что матрица D_{EE}^{+} является псевдообратной матрицей Мура-Пенроуза к матрице D.

Теорема 5[42]. Взвешенная псевдообратная матрица к матрице A определяется формулой

$$A_{BC}^{+} = VD_{EE}^{+}U^T B, \tag{16}$$

где матрицы A, B, C, U, V определены в теореме 4.

Таким образом, взвешенное сингулярное разложение матрицы позволяет вычислить взвешенную псевдообратную к ней матрицу. Для этого небходимо разработать устойчивую процедуру определения взвешенных сингулярных чисел и собственных векторов симметризуемых матриц $AC^{-1}A^T B$ и $C^{-1}A^T BA$. Отметим, что созданию устойчивой процедуры для вычисления обычных сингулярных чисел посвящено ряд работ (см., например, [44, 45]). Результаты этих исследований явились основой создания алгоритмов и программ для вычисления сингулярных чисел, псевдообратных матриц и нормальных псевдорешений [46]. Кроме практических приложений взвешенное сингулярное разложение матриц может быть использовано для различных исследований, связанных со взвешенной псевдоинверсией матриц. Так, например, взвешенное сингулярное разложение матриц использовалось при исследовании разложений взвешенных псевдообратных матриц с положительно-определенными весами в матричные степенные ряды и матричные степенные произведения в [39, 40, 47–49].

Отметим, что в работе [50] дано другого вида взвешенное сингулярное разложение матриц и взвешенных псевдообратных к ним, чем определенное в настоящей статье формулами (15) и (16). Такое взвешенное сингулярное разложение матриц использовалось для получения формул разложений и представлений взвешенных псевдообратных матриц с положительно-определенными весами [51], для анализа влияния возмущения исходных данных на решение задач взвешенных наименьших квадратов [52–54], при получении формул чисел обусловленности для взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных чисел обусловленности для СЛАУ [52, 55].

4. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЗВЕШЕННЫХ ПСЕВДООБРАТНЫХ МАТРИЦ В МАТРИЧНЫЕ СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ СТЕПЕНЕЙ

В работах [25, 56] доказана сходимость матричного степенного ряда с положительными показателями степеней к взвешенной псевдообратной матрице, для чего использовано представление взвешенных псевдообратных матриц в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых матриц, приведенное в разд. 2. В [48] для оценки близости взвешенной псевдообратной матрицы и суммы фиксированного числа членов указанного ряда использован аппарат взвешенного сингулярного разложения матриц, описанный в разд. 3. Доказана следующая теорема.

Теорема 6. Для $A \neq 0 \in \mathbf{R}^{m \times n}$, симметричных положительно-определенных матриц B и C таких, что $C^{-1} A^T BA$ определено, и для действительного числа σ такого, что

$$0 < \sigma < 2 d_{\max}^{-2}, \tag{17}$$

справедливы соотношения

$$A_{BC}^{+} = \sigma \sum_{k=0}^{\infty} (E - \sigma C^{-1} A^T BA)^k C^{-1} A^T B, \tag{18}$$

$$|| A_{BC}^{+} - A_{\sigma,p}^{+} ||_{CB^{-1/2}} \leq \max_{d_i \neq 0} \{ d_i^{-1} |1 - \sigma d_i^2|^p \}, \tag{19}$$

где d_i — диагональные элементы матрицы D, определенной в (14), $d_{\max}$ — максимальный диагональный элемент матрицы D, $A_{\sigma,p}^{+} = \sigma \sum\limits_{k=0}^{p-1} (E - \sigma C^{-1} A^T BA)^k C^{-1} A^T B$, $p = 1, 2, \ldots$

Следствие 4. Из формулы (18) вытекает справедливость следующих соотношений:

$$A_{BC}^{+} = \sigma \sum_{k=0}^{\infty} C^{-1} (E - \sigma A^T BAC^{-1})^k A^T B =$$

$$= \sigma \sum_{k=0}^{\infty} C^{-1/2} (E - \sigma C^{-1/2} A^T BAC^{-1/2})^k C^{-1/2} A^T B =$$

$$= \sigma \sum_{k=0}^{\infty} C^{-1} A^T B (E - \sigma AC^{-1} A^T B)^k = \sigma \sum_{k=0}^{\infty} C^{-1} A^T (E - \sigma BAC^{-1} A^T)^k B =$$

$$= \sigma \sum_{k=0}^{\infty} C^{-1} A^T B^{1/2} (E - \sigma B^{1/2} AC^{-1} A^T B^{1/2})^k B^{1/2}.$$

Замечание 4. В теореме 6, как и в последующих теоремах, исключение нулевых матриц из множества рассматриваемых относится только к оценке близости взвешенных псевдообратных матриц и матриц, полученных на основе фиксированного числа членов матричных степенных рядов и матричных степенных произведений. Очевидно, что формулы, определяющие бесконечные разложения взвешенных псевдообратных матриц, будут верны и для нулевых матриц, поскольку взвешенная псевдообратная матрица к нулевой матрице является нулевой.

Для получения формул разложения взвешенных псевдообратных матриц в бесконечные матричные степенные произведения будем пользоваться матричным тождеством, которое устанавливает следующая лемма.

Лемма 8. Для любых матриц $P \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $W \in \mathbf{R}^{n \times m}$ и действительного числа $0 < \sigma < \infty$ имеет место тождество

$$\sigma \prod_{k=0}^{n-1} \{ E + (E - \sigma P)^{2^k} \} W = \sigma \sum_{k=0}^{2^n - 1} (E - \sigma P)^k W, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{20}$$

В справедливости матричного тождества (20) нетрудно убедиться с помощью метода математической индукции. При получении матричных тождеств типа (20) для матриц определенной структуры в работах [47, 57] использовался спектральный подход. Тождество (20) — некоторый матричный аналог числового тождества, полученного в [58, 49].

При выполнении предположений теоремы 6 в силу (18) и (20) имеем следующее разложение взвешенной псевдообратной матрицы с положительно-определенными весами в матричное степенное произведение:

$$A_{BC}^{+} = \sigma \prod_{k=0}^{\infty} \{E + (E - \sigma C^{-1} A^{T} BA)^{2^{k}}\} C^{-1} A^{T} B. \tag{21}$$

Обозначим $A_{\sigma,n}^{+} = \sigma \prod_{k=0}^{n-1} \{E + (E - \sigma C^{-1} A^{T} BA)^{2^{k}}\} C^{-1} A^{T} B, \quad n = 1, 2, \ldots$

Тогда в силу тождества (20) и соотношения (19) получим

$$\| A_{BC}^{+} - A_{\sigma,n}^{+} \|_{CB^{-1/2}} \leq \max_{d_i \neq 0} \{ d_i^{-1} |1 - \sigma d_i^{2}|^{2^{n}} \}. \tag{22}$$

На основании (21) можно получить другие виды разложений взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные произведения [47, 48]:

$$A_{BC}^{+} = \sigma C^{-1} \prod_{k=0}^{\infty} \{E + (E - \sigma A^{T} BAC^{-1})^{2^{k}}\} A^{T} B =$$

$$= \sigma C^{-1/2} \prod_{k=0}^{\infty} \{E + (E - \sigma C^{-1/2} A^{T} BAC^{-1/2})^{2^{k}}\} C^{-1/2} A^{T} B =$$

$$= \sigma C^{-1} A^{T} B \prod_{k=0}^{\infty} \{E + (E - \sigma AC^{-1} A^{T} B)^{2^{k}}\} =$$

$$= \sigma C^{-1} A^{T} \prod_{k=0}^{\infty} \{E + (E - \sigma BAC^{-1} A^{T})^{2^{k}}\} B =$$

$$= \sigma C^{-1} A^{T} B^{1/2} \prod_{k=0}^{\infty} \{E + (E - \sigma B^{1/2} AC^{-1} A^{T} B^{1/2})^{2^{k}}\} B^{1/2}.$$

Отметим, что в работе [51] для разложения взвешенной псевдообратной матрицы в матричный степенной ряд с положительными показателями степеней и оценки близости взвешенной псевдообратной матрицы и суммы фиксированного числа членов этого ряда используется другой математический аппарат, чем в [25, 48, 56]. Так как взвешенная псевдоинверсия является обобщением псевдоинверсии Мура–Пенроуза, разложения (18) и приведенные в следствии 4 — обобщение разложений псевдообратной матрицы Мура–Пенроуза, полученных и исследованных в [59] для квадратных матриц. В этой же работе предложено и исследовано разложение псевдообратной матрицы Мура–Пенроуза в бесконечное матричное степенное произведение, обобщением которого являются разложение (21) и приведенные выше разложения взвешенной псевдообратной матрицы в матричные степенные произведения.

5. РАЗЛОЖЕНИЯ, МНОГОЧЛЕННЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВЗВЕШЕННЫХ ПСЕВДООБРАТНЫХ МАТРИЦ И РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЗАДАЧ

В данном разделе предлагаются и исследуются разложения взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные ряды и матричные степенные произведения с отрицательными показателями степеней и произвольными положительными параметрами. Устанавливается связь этих разложений с многочленными предельными представлениями взвешенных псевдообратных матриц. На основе взвешенного сингулярного разложения матриц, описанного в разд. 3, в работе [49] доказывается следующая теорема.

Теорема 7. Для произвольной матрицы $A \neq 0 \in \mathbf{R}^{m \times n}$, симметричных положительно-определенных матриц B и C таких, что $C^{-1} A^T BA$ определено, и для действительного числа $0< \delta< \infty$ справедливы соотношения

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} (C^{-1} A^T BA + \delta E)^{-k} C^{-1} A^T B = A^+_{BC}, \tag{23}$$

$$|| A^+_{BC} - A^+_{\delta, p} ||_{CB^{-1/2}} \leq d_*^{-1} \delta^p (\delta + d_*^2)^{-p}, \tag{24}$$

где $A^+_{\delta, p} = \sum_{k=1}^{p} \delta^{k-1} (C^{-1} A^T BA + \delta E)^{-k} C^{-1} A^T B,\ p = 1, 2, \dots,\ d_*$ — минимальный ненулевой диагональный элемент матрицы D, определенной в (14) (минимальное ненулевое взвешенное сингулярное число матрицы A).

Следствие 5. Из (23) имеем следующие виды разложений взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные ряды:

$$A^+_{BC} = \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} C^{-1} (A^T BAC^{-1} + \delta E)^{-k} A^T B =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} C^{-1/2} (C^{-1/2} A^T BAC^{-1/2} + \delta E)^{-k} C^{-1/2} A^T B.$$

Следствие 6. Из оценки (24) вытекает, что для любого $p = 1, 2, \dots$ имеем предельное представление взвешенной псевдообратной матрицы вида

$$A^+_{BC} = \lim_{\delta \to +0} \sum_{k=1}^{p} \delta^{k-1} (C^{-1} A^T BA + \delta E)^{-k} C^{-1} A^T B. \tag{25}$$

Для получения формул разложения взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные произведения использовались матричные тождества, которые устанавливают следующие леммы [49].

Лемма 9. Для любых матриц $P \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $W \in \mathbf{R}^{n \times m}$ и действительного числа $0< \delta< \infty$ имеет место тождество

$$\prod_{k=0}^{n-1} \{E + \delta^{2^k} (P + \delta E)^{-(2^k)}\} (P + \delta E)^{-1} W =$$

$$= \sum_{k=1}^{2^n} \delta^{k-1} (P + \delta E)^{-k} W, \quad n = 1, 2, \dots \tag{26}$$

Лемма 10. Для любых матриц $L \in \mathbf{R}^{m \times m}$, $M \in \mathbf{R}^{n \times m}$ и действительного числа $0< \delta< \infty$ имеет место тождество

$$M\,(L+\delta E)^{-1}\prod_{k=0}^{n-1}\{E+\delta^{2^k}(L+\delta E)^{-(2^k)}\}=$$

$$=M\sum_{k=1}^{2^n}\delta^{k-1}(L+\delta E)^{-k},\quad n=1,2,\dots \tag{27}$$

При выполнении предположений теоремы 7 в силу (23) и (26) для действительного числа $0<\delta<\infty$ имеем следующее разложение взвешенной псевдообратной матрицы с положительно-определенными весами в матричное степенное произведение:

$$A^+_{BC}=\prod_{k=0}^{\infty}\{E+\delta^{2^k}(C^{-1}A^TBA+\delta E)^{-(2^k)}\}(C^{-1}A^TBA+\delta E)^{-1}C^{-1}A^TB. \tag{28}$$

Обозначим $A^+_{\delta,n}=\prod_{k=0}^{n-1}\{E+\delta^{2^k}(C^{-1}A^TBA+\delta E)^{-(2^k)}\}(C^{-1}A^TBA+$ $+\delta E)^{-1}C^{-1}A^TB$, $n=1,2,\dots$ Тогда в силу тождества (26) и соотношения (24) получим

$$||A^+_{BC}-A^+_{\delta,n}||_{CB^{-1/2}}\le d_*^{-1}\delta^{2^n}(\delta+d_*^2)^{-(2^n)}. \tag{29}$$

Из оценки (29) вытекает, что для любого $n=1,2,\dots$ имеем следующее предельное представление взвешенной псевдообратной матрицы:

$$A^+_{BC}=\lim_{\delta\to+0}\prod_{k=0}^{n-1}\{E+\delta^{2^k}(C^{-1}A^TBA+\delta E)^{-(2^k)}\}\times$$

$$\times(C^{-1}A^TBA+\delta E)^{-1}C^{-1}A^TB. \tag{30}$$

Отметим, что в работе [49] на основе взвешенного сингулярного разложения матриц и тождества (27) кроме приведенных выше получены и исследованы другие виды разложений взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные ряды и матричные степенные произведения с отрицательными показателями степеней.

Определение 8. Предельные представления (25), (30) называются многочленными предельными представлениями взвешенных псевдообратных матриц с положительно-определенными весами.

При $p=1$ из (25) имеем одночленное предельное представление взвешенных псевдообратных матриц с положительно-определенными весами, исследованное в работах [35, 51, 60], а при $p=1$, $B=C=E$ — предельное представление псевдообратной матрицы Мура–Пенроуза, предложенное и исследованное в [61]. Это свойство псевдообратной матрицы Мура–Пенроуза стало основой регуляризации задач по Тихонову [62]. Разложения взвешенных псевдообратных матриц с положительно-определенными весами в матричные степенные ряды и матричные степенные произведения с отрицательными показателями степеней при $\delta\equiv 1$ исследованы соответственно в работах [25, 48].

Из предельных представлений взвешенных псевдообратных матриц следует, что при достаточно малом параметре δ матрицы A^+_{BC} и $A^+_{\delta,p}$, $A^+_{\delta,n}$ могут как угодно мало отличаться одна от другой и на основании предложенных предельных представлений можно вычислять приближения к взвешенным псевдообратным матрицам. Оценки близости взвешенных псевдообратных матриц и их приближенных значений даны формулами (24), (29).

На основе предельных представлений взвешенных псевдообратных матриц можно также предложить регуляризованные задачи для вычисления взвешенных нормальных псевдорешений. Сначала рассмотрим регуляризованную задачу для нахождения взвешенного нормального псевдорешения СЛАУ (11) с учетом формулы (25). На основе этой формулы и теоремы 3 получим СЛАУ для вычисления приближения к взвешенному нормальному псевдорешению системы (11) при достаточно малом δ

$$(C^{-1}A^T BA + \delta E)^p x = \sum_{k=1}^{p} \delta^{k-1} (C^{-1}A^T BA + \delta E)^{p-k} C^{-1}A^T Bf. \qquad (31)$$

Поскольку матрица $C^{-1}A^T BA$ — произведение двух симметричных положительно-определенной и положительно-полуопределенной матриц, ее собственные значения неотрицательны и вещественны [37]. Тогда матрица $(C^{-1}A^T BA + \delta E)^p$ при $\delta > 0$ невырождена и, следовательно, существует единственное решение системы (31). Оценку погрешности приближенного решения устанавливает [49] следующая теорема.

Теорема 8. Пусть x^+ — взвешенное нормальное псевдорешение с положительно-определенными весами системы (11), а $x_{\delta,\, p}$ — решение системы (31), тогда справедлива оценка

$$||x^+ - x_{\delta,\, p}||_C \le d_*^{-1} \delta^p (\delta + d_*^2)^{-p} ||f||_B. \qquad (32)$$

Теперь для получения регуляризованной задачи нахождения приближения к взвешенному нормальному псевдорешению СЛАУ (11) используем формулу (30), на основании которой получим СЛАУ для вычисления приближения к взвешенному нормальному псевдорешению системы (11) при достаточно малом δ

$$\prod_{k=0}^{n-1} (C^{-1}A^T BA + \delta E)^{2^k} (C^{-1}A^T BA + \delta E) x =$$

$$= \prod_{k=0}^{n-1} \{(C^{-1}A^T BA + \delta E)^{2^k} + \delta^{2^k} E\} C^{-1}A^T Bf. \qquad (33)$$

Оценку погрешности приближенного решения устанавливает [49] следующая теорема.

Теорема 9. Пусть x^+ — взвешенное нормальное псевдорешение с положительно-определенными весами системы (11), а $x_{\delta,\, n}$ — решение системы (33), тогда справедлива оценка

$$||x^+ - x_{\delta,\, n}||_C \le d_*^{-1} \delta^{2^n} (\delta + d_*^2)^{-(2^n)} ||f||_B. \qquad (34)$$

Регуляризованные задачи вычисления взвешенных псевдообратных матриц с положительно-определенными весами на основе одночленных предельных представлений (при $p = 1$) рассматривались в [35, 51, 60]. Регуляризованные задачи вычисления взвешенных нормальных псевдорешений с положительно-определенными весами на основе одночленных предельных представлений исследовались в [35, 55, 60]. Предполагается, что регуляризованные задачи будут решаться известными прямыми методами.

Рассмотрим другой вид разложений взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные ряды и матричные степенные произведения, исследованные соответственно в работах [39] и [40]. Они могут служить альтернативой рассмотренным выше разложениям. На основе взвешенного сингулярного разложения матриц в [39] доказана следующая теорема.

Теорема 10. Для произвольной матрицы $A \neq 0 \in \mathbf{R}^{m \times n}$, симметричных положительно-определенных матриц B и C таких, что $C^{-1}A^T BA$ определено, и для действительного числа $0 < \alpha < \infty$ справедливы соотношения

$$\alpha \sum_{k=1}^{\infty} (E + \alpha C^{-1} A^T BA)^{-k} C^{-1} A^T B = A_{BC}^{+}, \tag{35}$$

$$\| A_{BC}^{+} - A_{\alpha, p}^{+} \|_{CB^{-1/2}} \leq d_*^{-1} (1 + \alpha d_*^2)^{-p}, \tag{36}$$

где $A_{\alpha, p}^{+} = \alpha \sum\limits_{k=1}^{p} (E + \alpha C^{-1} A^T BA)^{-k} C^{-1} A^T B$, d_* — минимальный ненулевой диагональный элемент матрицы D, определенной в (14).

Следствие 7. Из равенства (35) следует справедливость соотношений вида

$$A_{BC}^{+} = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} C^{-1} (E + \alpha A^T BAC^{-1})^{-k} A^T B =$$

$$= \alpha \sum_{k=1}^{\infty} C^{-1/2} (E + \alpha C^{-1/2} A^T BAC^{-1/2})^{-k} C^{-1/2} A^T B.$$

Следствие 8. Из оценки (36) для любого $p = 1, 2, \ldots$ имеем следующее предельное представление взвешенной псевдообратной матрицы:

$$A_{BC}^{+} = \lim_{\alpha \to \infty} \alpha \sum_{k=1}^{p} (E + \alpha C^{-1} A^T BA)^{-k} C^{-1} A^T B. \tag{37}$$

Отметим, что в [39] также обосновано несколько других видов разложений взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные ряды, для чего использовано представление взвешенных псевдообратных матриц в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых матриц (см. разд. 2).

В работе [40] на основании аппарата взвешенного сингулярного разложения матриц, рассмотренного в разд. 3, доказана следующая теорема.

Теорема 11. Для $A \neq 0 \in \mathbf{R}^{m \times n}$, симметричных положительно-определенных матриц B и C таких, что $C^{-1}A^T BA$ существует, и для действительного числа $0 < \alpha < \infty$ справедливы соотношения

$$A_{BC}^{+} = \alpha (E + \alpha C^{-1} A^T BA)^{-1} \prod_{k=0}^{\infty} \{E + (E + \alpha C^{-1} A^T BA)^{-(2^k)}\} C^{-1} A^T B, \tag{38}$$

$$\| A_{BC}^{+} - A_{\alpha, n}^{+} \|_{CB^{-1/2}} \leq d_*^{-1} (1 + \alpha d_*^2)^{-(2^n)}, \tag{39}$$

где $$A^+_{\alpha,n} = \alpha\,(E + \alpha C^{-1}A^T BA)^{-1} \prod_{k=0}^{n-1} \{E + (E + \alpha C^{-1}A^T BA)^{-(2^k)}\} C^{-1}A^T B,$$

$n = 1, 2, \ldots$, а d_* — минимальный ненулевой диагональный элемент матрицы D, определенной в (14).

Следствие 9. Из формулы (38) вытекает справедливость следующих разложений взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные произведения:

$$A^+_{BC} = \alpha\, C^{-1}(E + \alpha A^T BAC^{-1})^{-1} \prod_{k=0}^{\infty} \{E + (E + \alpha A^T BAC^{-1})^{-(2^k)}\} A^T B =$$

$$= \alpha\, C^{-1/2}(E + \alpha C^{-1/2}A^T BAC^{-1/2})^{-1} \prod_{k=0}^{\infty} \{E + (E +$$

$$+ \alpha C^{-1/2}A^T BAC^{-1/2})^{-(2^k)}\} C^{-1/2}A^T B.$$

Следствие 10. В силу (39) для любого $n = 1, 2, \ldots$ имеем следующее предельное представление взвешенной псевдообратной матрицы:

$$A^+_{BC} = \lim_{\alpha \to \infty} \alpha\,(E + \alpha C^{-1}A^T BA)^{-1} \prod_{k=0}^{n-1} \{E +$$

$$+ (E + \alpha C^{-1}A^T BA)^{-(2^k)}\} C^{-1}A^T B. \qquad (40)$$

Чтобы получить другие формулы разложения взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные произведения, в работе [40] использован иной математический аппарат, чем при доказательстве утверждений теоремы 11, а именно, для исследования использовалось взвешенное спектральное разложение симметризуемых матриц и представление псевдообратных матриц в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых матриц.

6. ПОСТРОЕНИЕ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

В данном разделе опишем методику построения итерационных процессов для вычисления взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений, основанную на разложениях взвешенных псевдообратных матриц, описанных в разд. 4 и 5. Причем согласно определению (см., например, [63]) будут построены итерационные процессы с различными порядками скоростей сходимости.

Рассмотрим построение итерационных процессов на основании разложений с положительными показателями степеней, описанных в разд. 4. Сначала для построения итерационного процесса вычисления взвешенных псевдообратных матриц используем разложение (18) взвешенной псевдообратной матрицы в матричный степенной ряд, на основе которого для вычисления A^+_{BC} получим итерационный процесс [25]

$$X_0 = \sigma C^{-1}A^T B,\; X_{k+1} = X_k + \sigma C^{-1}A^T B\,(E - AX_k),\; k = 0, 1, \ldots \qquad (41)$$

Оценка близости k-го приближения по формулам (41) к A^+_{BC} определяется формулой (19), где следует положить $p = k$.

Теперь для построения итерационного процесса используем разложение (21) взвешенной псевдообратной матрицы в матричное степенное произведение, на основе которого для вычисления A_{BC}^{+} получим итерационный процесс

$$X_0 = \sigma C^{-1} A^T B,\ X_k = X_{k-1} + (E - \sigma C^{-1} A^T BA)^{2^{k-1}} X_{k-1},\ k = 1, 2, \ldots \qquad (42)$$

Оценка близости k-го приближения по формулам (42) к A_{BC}^{+} определяется формулой (22), где следует положить $n = k$.

Отметим, что в работе [47] построены и исследованы другие виды итерационных процессов на основе разложений с положительными показателями степеней.

Рассмотрим методику построения итерационных процессов для вычисления взвешенных нормальных псевдорешений. Положим $x_k = X_k f$, где матрицы X_k определены формулами (41). Тогда для вычисления приближения к $x^+ = A_{BC}^{+} f$ получим итерационный процесс

$$x_0 = \sigma C^{-1} A^T Bf,\quad x_{k+1} = x_k + \sigma C^{-1} A^T B\,(f - Ax_k),\quad k = 0, 1, \ldots \qquad (43)$$

Имеет место [27] следующая теорема.

Теорема 12.Итерационный процесс (43) сходится в $\mathbf{R}^n(C)$, причем имеет место оценка

$$||x^+ - x_{k+1}||_C \le q^{k+1} ||x^+ - x_0||_C,$$

где $q = \rho\,(A_{BC}^{+} A - \sigma C^{-1} A^T BA) < 1$, а матрица C входит в определение взвешенной псевдообратной матрицы согласно четвертому условию в (1).

Для вычисления x^+ на основании (42) получим итерационный процесс [47]

$$x_0 = \sigma C^{-1} A^T Bf,\ x_k = x_{k-1} + (E - \sigma C^{-1} A^T BA)^{2^{k-1}} x_{k-1},\ k = 1, 2, \ldots \qquad (44)$$

Теорема 13. Итерационный процесс (44) сходится в $\mathbf{R}^n(C)$, причем имеет место оценка

$$||x^+ - x_k||_C \le q^{2^k} ||x^+||_C,$$

где q и матрица C определены в теореме 12.

В работе [47] предложен и исследован итерационный метод p-го порядка скорости сходимости для вычисления взвешенных псевдообратных матриц ($p \ge 2$):

$$X_{k+1} = X_k + X_k \sum_{i=1}^{p-1} \Psi_k^i,\quad \Psi_k = E - AX_k,\quad k = 0, 1, \ldots \qquad (45)$$

Теорема 14.Итерационный процесс (45) при $X_0 = \sigma C^{-1} A^T B$, где параметр σ определен соотношением (17), сходится, причем имеет место оценка

$$||A_{BC}^{+} - X_{k+1}||_{CV} \le q^{p^{k+1}-1} ||A_{BC}^{+} - X_0||_{CV},$$

где q и матрица C определены в теореме 12, а $V \in \mathbf{R}^{m \times m}$ — произвольная симметричная положительно-определенная матрица.

Частный случай ($p = 2$) итерационного процесса (45), который является обобщением известного метода для обращения невырожденной матрицы [64], рассматривался в [25].

В работе [25] показано, что оптимальное значение параметра σ определяется формулой

$$\sigma_0 = 2[d_* + d_{\max}]^{-1}, \tag{46}$$

где d_* — минимальный ненулевой диагональный элемент матрицы D, определенной в (14), $d_{\max}$ — максимальний диагональний элемент этой матрицы.

Рассмотрим методику построения итерационных процессов на основании разложений с отрицательными показателями степеней, описанных в разд. 5. Сначала для этой цели используем разложение (23) взвешенной псевдообратной матрицы в матричный степенной ряд, на основании которого для вычисления A^+_{BC} получим итерационный процесс

$$X_0 = 0, \quad X_k = (C^{-1}A^T BA + \delta E)^{-1}(\delta X_{k-1} + C^{-1}A^T B),$$

$$k = 1, 2, \ldots, \quad 0 < \delta < \infty. \tag{47}$$

Оценка близости k-го приближения по формулам (47) к A^+_{BC} определяется формулой (24), где следует положить $p = k$.

Для построения итерационного процесса с более высокой скоростью сходимости используем разложение (28) взвешенной псевдообратной матрицы в матричное степенное произведение, на основании которого для вычисления A^+_{BC} получим итерационный процесс

$$X_0 = (C^{-1}A^T BA + \delta E)^{-1} C^{-1}A^T B,$$

$$X_k = X_{k-1} + \delta^{2^{k-1}} (C^{-1}A^T BA + \delta E)^{-(2^{k-1})} X_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{48}$$

Оценка близости k-го приближения по формулам (48) к A^+_{BC} определяется формулой (29), где следует положить $n = k$.

Рассмотрим методику построения итерационных процессов для вычисления взвешенных нормальных псевдорешений. Положим $x_k = X_k f$, где матрицы X_k определены формулами (47). Тогда для вычисления приближения к $x^+ = A^+_{BC} f$ получим итерационный процесс

$$x_0 = 0, \quad x_k = (C^{-1}A^T BA + \delta E)^{-1}(\delta x_{k-1} + C^{-1}A^T Bf),$$

$$k = 1, 2, \ldots, \quad 0 < \delta < \infty. \tag{49}$$

Оценка близости k-го приближения по формулам (49) к x^+ определяется формулой (32), где следует положить $p = k$.

Для построения следующего итерационного процесса опять положим $x_k = X_k f$, где матрицы X_k определены формулами (48). Тогда для вычисления приближения к $x^+ = A^+_{BC} f$ получим итерационный процесс

$$x_0 = (C^{-1}A^T BA + \delta E)^{-1} C^{-1}A^T Bf,$$

$$x_k = x_{k-1} + \delta^{2^{k-1}} (C^{-1}A^T BA + \delta E)^{-(2^{k-1})} x_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{50}$$

Оценка близости k-го приближения по формулам (50) к x^+ определяется формулой (34), где следует положить $n = k$.

Замечание 5. Из оценок (24), (29), (32), (34) вытекает, что погрешность приближения к решению задач с помощью соответствующих итерационных процессов зависит от количества итераций и параметра δ. Очевидно, что параметр δ необходимо выбирать, по возможности, наименьшим. Но его величина ограничивается в сторону уменьшения необходимой точностью вычисления обратной матрицы к матрице $C^{-1}A^T BA + \delta E$.

Определение 9. Процессы типа (47)–(50) при $\delta \to +0$ $(\delta > 0)$ назовем регуляризованными итерационными процессами.

Замечание 6. На основании разложения взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные ряды для вычисления приближения к взвешенному нормальному псевдорешению получено регуляризованную задачу (31), которую предполагается решать прямым методом, и итерационный процесс (47). Причем если $k = p$, то теоретически имеем одну и ту же оценку близости приближенного решения, полученного двумя методами, к точному решению. Вопрос выбора метода вычисления приближенного решения задачи, по-видимому, будет зависеть не столько от объема вычислительной работы, сколько от величины погрешности, вносимой вычислительным процессом. То же самое можно сказать о методах, полученных на основании разложения взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные произведения.

Рассмотрим вопрос построения итерационных процессов на основании разложений (35), (38), предложенных и исследованных соответственно в работах [39] и [40]. На основании разложения взвешенной псевдообратной матрицы в матричный степенной ряд (35) получаем следующий итерационный процесс [39]:

$$X_0 = 0, \quad X_{k+1} = \Psi^{-p} X_k + \alpha \sum_{i=1}^{p} \Psi^{-i} C^{-1} A^T B,$$

$$\Psi = E + \alpha C^{-1} A^T BA, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{51}$$

Теорема 15. Итерационный процесс (51) при $0 < \alpha < \infty$ сходится, причем имеет место оценка

$$\| A_{BC}^{+} - X_{k+1} \|_{CV} \le q^{p(k+1)} \| A_{BC}^{+} \|_{CV},$$

где

$$q = \rho [A_{BC}^{+} A (E + \alpha C^{-1} A^T BA)^{-1}] = [1 + \alpha \lambda_{\min}^{*} (C^{-1} A^T BA)]^{-1} < 1, \tag{52}$$

$\lambda_{\min}^{*}(L)$ — минимальное ненулевое собственное значение матрицы L, матрица C входит в определение взвешенной псевдообратной матрицы согласно четвертому условию в (1), а $V \in \mathbf{R}^{m \times m}$ — произвольная симметричная положительно-определенная матрица.

На основании разложения взвешенной псевдообратной матрицы в матричное степенное произведение (38) для вычисления A_{BC}^{+} получаем итерационный процесс [40]

$$X_0 = \alpha (E + \alpha C^{-1} A^T BA)^{-1} C^{-1} A^T B,$$

$$X_k = X_{k-1} + (E + \alpha C^{-1} A^T BA)^{-(2^{k-1})} X_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{53}$$

Теорема 16.Итерационный процесс (53) сходится при $0 < \alpha < \infty$, причем имеет место оценка

$$\| A_{BC}^{+} - X_k \|_{CV} \le q^{2^k} \| A_{BC}^{+} \|_{CV},$$

где q и матрицы C, V определены в теореме 15.

Отметим, что для итерационного процесса (53) также верна оценка (39), если в ней положить $n = k$.

Рассмотрим итерационный процесс для вычисления взвешенных нормальных псевдорешений [40]. Положим $x_k = X_k f$, где матрицы X_k определены формулами (53). Тогда для вычисления приближения к $x^+ = A_{BC}^+ f$ получим итерационный процесс

$$x_0 = \alpha (E + \alpha C^{-1} A^T BA)^{-1} C^{-1} A^T Bf,$$

$$x_k = x_{k-1} + (E + \alpha C^{-1} A^T BA)^{-(2^{k-1})} x_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{54}$$

Теорема 17. Итерационный процесс (54) при $0 < \alpha < \infty$ сходится в $\mathbf{R}^n(C)$, причем имеет место оценка

$$||x^+ - x_k||_C \le q^{2^k} ||x^+||_C,$$

где q и матрица C определены в теореме 15.

Замечание 7. Из (52) следует, что значение q зависит от параметра α и уменьшается с его увеличением. Для ускорения сходимости итерационных процессов (51), (53), (54) необходимо выбирать α достаточно большим. Но с увеличением параметра α в общем случае будет расти обусловленность матрицы $E + \alpha C^{-1} A^T BA$, с которой связана точность вычисления матрицы $(E + \alpha C^{-1} A^T BA)^{-1}$. Поэтому нужно учитывать эти обстоятельства при выборе параметра α в процессе построении и реализации итерационных методов.

Отметим, что в работах [39, 40] также предлагаются и анализируются другие виды итерационных процессов для вычисления взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений.

Итерационные методы для вычисления взвешенных псевдообратных матриц с положительно-определенными весами, основанные на разложении взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные ряды с положительными показателями степеней, помимо указанных выше работ, предлагались и исследовались в [51, 65]. Кроме того, в работе [65] рассматривался итерационный метод p-го порядка скорости сходимости, а в [51] — второго порядка. Поскольку взвешенные псевдообратные матрицы с положительно-определенными весами — обобщение псевдообратной матрицы Мура–Пенроуза, итерационные методы (41), (42), (45) являются обобщением соответствующих методов, построенных для вычисления псевдообратной матрицы Мура–Пенроуза на основе разложения этой матрицы в матричные степенные ряды с положительными показателями степеней (см., например, [12, 66–70]). Ряд работ посвящено построению прямых методов вычисления взвешенных псевдообратных матриц с положительно-определенными весами. Так, метод, предложенный в [71], является обобщением метода, предложенного в [72] для вычисления псевдообратной матрицы Мура–Пенроуза. Алгоритм статьи [73] развивает идею алгоритма, предложенного в [74] для вычисления обратной матрицы. В ряде работ рассматривались вопросы вычисления взвешенного нормального псевдорешения с положительно-определенными весами. В [75] для вычисления взвешенного нормального псевдорешения предлагается вычислительная схема метода регуляризации с использованием факторизации Холецкого для решения регуляризованной задачи, в [76] — расщепление исходной прямоугольной матрицы на сумму таких двух матриц, что построенная на этой основе последовательность сходится к взвешенному нормальному псевдорешению СЛАУ. Значительное внимание уделяется параллельным вычислениям для решения задач, связанных со взвешенной псевдоинверсией. Так, в работе [77] предлагаются и исследуются параллельные алгоритмы для вычисления псевдообратных матриц Мура-Пенроуза и взвешенных псевдообратных матриц. В некоторых работах рассмотрены вопросы параллельных вычислений для алгоритмов, которые используют взвешенную псевдоинверсию (см., например, [78, 79]).

7. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВЗВЕШЕННЫХ ПСЕВДООБРАТНЫХ МАТРИЦ ЧЕРЕЗ ДРУГИЕ ПСЕВДООБРАТНЫЕ МАТРИЦЫ

В данном разделе приведены формулы для представления взвешенной псевдообратной матрицы с положительно-определенными весами через псевдообратную матрицу Мура–Пенроуза и частные виды взвешенных псевдообратных матриц [80].

Теорема 18. Пусть $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbf{R}^{m \times m}$ и $C \in \mathbf{R}^{n \times n}$ — симметричные положительно-определенные матрицы. Тогда взвешенная псевдообратная матрица A_{BC}^{+} к матрице A, определенная условиями (1), представляется в виде

$$A_{BC}^{+} = C^{-1/2} (B^{1/2} A C^{-1/2})_{EE}^{+} B^{1/2}, \tag{55}$$

$$A_{BC}^{+} = C^{-1/2} (C^{-1/2} A^{T} B A C^{-1/2})_{EE}^{+} C^{-1/2} A^{T} B, \tag{56}$$

$$A_{BC}^{+} = C^{-1} A^{T} B^{1/2} (B^{1/2} A C^{-1} A^{T} B^{1/2})_{EE}^{+} B^{1/2}, \tag{57}$$

$$A_{BC}^{+} = C^{-1} A^{T} B \, (A C^{-1} A^{T} B)_{BB}^{+}, \tag{58}$$

$$A_{BC}^{+} = C^{-1} A^{T} \, (B A C^{-1} A^{T})_{B^{-1} B^{-1}}^{+} \, B, \tag{59}$$

$$A_{BC}^{+} = (C^{-1} A^{T} B A)_{CC}^{+} C^{-1} A^{T} B, \tag{60}$$

$$A_{BC}^{+} = C^{-1} (A^{T} B A C^{-1})_{C^{-1} C^{-1}}^{+} \, A^{T} B, \tag{61}$$

$$A_{BC}^{+} = (A^{T} B A)_{C^{-1} C}^{+} \, A^{T} B, \tag{62}$$

$$A_{BC}^{+} = C^{-1} A^{T} \, (A C^{-1} A^{T})_{B B^{-1}}^{+}. \tag{63}$$

Отметим, что в [8] для псевдообратной матрицы Мура–Пенроуза дано ее представление через псевдообратные к симметричным матрицам $A_{EE}^{+} = (A^{T} A)_{EE}^{+} A^{T} = A^{T} (A A^{T})_{EE}^{+}$. Очевидно, что эти формулы для A_{EE}^{+} являются следствием соотношений (55)–(63) при $B = C = E$. Формула (55) получена также в [10].

Формулы (55)–(57) можно использовать, например, для вычисления взвешенных псевдообратных матриц с помощью пакета прикладных программ, в котором имеются программы вычисления псевдообратной матрицы Мура–Пенроуза, обратной матрицы для симметричной положительно-определенной матрицы и корня квадратного из симметричной положительно-определенной матрицы.

В работе [47] представление взвешенной псевдообратной матрицы (55) использовалось для получения формулы разложения взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные произведения.

8. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

К задачам наименьших квадратов с ограничениями приходят при моделировании процессов, явлений, систем в различных предметных областях [24]. В ряде работ (см., например, [7, 22]) решение некоторых задач наименьших квадратов с ограничениями, а также L-псевдорешение [23] (Lg-псевдорешение [20], связанное нормальное псевдорешение [81]) представляются с помощью ML-взвешенных псевдообратных матриц.

Приведем определение ML-взвешенных псевдообратных матриц. Пусть $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $M \in \mathbf{R}^{q \times m}$, $L \in \mathbf{R}^{p \times n}$. Тогда ML-взвешенная псевдообратная матрица A^+_{ML} к матрице A определяется соотношением [7, 22, 24]:

$$A^+_{ML} = (E - (LP)^+_{EE}\, L)(MA)^+_{EE}\, M, \quad P = E - (MA)^+_{EE}\, MA. \tag{64}$$

Вектор $x = A^+_{ML}\, f$ является решением задачи: найти

$$\min_{x \in \Omega} ||x||_{L^T L}, \quad \Omega = \operatorname{Arg} \min_{x \in \mathbf{R}^n} ||Ax - f||_{M^T M}. \tag{65}$$

В общем случае решение задачи (65) неединственно. В работах [7, 22, 24] определено условие, при котором решение данной задачи будет единственным.

Цель работы — построить методы для решения задач наименьших квадратов с ограничениями, используя для этого исследованные в разд. 5 и 6 соответственно регуляризованные задачи и итерационные методы для вычисления взвешенных нормальных псевдорешений. Для этого будем использовать условия, при которых ML-взвешенные псевдообратные матрицы совпадают со взвешенными псевдообратными матрицами с положительно-определенными весами [35]:

$$B = M^T M, \quad C = L^T L, \quad (Bu, u)_{E_m} > 0, \quad (Cv, v)_{E_n} > 0$$

$$\# \, u \neq 0 \in \mathbf{R}^m, \quad v \neq 0 \in \mathbf{R}^n. \tag{66}$$

Тогда возможность использования построенных выше регуляризованных задач и итерационных методов для решения задач наименьших квадратов с ограничениями обусловлена следующими обстоятельствами: во-первых, решение ряда таких задач представляется с помощью ML-взвешенных псевдообратных матриц; во-вторых, при выполнении условий (66) взвешенные псевдообратные матрицы и ML-взвешенные псевдообратные матрицы совпадают. В дальнейшем будем предполагать, что эти условия выполняются.

В настоящей работе в качестве примера рассмотрим только задачу наименьших квадратов с ограничениями в виде линейных равенств. Постановки и методы решения других задач наименьших квадратов с ограничениями можно найти в работах [7, 22, 23, 24, 27, 33, 35, 39, 40, 47, 57, 63, 81, 82], где предлагаются и исследуются регуляризованные задачи и итерационные методы для решения ряда задач наименьших квадратов с ограничениями.

Рассмотрим задачу наименьших квадратов с ограничениями в виде линейных равенств (с линейными связями) [7, 22, 24]

$$\min_{f \in \Omega} ||Kf - g||_E, \quad \Omega = \{f \mid Lf = h\}. \tag{67}$$

Предполагается, что выполняются необходимые и достаточные условия (см. [7]) существования единственного решения задачи (67). Кроме того, предполагаем, что матрица $K^T K$ положительно-определенная. Это предположение обусловлено тем, что ниже строятся методы для задач наименьших квадратов с ограничениями, основанные на исследованных в разд. 5 и 6 методах для вычисления взвешенных псевдорешений с положительно-определенными весами. Отметим, что при построении методов для решения названных задач на основе свойств взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами [83] будем иметь другое условие для матрицы $K^T K$ (см., например, [49, 82]).

Решение задачи (67) определяется формулой [7]

$$f_* = L_{EC}^{+} h + (KP_L)_{EE}^{+} g, \quad C = K^T K, \quad P_L = E - L_{EE}^{+} L. \tag{68}$$

Таким образом, решение задачи (67) представляет собой сумму $f_* = f_*^{(1)} + f_*^{(2)}$ нормальных псевдорешений двух задач: нахождение взвешенного нормального псевдорешения системы $Lf^{(1)} = h$ с весами E и $C = K^T K$ и нахождение нормального псевдорешения системы $KP_L f^{(2)} = g$. Тогда на основании теорем 8 и 9 можно получить регуляризованные задачи для вычисления приближения к $f_*^{(1)}$ и $f_*^{(2)}$. Так, например, на основании теоремы 9 для приближенного вычисления $f_*^{(1)}$ имеем СЛАУ ($\delta \to 0,\ \delta > 0$)

$$\prod_{k=0}^{n-1} (C^{-1} L^T L + \delta E)^{2^k} (C^{-1} L^T L + \delta E) f^{(1)} =$$

$$= \prod_{k=0}^{n-1} \{(C^{-1} L^T L + \delta E)^{2^k} + \delta^{2^k} E\} C^{-1} L^T h, \ C = K^T K, \tag{69}$$

а для вычисления $f_*^{(2)}$ — СЛАУ ($\delta \to 0,\ \delta > 0$)

$$\prod_{k=0}^{n-1} ((KP_L)^T KP_L + \delta E)^{2^k} ((KP_L)^T KP_L + \delta E) f^{(2)} =$$

$$= \prod_{k=0}^{n-1} \{((KP_L)^T KP_L + \delta E)^{2^k} + \delta^{2^k} E\} (KP_L)^T g,$$

$$P_L = E - L_{EE}^{+} L. \tag{70}$$

На основании итерационных процессов (43), (44), (49), (50), (54) можно получить итерационные процессы для вычисления приближения к $f_*^{(1)}$ и $f_*^{(2)}$. Так, например, на основании итерационного процесса (50) для приближенного вычисления $f_*^{(1)}$ имеем регуляризованный итерационный процесс ($\delta \to 0, \delta > 0$)

$$f_0^{(1)} = (C^{-1} L^T L + \delta E)^{-1} C^{-1} L^T h, \quad f_k^{(1)} =$$

$$= f_{k-1}^{(1)} + \delta^{2^{k-1}} (C^{-1} L^T L + \delta E)^{-(2^{k-1})} f_{k-1}^{(1)},$$

$$k = 1, 2, \ldots, \quad C = K^T K, \tag{71}$$

а для вычисления $f_*^{(2)}$ — регуляризованный итерационный процесс ($\delta \to 0,\ \delta > 0$)

$$f_0^{(2)} = ((KP_L)^T KP_L + \delta E)^{-1} (KP_L)^T g,$$

$$f_k^{(2)} = f_{k-1}^{(2)} + \delta^{2^{k-1}} ((KP_L)^T KP_L + \delta E)^{-(2^{k-1})} f_{k-1}^{(2)},$$

$$k = 1, 2, \ldots, \quad P_L = E - L_{EE}^+ L. \tag{72}$$

При вычислении $f_*^{(2)}$ необходимо определять матрицу $P_L = E - L_{EE}^+ L$, в которой имеется проекционная матрица $L_{EE}^+ L$. В [84] предложен рекуррентный процесс, с помощью которого легко вычисляются такие проекционные матрицы.

Отметим, что в работах [6, 85, 86] и в монографии [24] предлагается и исследуется метод взвешивания, в [33, 35, 49] рассматриваются регуляризованные задачи для решения задачи (67), в [39, 40, 57, 81] — регуляризованные итерационные методы, в работе [87] разработаны компьютерно-алгебраические процедуры для решения этой задачи.

В заключение отметим, что решение задачи наименьших квадратов с ограничениями в виде квадратичных неравенств [7], нахождения L-псевдорешения [23], Lg-псевдорешения [20], связанного нормального псевдорешения [81] при некоторых предположениях также определяются суммой взвешенного нормального псевдорешения и обычного нормального псевдорешения (см., например, [7, 22, 40, 63]), для приближенного решения которых можно использовать СЛАУ (69), (70) и итерационные процессы (71), (72).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chipman J.S. On least squares with insufficient obserwation // J. Amer. Statist. Assoc. — 1964. — **59**, N 308. — P. 1078–1111.
2. Milne R.D. An oblique matrix pseudoinverse // SIAM J. Appl. Math. — 1968. — **16**, N 5. — P. 931–944.
3. Ward J.F., Boullion T.L., Lewis T.O. A note on the oblique matrix pseudoinverse // Ibid. — 1971. — **20**, N 2. — P. 173–175.
4. Greville T.N.E. Note on fitting of functions of several independent variables // J. Soc. Industr. Appl. Math. — 1961. — **9**, N 1. — P. 109–115.
5. Mitra S.K., Rao C.R. Projections under seminorms and generalized Moore-Penrose inverses // Linear Algebra and Appl. — 1974. — **9**. — P. 155–167.
6. Elden L. Perturbation theory for the least squares problem with linear equality constraints // SIAM J. Numer. Anal. — 1980. — **17**, N 3. — P. 338–350.
7. Elden L. A weighted pseudoinverse generalized singular values and constrained least squares problems // BIT. — 1982. — **22**, N 4. — P. 487–502.
8. Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. — М.: Наука, 1977. — 223 с.
9. Boullion T., Odell P. Generalized inverses of matrices. — New York: Wiley, 1971. — 103 p.
10. Ben-Israel A., Greville T.N.E. Generalized inverse. Theory and applications. —2th ed. — New York: Springer-Verlag, 2003. — 420 p.
11. Rao C. R., Mitra S.K. Generalized inverse of matrices and its applications. — New York: Wiley, 1971.
12. Nashed M.Z. Generalized inverses and applications. — New York: Acad. Press, 1976. — 1024 p.
13. Moore E.H. On the reciprocal of the general algebraic matrix // Abstract. Bull. Amer. Math. Soc. — 1920. — **26**. — P. 394–395.

14. Penrose R. A generalized inverse for matrices // Proc. Cambridge Phil. Soc. — 1955. — **51**, N 3. — P. 406–413.

15. Блюмин С.Л., Миловидов С.П. Взвешенное псевдообращение в оптимальном управлении дискретно-аргументными системами // Изв. РАН. Техн. кибернетика. — 1992. — № 1. — С. 227.

16. Кириченко Н.Ф., Лепеха Н.П. Псевдообращение в задачах управления и наблюдения // Автоматика. — 1993. — № 5. — С. 69–81.

17. Rao C. R., Mitra S.K. Theory and application of constrained inverse of matrices // SIAM J. Appl. Math. — 1973. — **24**. — P. 473–488.

18. Watson G.S. Linear least squares regression // Ann. Math. Statist. — 1967. — **83**. — P. 1679–1699.

19. Zyskind G. On canonical forms, non-negative covariance matrices and best and simple least squares linear estimators in linear models // Ibid. — 1967. — **38.** — P. 1092–1109.

20. Мелешко В.И. Применение рекуррентных оптимальных оценок с псевдообращением в задачах идентификации // Автоматика и телемеханика. — 1978. — № 9. — С. 79–89.

21. Pule L.D. The weighted generalized inverse in nonlinear programming-active set selection using a variable-metric generalization of the simplex algorithm // Lect. Notes in Econ. and Math. Systems. — 1977. — **174**. — P. 197-231.

22. Ваарманн О. Обобщенные обратные отображения. — Таллин: Валгус, 1988. — 120 с.

23. Морозов В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. — М.: Наука, 1987. — 240 с.

24. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов. — М.: Наука, 1986. — 232 с.

25. Галба Е.Ф. Итерационные методы для вычисления взвешенной псевдообратной матрицы // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1996. — **36**, № 6. — С. 28–39.

26. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1967. — 576 с.

27. Галба Е.Ф. Итерационные методы для вычисления взвешенного нормального псевдорешения с положительно-определенными весами // Кибернетика и системный анализ. — 1998. — № 2. — С. 105–115.

28. Беллман Р. Введение в теорию матриц. — М.: Наука, 1969. — 368 с.

29. Lancaster P., Rozsa P. Eigenvectors of H-self-adjoint matrices // Z. angew. Math. und Mech. — 1984. — **64**, N 9. — S. 439–441.

30. Икрамов Х.Д. Об алгебраических свойствах классов псевдоперестановочных и *H*-самосопряженных матриц // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1992. — **32**, № 8. — С. 155–169.

31. Hearon J. Z. Symmetrizable generalized inverses of symmetrizable matrices // J. Res. Nat. Bureau Standards. — 1967. — **71**, N 4. — P. 229–231.

32. Baksalary J.K., Kala R. Symmetrizers of matrices // Linear Algebra and Appl. — 1981. — **35**. — P. 51–62.

33. Галба Е.Ф., Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Предельные представления взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами и регуляризация задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2004. — **44**, № 11. — С. 1928–1946.

34. Sen S. K., Venkaiah V.Ch. On symmetrizing a matrix // Indian J. Pure and Appl. Math. — 1988. — **19**, N 6. — P. 554–561.

35. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф., Дейнека В.С. Предельные представления взвешенных псевдообратных матриц с положительно-определенными весами и регуляризация задач // Кибернетика и системный анализ. — 2003. — № 6. — С. 46–65.

36. Молчанов И.Н., Галба Е.Ф. Взвешенное псевдообращение комплексных матриц // Укр. мат. журн. — 1983. — **35**, № 1. — С. 53–57.

37. Икрамов Х.Д. Задачник по линейной алгебре. — М.: Наука, 1975. — 316 с.

38. Decell H.P. An application of the Cayley-Hamilton theorem to generalized matrix inversion // SIAM Rev. — 1965. — **7**, N 4. — P. 526–528.

39. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф., Дейнека В.С. Разложение в ряды взвешенных псевдообратных матриц и итерационные методы для вычисления взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 1. — С. 32–62.

40. С е р г и е н к о И. В., Г а л б а Е. Ф., Д е й н е к а В. С. Разложение взвешенных псевдообратных матриц с положительно-определенными весами в матричные степенные произведения и итерационные методы // Там же. — 2007. — № 1. — С. 45–64.
41. Ф о р с а й т Д ж., М о л е р К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. — М.: Мир, 1969. — 168 с.
42. Г а л б а Е. Ф. Взвешенное сингулярное разложение и взвешенное псевдообращение матриц // Укр. мат. журн. — 1996. — **48**, № 10. — С. 1426–1430.
43. Х о р н Р., Д ж о н с о н Ч. Матричный анализ. — М.: Мир, 1989. — 656 с.
44. G o l u b G., K a h a n W. Calculating the singular values and pseudoinverse of matrix // SIAM J. Numer. Anal. — 1965. — **2**. — P. 205–224.
45. G o l u b G. H., R e i n s c h C. Singular value decomposition and least squares solutions // Numer. Math. — 1970. — **14.** — P. 403–420.
46. У и л к и н с о н Д ж. Х., Р а й н ш К. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра. — М.: Машиностроение, 1976. — 389 с.
47. С е р г и е н к о И. В., Г а л б а Е. Ф., Д е й н е к а В. С. Итерационные методы с различными скоростями сходимости для вычисления взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений с положительно-определенными весами // Кибернетика и системный анализ. — 2004. — № 5. — С. 20–44.
48. С е р г и е н к о И. В., Г а л б а Е. Ф., Д е й н е к а В. С. Разложение взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные произведения // Укр. мат. журн. — 2004. — **56**, № 11. — С. 1539–1556.
49. Г а л б а Е. Ф., Д е й н е к а В. С., С е р г и е н к о И. В. Разложения и многочленные предельные представления взвешенных псевдообратных матриц // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2007. — **47**, № 5. — С. 747–765.
50. V a n L o a n C. F. Generalizing the singular value decomposition // SIAM J. Numer. Anal. — 1976. — **13**, N 1. — P. 76–83.
51. W e i Y., W u H. The representation and approximation for the weighted Moore-Penrose inverse // Appl. Math. Comput. — 2001. — **121**. — P. 17–28.
52. W e i Y., W a n g D. Condition numbers and perturbation of the weighted Moore-Penrose inverse and weighted linear least squares problem // Ibid. — 2003. — **145**. — P. 45–58.
53. J i J., W e i Y. A note on the sensitiviti of the solution of the weighted linear least squares problem // Appl. Math. Comput. — 2003. — **145**. — P. 481–485.
54. Х и м и ч А. Н., Н и к о л а е в с к а я Е. А. Оценка погрешностей решения задачи взвешенных наименьших квадратов // Сб. науч. тр. Компьютерная математика. — Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины. — 2006. — № 3. — С. 36–45.
55. W a n g D. Some topics on weighted Moore-Penrose inverse, weighted least squares and weighted regularized Tikhonov problems // Appl. Math. Comput. — 2004. — **157**. — P. 243–267.
56. Г а л б а Е. Ф. Разложение в ряды взвешенных псевдообратных матриц // Доп. НАН УкраВни. — 1995. — № 12. — С. 5–7.
57. С е р г и е н к о И. В., Г а л б а Е. Ф., Д е й н е к а В. С. Разложение взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в матричные степенные произведения и итерационные методы // Укр. мат. журн. — 2007. — **59**, № 9. — С. 1269–1289.
58. L o n s e t h A. T. Approximate solution of Fredholm type integral equations // Bull. Amer. Math. Soc. — 1954. — **60**. — P. 415–430.
59. B e n - I s r a e l A., C h a r n e s A. Contribution to the theory of generalized inverses // J. Soc. Industr. Appl. Math. — 1963. — **11**, N 3. — P. 667–699.
60. М о л ч а н о в И. Н., Г а л б а Е. Ф. Взвешенное псевдообращение матриц с положительно определенными весами // Докл. АН УССР. — 1989. — Сер. А, № 7. — С. 15–17.
61. B r o e d e r G. G., C h a r n e s A. Contributions to the theory generalized inverses for matrices // ONR Res. Memo № 39 / Northwestern Univ., 1962.
62. Т и х о н о в А. Н., А р с е н и н В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1974. — 223 с.
63. Г а л б а Е. Ф., Д е й н е к а В. С., С е р г и е н к о И. В. Итерационные методы высоких скоростей сходимости для вычисления взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2005. — **45**, № 10. — С. 1731–1755.
64. S c h u l z G. Iterative Berechnungder resiproken Matrix // Z. angew. Math. und Mech. — 1933. — **33**. — S. 57–59.

65. Stanimirovic P., Djordjevic D. Universal iterative methods for computing generalized inverses // Acta Mathematica Hungarika. — 1998. — **79**, N 13. — P. 253–268.

66. Ben-Israel A., Cohen D. On iterative computation of generalized inverses and associated projections // SIAM J. Numer. Anal. — 1966. — **3,** N 3. — P. 410–419.

67. Nashed M.Z. Inner, outer, and generalized inverses in Banach and Hilbert spaces // Numer. Funct. Anal. and Optimiz. — 1987. — **9,** N 3–4. — P. 261–325.

68. Мелешко В.И. Устойчивые к возмущениям псевдообращения замкнутых операторов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1977. — **17**, № 5. — С. 1132–1143.

69. Sen S.K., Prabhu S.S. Optimal iterative schemes for computing the Moore-Penrose matrix inverse // Int. J. Syst. Sci. — 1976. — **7**, N 8. — P. 847–852.

70. Tanabe K. Neumann-type expansion of reflexive generalized inverses of a matrix and the hyperpower iterative method // Linear Algebra Appl. — 1975. — **10**. — P. 163–175.

71. Wang G., Chen Y. A recursive algorithm for computing the weighted Moore-Penroze inverse A^+_{MN} // J. Comput. Math. — 1986. — **4**, N 1. — P. 74–85.

72. Greville T.N.E. Some applications of the pseudoinverse of a matrix // SIAM Rev. — 1960. — **2**, N 1. — P. 15–22.

73. Wang G. A finite algorithm for computing the weighted Moore-Penroze inverse A^+_{MN} // Appl. Math. Comput. — 1987. — **23**, N 4. — P. 277–289.

74. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. — М.: Физматгиз, 1963. — 736 с.

75. Берсенев С.М. О вычислительных схемах метода регуляризации // Журн. вычисл. математики и мат. физики — 1984. — **24**, № 5. — С. 1402–1405.

76. Tian H.J. On the splittings for rectangular systems // J. Comput. Math. — 1995. — **13**, N 4. — P. 337–342.

77. Wang G., Lu S. Fast parallel algorithms for computing generalized inverses A^+ and A^+_{MN} // J. Comput. Math. — 1988. — **6,** N 4. — P. 348–354.

78. Censor Y., Gordon D., Gordon R. Component averaging: an efficient iterative parallel algorithm for large and sparse unstructured problems // Parallel Comput. — 2001. — **27**, N 6. — P. 777–808.

79. Censor Y., Elfving T. Block-iterative algorithms with diagonally skaled oblique projections for the linear feasibility problem // SIAM J. Matrix. Anal. Appl. — 2002. — **24**, N 1. — P. 40–58.

80. Галба Е.Ф. Представление взвешенной псевдообратной матрицы через другие псевдообратные матрицы // Доп. НАН УкраВни. — 1997. — № 4. — С. 12–17.

81. Архаров Е.В., Шафиев Р.А. Методы регуляризации задачи связанного псевдообращения с приближенными данными // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2003. — **43,** № 3. — С. 347–353.

82. Галба Е.Ф. Итерационные методы для вычисления взвешенного нормального псевдорешения с вырожденными весами // Там же. — 1999. — **39**, № 6. — С. 882–896.

83. Галба Е.Ф. Взвешенное псевдообращение матриц с вырожденными весами // Укр. мат. журн. — 1994. — **46**, № 10. — С. 1323–1327.

84. Жуковский Е.Л., Липцер Р.Ш. О рекуррентном способе вычисления нормальных решений линейных алгебраических уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1972. — **12**, № 4. — С. 843–857.

85. Van Loan C.F. On the method of weighting for equality-constrained least-squares problems // SIAM J. Numer. Anal. — 1985. — **22**, N 5. — P. 851–864.

86. Stewart G.W. On the weighting method for least squares problems with linear equality constraints // BIT. — 1997. — **37**. — P. 961–967.

87. Икрамов Х.Д., Матин фар М. О компьютерно-алгебраических процедурах для линейной задачи наименьших квадратов с линейными связями // Журн. вычисл. математики. и мат. физики. — 2004. — **44**, № 2. — С. 206–212.

Поступила 20.04.2007