УДК 519.21

В.С. КОРОЛЮК, В.К. ЯСИНСКИЙ, И.В. ЮРЧЕНКО

УСТОЙЧИВОСТЬ ДИФФУЗИОННЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАРКОВСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Ключевые слова: *стохастическое функционально-дифференциальное уравнение, марковские параметры, устойчивость решения, диффузия, метод Ляпунова–Красовского.*

В настоящей работе обоснован второй метод Ляпунова для диффузионных стохастических функционально-дифференциальных уравнений с марковскими параметрами, что является обобщением аналогичных результатов для стохастических диффузионных уравнений без последействия [1].

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть на вероятностном пространстве (Ω, F, P) задан на потоке σ-алгебр $\{\mathrm{F}_t, t \ge t_0\}$, $\mathrm{F}_t \subset \mathrm{F}$, случайный процесс $x(t) \equiv x(t, \omega) \in \mathbf{R}^n$ с помощью диффузионного стохастического функционально-дифференциального уравнения (ДСФДУ) [1, 2]

$$dx(t) = a(t, x_t, y(t))dt + b(t, x_t, y(t))dw(t), \; t \ge t_0, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$x(t_0 + \theta) = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-\tau, 0], \quad \tau > 0, \tag{2}$$

где $x_t = \{x(t+\theta), \theta \in [-\tau, 0]\}$; $y(t) \equiv y(t, \omega) \in Y \;\; \forall\, t \ge t_0$ — стохастически непрерывный однородный феллеровский марковский процесс с непрерывными справа реализациями на компактном фазовом пространстве Y [3]; $a: [t_0, \infty) \times C_n([-\tau, 0]) \times Y \to \mathbf{R}^n$ — непрерывное отображение по аргументам; $b: [t_0, \infty) \times C_n([-\tau, 0]) \times Y \to M_{n \times n}(\mathbf{R}^n)$ — матрица порядка $n \times n$; $w(t)$ — n-измеримый процесс броуновского движения.

Определение 1. Абсолютно непрерывный по переменной $t \ge t_0$ n-измеримый случайный процесс $x(t)$ называется решением задачи (1), (2) на множестве $[t_0, T) \subset \mathbf{R}_+$, если $\forall\, T_1 \subset [t_0, T)$, $t \in [t_0 - \tau, T_1)$ с вероятностью единица выполняется равенство

$$x(t) = \begin{cases} \varphi(t - t_0), & t \in [t_0 - \tau, t_0], \\ \varphi(0) + \int\limits_{t_0}^{t} a(s, x_s, y(s))ds + \int\limits_{t_0}^{t} b(s, x_s, y(s))dw(s), & t \in [t_0, T_1). \end{cases} \tag{3}$$

Если два произвольных решения (1), (2) равны с вероятностью единица на произвольном отрезке $t \in [t_0, T)$, то считают, что на данном множестве решение единственно с точностью до стохастической эквивалентности. В этом случае при условии $y(t_0) = y$ решение обозначим $x(t, t_0, \varphi, y)$, а его траектории на отрезке времени $[t - \tau, t]$ — как $x_t(t_0, \varphi, y) = \{x(t + \theta, t_0, \varphi, y), \; \theta \in [-\tau, 0]\}$.

Далее будем считать, что выполняется одно из следующих условий, налагаемых на правую часть ДСФДУ:

L1) глобальное условие Липшица

$$\left| a(t,\varphi,y) - a(t,\psi,y) \right| + || b(t,\varphi,y) - b(t,\psi,y) || \le L||\varphi - \psi||$$

для всех $t \ge 0$, $y \in Y$ и $\varphi, \psi \in C_n([-\tau, 0])$, $||\varphi|| = \sup\limits_{-\tau \le \theta \le 0} |\varphi(\theta)|$;

L2) усиленное глобальное условие Липшица: существует такая вероятностная мера ρ на σ-алгебре борелевых подмножеств отрезка $[-\tau, 0]$, что для всех $t \ge 0$, $y \in Y$ и $\varphi, \psi \in C_n([-\tau, 0])$

$$\left| a(t,\varphi,y) - a(t,\psi,y) \right| + || b(t,\varphi,y) - b(t,\psi,y) || \le$$

$$\le L \int\limits_{-\tau}^{0} |\varphi(\theta) - \psi(\theta)| \rho(d\theta) \equiv ||\varphi - \psi||_\rho;$$

L3) локальное условие Липшица

$$\left| a(t,\varphi,y) - a(t,\psi,y) \right| + || b(t,\varphi,y) - b(t,\psi,y) || \le L_r ||\varphi - \psi||$$

при условии, что $\forall\, t \ge 0$, $y \in Y$, $r > 0$ и $\varphi, \psi \in U_r(0) \equiv$ $\equiv \{\varphi \in C_n([-\tau, 0]) \,|\, ||\varphi|| < r\}$;

L4) усиленное локальное условие Липшица

$$\left| a(t,\varphi,y) - a(t,\psi,y) \right| + || b(t,\varphi,y) - b(t,\psi,y) || \le L_r ||\varphi - \psi||_\rho$$

для произвольных $t \ge 0$, $y \in Y$, $r > 0$ и $\varphi, \psi \in U_r(0) \equiv \{\varphi \in$ $\in C_n([-\tau, 0]) \,|\, ||\varphi||_\rho < r\}$.

С ограничениями типа L3, L4, как правило, используется ограничение так называемого подлинейного роста

$$| a(t,\varphi,y) | + || b(t,\varphi,y) || \le K(||\varphi|| + \alpha(y)) \tag{4}$$

или

$$| a(t,\varphi,y) | + || b(t,\varphi,y) || \le K(||\varphi||_\rho + \alpha(y)) \tag{5}$$

для всех $t \ge 0$, $y \in Y$ и $\varphi, \psi \in C_n([-\tau, 0])$.

Ясно, что из глобальных условий L1 или L2 и условия

$$\sup_{t \ge 0} \left| a(t, 0, y) \right| = \alpha(y) < \infty, \quad \sup_{t \ge 0} \left| b(t, 0, y) \right| = \alpha(y) < \infty \tag{6}$$

$\#\, y \in Y$ следуют условия (4), (5) соответственно [4].

Подставляя в правую часть ДСФДУ реализации марковского процесса $y(t)$ и используя результаты работы [4], легко убедиться в том, что глобальное условие Липшица L1 и условие (6) (или локальное условие L3 и условие (6)) гарантируют существование и единственность решения задачи (1), (2) на $[t_0, \infty)$ для произвольного $t_0 \ge 0$ [4].

Введем понятие устойчивости тривиального решения $x(t) \equiv 0$ уравнения (1), как это сделано в [4–10], причем естественно полагать $\alpha = 0$ в условии (6), т.е.

$$a(t, 0, y) = 0, \quad b(t, 0, y) = 0, \tag{7}$$

а также считать, что существует единственное решение задачи (1), (2) на произвольном полуинтервале $[t_0, \infty)$, $t_0 \ge 0$.

Определение 2. Тривиальное решение $x(t) \equiv 0$ задачи (1), (2) назовем:

— стохастически устойчивым, если $\forall\, \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из неравенства $||\varphi|| < \delta$ следует $\forall\, t_0 \ge 0$, $y \in Y$ неравенство

$$P\{\omega : \sup_{t \ge t_0} |x(t, t_0, \varphi, y)| \ge \varepsilon_1\} < \varepsilon_2; \tag{8}$$

— асимптотически стохастически устойчивым, если выполняется (8) и существует такое $\delta_1 > 0$, что для $\# t_0 \ge 0$, $y \in Y$ и $\varphi \in U_{\delta_1}(0)$

$$P\{\omega : \lim_{t \to \infty} |x(t, t_0, \varphi, y)| = 0\} = 1; \tag{9}$$

— локально асимптотически стохастически устойчивым, если оно стохастически устойчиво и существуют такие $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$, что

$$\lim_{t \to \infty} |x(t, t_0, \varphi, y)| = 0 \quad \# t_0 \ge 0, \quad y \in Y, \quad \varphi \in U_{\delta_1}(0),$$

при $\sup_{t \ge t_0} |x(t, t_0, \varphi, y)| < \delta_2$.

Определение 3. Тривиальное решение $x(t) \equiv 0$ задачи (1), (2) назовем:

— p-устойчивым, если

$$\lim_{||\varphi|| \to 0} \sup_{t \ge t_0 \ge 0} E\{|x(t, t_0, \varphi, y)|^p\} = 0;$$

— асимптотически p-устойчивым, если оно p-устойчиво и существует такое $\delta > 0$, что

$$\lim_{t \to \infty} E\{|x(t, t_0, \varphi, y)|^p\} = 0$$

$\# t_0 \ge 0$, $y \in Y$ и $\varphi \in U_\delta(0)$.

Определение 4. Тривиальное решение $x(t) \equiv 0$ задачи (1), (2) назовем:

— экспоненциально p-устойчивым, если существуют такие $\delta > 0$, $M > 0$ и $\gamma > 0$, что для произвольных $t \ge t_0 \ge 0$, $y \in Y$ и $\varphi \in U_\delta(0)$

$$E\{|x(t, t_0, \varphi, y)|^p\} \le M e^{-\gamma(t - t_0)} ||\varphi||^p; \tag{10}$$

— глобально экспоненциально p-устойчивым, если (10) выполняется для всех $t \ge t_0 \ge 0$, $y \in Y$ и $\varphi \in C_n([-\tau, 0])$;

— сильно экспоненциально p-устойчивым, если существуют такие $\delta > 0$, $M > 0$ и $\gamma > 0$, что для всех $t \ge t_0 \ge 0$, $y \in Y$ и $\varphi \in U_\delta(0)$

$$E\{||x_t(t_0, \varphi, y)||^p\} \le M e^{-\gamma(t - t_0)} ||\varphi||^p; \tag{11}$$

— сильно глобально экспоненциально p-устойчивым, если неравенство (11) выполняется для всех $t \ge t_0 \ge 0$, $y \in Y$ и $\varphi \in C_n([-\tau, 0])$.

ПРОИЗВОДНАЯ ЛЯПУНОВА В СИЛУ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (1), (2)

Рассмотрим скалярный непрерывный функционал [4, 9] по всем переменным

$$V : \mathbf{R}_+ \times C_n([-\tau, 0]) \times Y \to \mathbf{R}^1, \tag{12}$$

для которого выполняется глобальное условие Липшица

$$|V(t, \varphi, y) - V(t, \psi, y)| \le L ||\varphi - \psi|| \tag{13}$$

для всех $\varphi, \psi \in C_n([-\tau, 0])$ и условие глобальной ограниченности $\forall\, y \in Y$

$$\sup_{t \geq 0} |V(t, 0, y)| = \alpha(y) < \infty. \tag{14}$$

С помощью решения (1), (2) и переходной вероятности $P(t, y, dz)$ марковского процесса $y(t) \in \mathbf{R}^n$ определим линейный оператор [3]

$$(T(t)V)(s, \varphi, y) \equiv \int_Y E\{V(s+t, x_{s+t}(s, \varphi, y), z)\} P(t, y, dz). \tag{15}$$

Теорема 1. Пусть функционал V непрерывен по совокупности переменных и выполняются соответствующие условия Липшица для коэффициентов (1). Тогда:

1) результат действия оператора $T(t)$ на $V(t, \varphi, \xi)$ является непрерывной функцией по аргументам, т.е. $T: C(\widetilde{Y}) \to C(\widetilde{Y})$, где $\widetilde{Y} \equiv [0, \infty) \times \times C_n([-\tau, 0]) \times Y$;

2) оператор $T(t)$, $t \geq 0$, образует полугруппу

$$T(t_1 + t_2) = T(t_1)\, T(t_2) \quad \# t_1, t_2 \geq 0; \tag{16}$$

3) семейство линейных операторов на фазовом пространстве $\widetilde{Y}$ определяет стохастический непрерывный марковский процесс с непрерывными справа реализациями.

Доказательство. 1. При условии L1 можно получить неравенство

$$\| x_{t+s}(s, \varphi, y) - x_{t+s}(s, \psi, y) \| \leq \| \varphi - \psi \| e^{Lt}$$

для произвольных $\varphi, \psi \in C_n([-\tau, 0])$ и $t \geq 0$, а в силу стохастической непрерывности феллеровского марковского процесса $y(t)$ функция $T(t) V(s, \varphi, y)$ непрерывна по совокупности аргументов $T: C(\widetilde{Y}) \to C(\widetilde{Y})$.

2. Вследствие единственности решения задачи (1), (2) и свойств переходной вероятности $P(t, y, dz)$ [3] получим

$$(T(t_1 + t_2)) V(s, \varphi, y) =$$

$$= \int_Y E\{V(s + t_1 + t_2, x_{s+t_1+t_2}(s, \varphi, y), z)\} P(t_1 + t_2, y, dz) =$$

$$= \int_Y \int_Y E\{V(s + t_1 + t_2, x_{s+t_1+t_2}(s + t_1, x_{t_2}(s, \varphi, y), u), z)\} P(t_1, y, du)\, P(t_2, u, dz),$$

но по определению

$$\int_Y E\{V(s_1 + t_2, x_{s_1+t_2}(s, \psi, y), z)\}\, P(t_2, u, dz) \Big|_{\substack{s_1 = s + t_1 \\ \psi = x_{s+t_1}(s, \varphi, y)}} =$$

$$= (T(t_2) V)(s + t_1, x_{s+t_1}(s, \varphi, y), u),$$

поэтому можно записать

$$(T(t_1 + t_2) V(s, \varphi, y) = \int_Y E\{(T(t_2) V)(s + t_1, x_{s+t_1}(s, \varphi, y), u)\}\, P(t_1, y, du) =$$

$$= (T(t_1)\, T(t_2) V)(s, \varphi, y)$$

для произвольных $t_1, t_2, s \geq 0$, $y \in Y$ и $\# \varphi \in C_n([-\tau, 0])$, что и доказывает (16).

3. Поскольку непрерывная на отрезке $[-\tau + s, s + \Delta]$ функция аргумента t, заданная равенством [4, 9]

$$x(t, s, \varphi) = \begin{cases} \varphi(t-s) & \forall\, t \in [-\tau + s, s + \Delta], \\ \varphi(0) + \int\limits_s^t a(\tau, x_\tau(s, \varphi, y), y(\tau))d\tau + \\ + \int\limits_s^t b(\tau, x_\tau(s, \varphi, y), y(\tau))dw(\tau) & \forall\, t \in [s, \Delta], \end{cases}$$

является равномерно непрерывной, $\lim\limits_{t \to 0} \| x_t(s, \varphi, y) - \varphi \| = 0$. Отсюда, учитывая стохастическую непрерывность марковского процесса $y(t)$ и непрерывность функционала $V(s, \varphi, y)$ по совокупности переменных, следует соотношение

$$\lim_{t \notin 0} E\{V(s+t, x_{s+t}(s, \varphi, y), y(t))\} = V(s, \varphi, y)$$

для всех $s \geq 0$, $y \in Y$ и $\varphi \in C_n([-\tau, 0])$.

Остается воспользоваться теоремой 2.1 из [3, с. 79] и леммой 2.2 из [3, с. 83], чтобы получить утверждение 3 теоремы 1.

Определение 5. Слабый инфинитезимальный оператор функционала $V : \mathbf{R}_+ \times C_n([-\tau, 0]) \times Y \to \mathbf{R}^1$ определяется [3, 11] на решениях задачи (1), (2), если для всех $s \geq 0$, $y \in Y$ и $\varphi \in C_n([-\tau, 0])$ найдется такое $\Delta > 0$, что существует

$$\sup_{0 < t \leq \Delta} \frac{1}{t} \left| E\{V(s+t, x_{s+t}(s, \psi, y), y(t))\} - V(s, \psi, y) \right| \leq K < \infty$$

равномерно по аргументам ψ и z некоторой окрестности точки (φ, y), а также существует предел

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \Big[E\{V(s+t, x_{s+t}(s, \varphi, y), y(t))\} - V(s, \varphi, y) \Big] \equiv (\mathrm{L}V)(s, \varphi, y). \tag{17}$$

Пусть $\varphi \in U_r(0) \subset C_n([-\tau, 0])$ и $\tau_r \equiv \inf\{t \in \mathbf{R}_+ \mid x(t+s, s, \varphi, y)| > r\}$ — первый момент выхода случайного процесса $\{x(t+s, s, \varphi, y)\}$ из $U_r(0)$. Если это неравенство никогда не выполняется, то будем считать $\tau_r = \infty$. Ясно, что событие $\{\omega : \tau_r > t\}$, определяемое только значениями решения задачи (1), (2) момента времени t, является марковской случайной величиной [3].

Если обозначить $\tau_r(t) \equiv \min\{\tau_r, t\}$, то формулу Дынкина [3, ф. (5.8), с. 191]) можно записать для рассматриваемого случая в виде

$$E\{V(s + \tau_r(t), x_{s+\tau_r(t)}(s, \varphi, y), y(\tau_r(t)))\} =$$
$$= V(s, \varphi, y) + E\left\{ \int\limits_0^{\tau_r(t)} (\mathrm{L}V)(s+\tau, x_{s+\tau}(s, \varphi, y), y(\tau))d\tau \right\} \tag{18}$$

для произвольного $V \in D(\mathrm{L})$ и для всех $t \geq s \geq 0$, $y \in Y$ и $\varphi \in U_r(0)$.

Лемма 1. Если непрерывный функционал $V : \mathbf{R}_+ \times C([-\tau, 0]) \times \times Y \to \mathbf{R}$ удовлетворяет условиям (13), (14), то слабый инфинитезимальный оператор L по определению 5 можно представить в виде трех операторов, действующих соответственно по первому, второму и третьему аргументам,

$$\mathfrak{L}V = \mathfrak{L}_1 V + \widetilde{\mathfrak{L}}_2 V + \widetilde{\mathfrak{L}}_3 V, \tag{19}$$

если функционал V находится в области определения каждого из этих операторов.

Доказательство. Для вычисления оператора $\mathfrak{L}$ по формуле (17) используются только локальные характеристики процесса, который задает полугруппу $T(t)$, т.е. $x_{s+t}(s, \varphi, y)$ и $y(t)$ по достаточно малым $t > 0$. Поэтому оператор $\mathfrak{L}$ полностью определяется правой частью ДСФДУ и слабым инфинитезимальным оператором $\widetilde{\mathfrak{L}}_3$ марковского процесса $y(t)$.

Условия (13), (14) для всех $s \geq 0$, $y \in Y$ и $\varphi \in C_n([-\tau, 0])$ гарантируют существование

$$\sup_{0<t\leq\Delta} \frac{1}{t} |E\{V(s, \varphi, y(t))\} - V(s, \varphi, y)| \leq K < \infty,$$
$$\sup_{0<t\leq\Delta} \frac{1}{t} |V(s, x_{t+s}(s, \varphi, y), y) - V(s, \varphi, y)| \leq K < \infty,$$

а также существование пределов

$$\lim_{t \not\in 0} \frac{1}{t} [E\{V(s, \varphi, y(t))\} - V(s, \varphi, y)] \equiv \widetilde{V}_1(s, \varphi, y), \tag{20}$$

$$\lim_{t \not\in 0} \frac{1}{t} [V(s, x_{t+s}(s, \varphi, y), y) - V(s, \varphi, y)] \equiv \widetilde{V}_2(s, \varphi, y), \tag{20а}$$

$$\lim_{t \not\in 0} \frac{1}{t} [V(s+t, \varphi, y) - V(s, \varphi, y)] \equiv \frac{\partial}{\partial t} V(s, \varphi, y). \tag{20б}$$

Тогда следует тождественно приравнять эти пределы:

$$\widetilde{V}_1(s, \varphi, y) \equiv (\widetilde{\mathfrak{L}}_3 V)(s, \varphi, y),\ \widetilde{V}_2(s, \varphi, y) \equiv (\widetilde{\mathfrak{L}}_2 V)(s, \varphi, y),$$
$$\frac{\partial}{\partial s} V(s, \varphi, y) \equiv (\mathfrak{L}_1 V)(s, \varphi, y),$$

где предел (20) — оператор $\widetilde{\mathfrak{L}}_3$, действующий на $V(s, \varphi, y(t))$ по третьему аргументу как слабый инфинитезимальный оператор марковского процесса $y(t)$ [3]; предел (20а) — инфинитезимальный оператор на решениях ДСФДУ [4];

$$(\hat{\mathrm{L}}_2 V)(s, \varphi, y) = ((\nabla V)(s, \varphi, y), a(s, \varphi, y)) +$$
$$+ \frac{1}{2} \operatorname{sp}((\nabla^2 V(s, \varphi, y)), b(s, \varphi, y) b^T(s, \varphi, y)),$$

где ∇V — вектор, компоненты которого — первые производные Фреше V_{φ_i}; $\nabla^2 V$ — матрица размерности $n \times n$, составленная из вторых производных Фреше $V_{\varphi_i \varphi_j}$, $i, j = \overline{1, n}$ [10]; $\operatorname{sp} A$ — след матрицы A; b^T — транспонированная матрица b.

Лемма 1 доказана.

Определение 6. Оператор $(\mathfrak{L}V)(s, \varphi, y)$ назовем производной Ляпунова на решении ДСФДУ, если функционал $V: \mathbf{R}_+ \times C([-\tau, 0]) \times Y$ непрерывен по s, φ, y, ограничен на каждом множестве $[t_1, t_2] \times U_r(0) \times Y$ и выполняются условия определения 5. Обозначим $V \in D(\mathrm{L})$.

Пусть $P\{\omega: \lim_{r\to\infty} \tau_r(t) = t\} = 1$ и существуют математические ожидания

$$E\{V(s+t, x_{s+t}(s, \varphi, y), y(t))\} < \infty,$$

$$\sup_{0 \le u \le t} E\{(\mathfrak{L}V)(s+u, x_{s+u}(s, \varphi, y), y(u))\} < \infty.$$

Это дает возможность перейти к пределу в формуле Дынкина (18), которая будет иметь вид

$$E\{V(s+t, x_{s+t}(s, \varphi, y), y(t))\} = V(s, \varphi, y) + \\ + \int_0^t E\{(\mathfrak{L}V)(s+u, x_{s+u}(s, \varphi, y), y(u))\} du, \tag{21}$$

где для вычисления $\mathfrak{L}V$ используются только локальные характеристики марковского процесса $y(t)$, а именно инфинитезимальный оператор $\widetilde{\mathfrak{L}}_3$, и решения ДСФДУ, а именно оператор $\widetilde{\mathfrak{L}}_2$ из (20а).

Замечание 1. Если выполняется локальное условие Липшица L3 и условие (6), то формулу Дынкина (18) можно использовать только до марковского момента времени $\tau = \lim_{r \to \infty} \tau_r$, поскольку нет гарантии существования решения задачи (1), (2) на полуинтервале $[s, \infty)$. Но если по некоторым s, φ, y с вероятностью единица время $\tau = \infty$ и существуют соответствующие математические ожидания, то можно использовать формулу Дынкина (21) для всех $t > 0$.

Определение 7. В условиях определения 6 верхней производной Ляпунова назовем соотношение

$$\lim_{\Delta \not\in 0} \sup_{0 < t \le \Delta} \frac{1}{t} \Big[E\{V(s+t, x_{s+t}(s, \varphi, y), y(t))\} - V(s, \varphi, y) \Big] \equiv (\mathfrak{L}V)(s, \varphi, y),$$

если для всех достаточно малых $\Delta > 0$ в каждой окрестности $U_r(0) \times Y$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{\Delta} \Big| E\{V(s+\Delta, x_{s+\Delta}(s, \varphi, y), y(\Delta))\} - V(s, \varphi, y) \Big| < g_r(s, \varphi, y), \tag{22}$$

где $g_r(s, \varphi, y)$ является непрерывной функцией своих аргументов и ограничена по второму аргументу φ в каждой сфере $U_r(0)$.

Лемма 2. Если выполняются условия леммы 1, то выполняется неравенство Дынкина

$$E\{V(s+\tau_r(t), x_{s+\tau_r(t)}(s, \varphi, y(\tau_r(t)), y(\tau_r(t)))\} \le \\ \le V(s, \varphi, y) + E\left\{ \int_0^{\tau_r(t)} (\mathfrak{L}V)(s+u, x_{s+u}(s, \varphi, y), y(u)) du \right\}. \tag{23}$$

Доказательство. Рассмотрим

$$V_\Delta(s, \varphi, y) \equiv \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta E\{V(s+u, x_{s+u}(s, \varphi, y), y(u))\} du.$$

Поскольку Y — компакт [3, 11], а решение задачи (1), (2) за промежуток времени $u \le \Delta$ при условиях L1 и (6) не выходит из сферы $U_r(0)$ для некоторого $r > 0$, то функционал V_Δ существует для $V(s, \varphi, y)$, ограниченного множестве вида $[s, s+\Delta] \times U_r(0) \times Y$. Но $V_\Delta \in D(\mathrm{L})$ и

$$(\mathrm{L}V_{\Delta})(s, \varphi, y) = \frac{1}{\Delta}\Big[E\,\{V(s+\Delta, x_{s+\Delta}(s, \varphi, y), y(\Delta))\} - V(s, \varphi, y)\Big]$$

для всех $s \geq 0$, $y \in Y$ и $\varphi \in C_n([-\tau, 0])$.

Таким образом,

$$E\,\{V(s+\tau_r(t), x_{s+\tau_r(t)}(s, \varphi, y), y(\tau_r(t)))\} = V_{\Delta}(s, \varphi, y) +$$

$$+ E\left\{\frac{1}{\Delta}\int\limits_0^{\tau_r(t)}[E\,\{V(s+\Delta+u, x_{s+\Delta+u}(s+u, x_{s+u}(s, \varphi, y), y(\Delta+u)))\} - \right.$$

$$\left. - V(s+u, x_{s+u}(s, \varphi, y), y(u))\,]\,du\right\}, \qquad (24)$$

где $\tau_r(t)$ — первый момент выхода решения (1), (2) из $U_r(0)$. После перехода к пределу в (24) слева и справа по теореме Фубини получим неравенство (23).

Лемма 2 доказана.

Определение 8. Если функционал $V: \mathbf{R}_+ \times C_n([-\tau, 0]) \times Y \to \mathbf{R}^1$ непрерывный по всем аргументам и удовлетворяет условиям

$$c_1|\varphi(0)|^{p_1} \leq V(s, \varphi, y) \leq c_2||\varphi||^{p_2} \qquad (25)$$

для некоторых $c_1, c_2 > 0$, $p_2 \geq p_1 > 0$ и всех $s \in \mathbf{R}_+$, $y \in Y$ и $\varphi \in C_n([-\tau, 0])$, а также $V \in D(\mathfrak{L})$ (или $V \in D(\widetilde{\mathfrak{L}})$), то такой функционал назовем функционалом Ляпунова–Красовского.

Замечание 2. Неравенство (22) определения 7 может быть слишком жестким. В частности, данному неравенству не удовлетворяет простейший функционал $\widetilde{V}(s, \varphi, y) = ||\varphi||$. Тогда условие (22) можно ослабить. Используя полугрупповое свойство оператора $T(t)$, вместо формулы (24) следует записать соотношение

$$E\,\{V_{\Delta}(s+\tau_r(t), x_{s+\tau_r(t)}(s, \varphi, y), y(\tau_r(t)))\} =$$

$$= E\,\{V_{\Delta}(s+s_1, x_{s+s_1}(s, \varphi, y), y(s_1))\} +$$

$$+ E\left\{\frac{1}{\Delta}\int\limits_0^{\tau_r(t)}[E\,\{V(s+s_1, x_{s+\Delta+u}(s+u, x_{s+u}(s, \varphi, y), y(\Delta+u))\right\} -$$

$$- V(s+u, x_{s+u}(s, \varphi, y), y(u))]du\}, \qquad (26)$$

где $s_1 \in [-\tau, t_1]$, а момент времени t_1 выбран так, чтобы за это время решение не вышло из $U_r(0)$. Ясно, что должны выполняться условия, обеспечивающие существование такого t_1. Пусть также выполняются условия, гарантирующие выполнение оценки

$$\sup|a(u, \varphi, y)| = c_{1r} < \infty, \quad \sup|b(u, \varphi, y)| = c_{2r} < \infty,$$

где верхняя грань определяется для всех $u \geq s$, $y \in Y$ и $\varphi \in U_r(0)$. Тогда для всех $u_1 \in [\tau, \tau_2)$, $u_2 \in [\tau, \tau_2)$ решение (1), (2) удовлетворяет условию Липшица

$$|x(s+u_1, s, \varphi, y) - x(s+u_2, s, \varphi, y)| \leq c_r|u_1 - u_2|.$$

Чтобы перейти к пределу под знаком интеграла в (26), достаточно выполнения неравенства (22) только для тех $\varphi \in U_r(0)$, которые удовлетворяют условию Липшица.

Легко видеть, что данному условию функционал $\widetilde{V}\,(s, \varphi, y) = \|\varphi\|$ удовлетворяет, причем

$$(\widetilde{\mathrm{L}}\,\widetilde{V})(s, \varphi, y) = \begin{cases} 0, & |\varphi(0)| < \|\varphi\|; \\ \max\left\{0, \dfrac{1}{|\varphi(0)|}\varphi^T(0)\, a(s, \varphi, y) + \right. & \\ \left. + \dfrac{1}{|\varphi(0)|}\,|b(s, \varphi, y)\varphi(0)|\right\}, & \varphi \in S_0, \end{cases} \tag{27}$$

где $S_0 \equiv \{\varphi \in C([-\tau, 0]) \,|\, \|\varphi\| = |\varphi(0)|\}$.

Если $P\{\omega : \lim\limits_{r \to 0} \tau_r(t) = t\} = 1$, то из (23) следует неравенство

$$E\{\|x_{t+s}(s, \varphi, y)\|\} \le$$

$$\le E\{\|x_{s+\tau}(s, \varphi, y)\|\} + \int_\tau^t E\{(\widetilde{\mathrm{L}}V)(s+u, x_{s+u}(s, \varphi, y), y(u))\}du,$$

которое вместе с (27) можно использовать для анализа решений (1), (2).

Необходимо также заметить, что в момент τ_r первого выхода решения из сферы $U_r(0)$ всегда выполняется равенство $|x(s+\tau_r, \varphi, y)| = \|x_{s+\tau_r}(s, \varphi, y)\|$, т.е. $x_{s+\tau_r} \in S_0$, а значит, для всех $s \ge 0$, $y \in Y$ и $\varphi \in U_r(0)$

$$(\widetilde{\mathfrak{L}}\widetilde{V})(s+\tau_r, x_{s+\tau_r(t)}(s, \varphi, y), y(\tau_r)) =$$

$$= \frac{1}{r} x^T(s+\tau_r, s, \varphi, y)\, a(s+\tau_r, x_{s+\tau_r}(s, \varphi, y), y(\tau_r)) +$$

$$+ \frac{1}{r}|b(s+\tau_r, x_{s+\tau_r}(s, \varphi, y), y(\tau_r))\, x(s+\tau_r, s, \varphi, y)|.$$

Полученные результаты позволяют исследовать устойчивость решений задачи (1), (2) по определениям 2–4.

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ЛЯПУНОВА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ

Вначале установим вспомогательные неравенства для решения задачи (1), (2).

Лемма 3. Если выполняются условия L3 и (4), то решение задачи (1), (2) допускает оценку для всех $T \ge 0$, $s \ge 0$, $y \in Y$ и $\varphi \in C_n([-\tau, 0])$

$$\sup_{-r \le t \le T} |x(t+s, s, \varphi, y)| \le (\|\varphi\| + \alpha K T)e^{KT}; \tag{28}$$

$$\sup_{t_1, t_2 \in [s, s+T]} |x(t_2, s, \varphi, y) - x(t_1, s, \varphi, y)| \le$$
$$\le K[(\|\varphi\| + \alpha KT)e^{KT} + \alpha]|t_1 - t_2|. \tag{29}$$

Доказательство. Условия L3 и (4) гарантируют существование и единственность решения задачи (1), (2) на полуинтервале $[s, \infty)$ [4]. Из условия (4) легко получить оценку

$$\sup_{-r \le t \le u} |x(t+s, s, \varphi, y)| \le \left(||\varphi|| + K \left(\int_0^u \sup_{-\tau \le s_1 \le t} |x(s+s_1, s, \varphi, y)| \, ds + \alpha T \right) \right),$$

откуда по лемме Гронуолла следует оценка (28).

Используя вторую строку (3) для произвольных $t_2 > t_1$ из отрезка $[s, s+t]$, получаем

$$|x(t_2, s, \varphi, y) - x(t_1, s, \varphi, y)| \le K \left(\int_{t_1}^{t_2} (||x_t(s, \varphi, y)|| + \alpha) dt \right) \le$$

$$\le K[(||\varphi|| + \alpha KT) e^{KT} + \alpha](t_2 - t_1),$$

что и доказывает лемму 3.

Отметим, что в случае $a(s, 0, y) \equiv 0$, $b(s, 0, y) = 0$ формулы упрощаются за счет $\alpha = 0$.

Теорема 2. Пусть:

1) $a(s, 0, y) \equiv 0$, $b(s, 0, y) \equiv 0$;

2) выполняются условия L3 и (5);

3) существует функционал $V(s, \varphi, y)$, для которого справедлива оценка (25)

$$c_1 |\varphi(0)|^{p_1} \le V(s, \varphi, y) \le c_2 ||\varphi||^{p_2}$$

для $c_1, c_2 > 0$, $p_2 \ge p_1 > 0$, всех $s \in \mathbf{R}_+$, $y \in Y$, $\varphi \in C_n([-\tau, 0])$ и для некоторых $c_3 > 0$ и $p \in (0, p_1]$ выполняется неравенство

$$(\widetilde{\mathfrak{L}} V)(s, \varphi, y) \le -c_3 |\varphi(0)|^p \tag{30}$$

для всех $s \ge 0$, $y \in Y$ и $\varphi \in C_n([-\tau, 0])$.

Тогда тривиальное решение задачи (1), (2) асимптотически p-устойчиво.

Доказательство. Поскольку $P\{\omega : \lim_{r \to 0} \tau_r(t) = t\} = 1$ для всех $t > 0$, в (24) вместо $\tau_r(t)$ можно использовать t. В соответствии с формулами (24) и (28), для $t \ge \tau$ получим неравенство

$$c_1 E\{|x(t+s, s, \varphi, y)|^{p_1}\} \le E\{V(s+t, x_{s+t}(s, \varphi, y), y(t))\} \le$$

$$\le c_2 E\{||x_{s+\tau}(s, \varphi, y)||^{p_2}\} - c_3 \int_\tau^t E\{|x(s+u, s, \varphi, y)|^p\} du \le$$

$$\le c_2 ||\varphi||^{p_2} e^{p_2 KT} - c_3 \int_\tau^t E\{|x(s+u, s, \varphi, y)|^p\} du.$$

Отсюда следует p-устойчивость для $p \le p_1$ и сходимость интеграла

$$\int_\tau^\infty E\{|x(s+u, s, \varphi, y)|^p\} du < \infty.$$

Таким образом, из сходимости интеграла следует стремление к нулю p-го момента решения задачи (1), (2), что и доказывает утверждение теоремы 2.

Теорема 3. Если выполнены условия теоремы 2 с $p_2 = p_1 = p > 0$, то тривиальное решение задачи (1), (2) глобально экспоненциально устойчиво.

Доказательство. Обозначим $u(t) \equiv (T(t)V)(s, \varphi, y)$ и перепишем формулу (23) для случая $\tau_r(t) = t$ и $t_2 > t_1 \geq \tau$ в виде

$$u(t_2) \leq u(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} E\{(\widetilde{\mathrm{L}}V)(s+t, x_{s+t}(s, \varphi, y), y(t))\}dt.$$

Если V удовлетворяет условиям теоремы 2, то из предыдущей формулы и очевидного неравенства

$$(\widetilde{\mathfrak{L}}V)(s, \varphi, y) \leq -c_3 |\varphi(0)|^p \leq -\frac{c_3}{c_1} V(s, \varphi, y)$$

получим

$$u(t_2) - u(t_1) \leq -\frac{c_3}{c_1} \int_{t_1}^{t_2} u(t)dt.$$

Отсюда

$$E\{|x(s+t, s, \varphi, y)|^p\} \leq \frac{1}{c_1} E\{V(s+t, x_{s+t}(s, \varphi, y), y(t))\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{c_1} e^{-\frac{c_3}{c_1}(t-\tau)} E\{V(s+\tau, x_{s+\tau}(s, \varphi, y), y(t))\} \leq \frac{c_2}{c_1} e^{-\frac{c_3}{c_1}(t-\tau)} e^{p_2 K h \|\varphi\|^p}$$

для всех $\varphi \in C_n([-\tau, 0])$, $s \geq 0$, $y \in Y$ и $t \geq \tau$.

Теорема 4. Если выполняется локальное условие L3 Липшица, условие (7) и существует функционал Ляпунова–Красовского, удовлетворяющий условиям теоремы 2, то тривиальное решение задачи (1), (2) асимптотически стохастически устойчиво.

Доказательство. Пусть τ_r — момент первого выхода решения из сферы $U_r(0)$. Тогда для произвольных $t \geq 0$ и $r > 0$ из формулы (18) и определения функционала V очевидно выполняются неравенства

$$c_1 E\{|x(s+\tau_r(t), s, \varphi, y)|^p\} \leq E\{V(s+\tau_r(t), x_{s+\tau_r(t)}(s, \varphi, y), y(\tau_r(t)))\} \leq$$

$$\leq V(s, \varphi, y) \leq c_1 \|\varphi\|^p.$$

Поскольку $\lim\limits_{t \to 0} \tau_r(t) = t$, существует

$$E\{V(s+t, x_{s+t}(s, \varphi, y), y(t))\} < \infty$$

для всех $t \geq 0$, $\varphi \in C_n([-\tau, 0])$, $s \geq 0$, $y \in Y$. Пусть F_t — минимальная σ-алгебра, относительно которой измеримы все $y(s)$ для $s \in [0, t]$. Тогда $V(s+t, x_{s+t}(s, \varphi, y), y(t))$ является F_t-измеримым, а марковское свойство для произвольного $u \in [0, t]$ дает

$$E\{V(s+t, x_{s+t}(s, \varphi, y), y(t)) |_{F_u}\} =$$

$$= E\{V(s_1 + (t-u), x_{s_1 + (t-u)}(s, \psi, z), y(t-u))\Big|_{\substack{s_1 = s+u \\ z = y(u) \\ \psi = x_{s+u}(s, \varphi, y)}}.$$

Поэтому из неравенства (30) получим

$$E\{V(s+t, x_{s+t}(s, \varphi, y), y(t)) |_{F_u}\} \leq E\{V(s+u, x_{s+u}(s, \varphi, y), y(u))\},$$

т.е. $\{V(s+t, x_{s+t}(s, \varphi, y), y(t)), F_t\}$ — неотрицательный супермартингал для

$t \geq 0$ [1, 12]. Значит, существует предел

$$\lim_{t \to \infty} V(s+t, x_{s+t}(s, \varphi, y), y(t)) = \eta(\omega) \geq 0$$

с вероятностью единица. Из неравенств (25) и (30) можно получить оценки

$$E\{V(s+t, x_{s+t}(s, \varphi, y), y(t))\} \leq$$

$$\leq c_2 ||\varphi||^p - c_3 \int_0^t E\{|x(s+s_1, s, \varphi, y)|^p\} ds_1 \leq$$

$$\leq c_2 ||\varphi||^p - \frac{c_3}{c_1} \int_0^t E\{V(s+s_1, x_{s+s_1}(s, \varphi, y), y(s_1))\} ds_1,$$

т.е.

$$E\{\eta(\omega)\} = \lim_{t \to \infty} E\{V(s+t, x_{s+t}(s, \varphi, y), y(t))\} \leq c_2 ||\varphi||^p \lim_{t \to \infty} e^{-\frac{c_3}{c_1} t} = 0$$

и отсюда $P\{\omega : \eta(\omega) = 0\} = 1$.

Теперь, учитывая основное неравенство для супермартингалов [13], получаем

$$P\left\{\omega : \sup_{t \geq T} |x(s+t, s, \varphi, y)| \geq \varepsilon \right\} \leq$$

$$\leq P\left\{\omega : \sup_{t \geq T} \frac{1}{T} V(s+t, x_{s+t}(s, \varphi, y), y(t)) \geq \varepsilon^p \right\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{c_1 \varepsilon^p} E\{V(s+T, x_{s+T}(s, \varphi, y), y(T))\} \leq \frac{c_2 ||\varphi||^p}{c_1 \varepsilon^p} e^{-\frac{c_3}{c_1} T}$$

для всех $T > 0$, $\varepsilon > 0$, $\varphi \in C_n([-\tau, 0])$, $s \geq 0$, $y \in Y$.

Остается рассмотреть предел при $T \to \infty$, и теорема 4 будет доказана.

УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ ДИФФУЗИОННЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДИСКРЕТНЫМИ МАРКОВСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ

1. Рассмотрим скалярный процесс $y(t) \in \mathbf{Y}$, являющийся однородной марковской цепью с конечным числом состояний $Y \equiv \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$, причем известны параметры q_{ij} при условии

$$q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}, \tag{31}$$

$$\mathbf{P}\{y(t+\Delta t) = y_j \mid y(t) = y_i\} = q_{ij} \Delta t + o(\Delta t), \tag{32}$$

$$\mathbf{P}\{y(\tau) \equiv y_i, \; t \leq \tau \leq t + \Delta t \mid y(t) = y_i\} = 1 - q_i \Delta t + o(\Delta t). \tag{33}$$

Марковская цепь $y(t) \in \mathbf{Y}$ является параметром задачи (1), (2).

Допустим, что в момент $\tau > 0$ скачкоподобного изменения структуры фазовый вектор $x(\tau) \in \mathbf{R}^n$ однозначно определяется состоянием, в котором находилась система непосредственно перед изменением структуры, вызванным переходом $y(\tau-0)=y_i$ в $y(\tau)=y_j \neq y_i$.

Это означает выполнение равенства

$$x(\tau)=\varphi_{ij}(x(\tau-0)), \quad i\neq j, \tag{34}$$

где $\varphi_{ij}(x)\in C_n([-h,0])$, причем $\varphi_{ij}(0)=0$.

В соответствии с формулой (19) в случае цепи Маркова слабый инфинитезимальный оператор на решениях ДСФДУ имеет вид [4, 13]

$$\mathfrak{L}v(s,\varphi,\,y(s))=\frac{\partial v(s,\varphi,\,y(s))}{\partial s}+(\nabla v(s,\varphi(0),\,y(s)),\,a(s,\varphi,\,y(s)))+$$
$$+\frac{1}{2}\,\mathrm{sp}\,\nabla^2 v(s,\varphi,\,y(s))\,\sigma(s,\varphi,\,y(s))\,\sigma^T(s,\varphi,\,y(s))+$$
$$+\sum_{j\neq i}^{k}[v(s,\varphi_{ij}(\varphi),\,y_j)-v(s,\varphi,\,y_i)]\,q_{ij}. \tag{35}$$

2. Если $y(t)\in\mathbf{Y}$ является чисто разрывным скалярным марковским процессом, т.е. $y(t)\in[t_1,\,t_2]$ такой, что допускает разложение

$$\mathbf{P}\{y(t+\Delta t)\in(\beta,\,\beta+\Delta\beta)\,|\,y(t)=\alpha\neq\beta\}=p(t,\alpha,\beta)\Delta t+o(\Delta t), \tag{36}$$

$$\mathbf{P}\{y(\tau)\equiv\alpha,\,t<\tau<t+\Delta t\,|\,y(t)=\alpha\}=1-p(t,\alpha)\Delta t+o(\Delta t), \tag{37}$$

то получаем слабый инфинитезимальный оператор

$$\mathfrak{L}v(s,\varphi,\,y(s))=\frac{\partial v(s,\varphi,\,y(s))}{\partial s}+(\nabla v(s,\varphi(0),\,y(s)),\,a(s,\varphi,\,y(s)))+$$
$$+\frac{1}{2}\,\mathrm{sp}\,\nabla^2 v(s,\varphi,\,y(s))\,\sigma(s,\varphi,\,y(s))\,\sigma^T(s,\varphi,\,y(s))+$$
$$+\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}[v(s,\varphi,\beta)-v(s,\varphi,\alpha)]\,p(t,\alpha,\beta)d\beta. \tag{38}$$

3. Рассмотрим модельные задачи, при решении которых использовались доказанные выше теоремы об устойчивости.

Модельная задача 1. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathrm{F},\mathbf{P})$ сильное решение определено скалярным дифференциально-разностным уравнением

$$dx(t)=[y(t)x(t)+bx(t-h)]dt+\sigma x(t-\tau)\,dw(t) \tag{39}$$

с начальными условиями

$$x(t)=\varphi(t), \quad t\in[-h,0], \tag{40}$$

где $b\geq 0$, $h\geq 0$ — известные константы; $\{y(t)\}$ — однородный марковский процесс с двумя состояниями $y_1>0$ и y_2 с переходными вероятностями

$$\mathbf{P}\{y(t)=y_j,\,y(s)=y_i\}=q_{ij}(t-s)+o(t-s), \quad i,j=\overline{1,2},$$

$$\mathbf{P}\{y(\sigma)\equiv y_i;\ s\leq\sigma\leq -1\,|\,y(s)=y_i\}=1-q_i(t-s)+o(t-s),$$

$$q_i=\sum_{j\neq i}q_{ij}.$$

Определим достаточные условия экспоненциальной устойчивости в среднем квадратичном решения уравнения (39).

Воспользуемся стохастическим функционалом Ляпунова–Красовского

$$v(\varphi, y_k) = |y_k| \varphi^2(t) + y_1 b \int_{t-h}^{t} \varphi^2(\theta) d\theta, \tag{41}$$

где $k = 1, 2$.

Функционал (41) удовлетворяет, очевидно, условиям теоремы 2, причем $v \in D(\mathfrak{L})$, а неравенство $\mathrm{L}v < 0$ будет иметь вид

$$\mathfrak{L}v(\varphi, y) = \varphi^2(t)[2y_k |y_k| + by_1 + q_{12}(|y_2| - y_1) +$$
$$+ q_{21}(y_1 - |y_2|)] + (-y_1 b + \sigma^2 |y_k|)\varphi^2(t-h) + 2\varphi(t)\varphi(t-h) b |y_k| < 0. \tag{42}$$

Оператор $\mathfrak{L}\, v$ относительно фазовых переменных $\varphi(t-h)$, $\varphi(t)$ является квадратичной формой с матрицей

$$A \equiv \begin{bmatrix} -y_1 b + \sigma^2 |y_k| & b|y_k| \\ b|y_k| & 2y_k |y_k| + by_1 + (q_{12} - q_{21})(|y_2| - y_1) \end{bmatrix}.$$

По правилу Сильвестра матрица A отрицательно определенная, а значит, и соответствующая квадратичная форма будет отрицательно определенной, если главные миноры матрицы A меняют знак с «–» на «+», т.е.

$$-y_1 b < 0,$$
$$(-y_1 b + \sigma^2 |y_k|)[2y_k |y_k| + by_1 + (q_{12} - q_{21})(|y_2| - y_1)] -$$
$$- b^2 y_k^2 > 0, \quad k = 1, 2. \tag{43}$$

По теореме 2 условия (43) определяют достаточные условия экспоненциальной устойчивости в среднем квадратичном нулевого решения задачи (39), (40).

Модельная задача 2. Рассмотрим скалярное стохастическое дифференциально-разностное уравнение

$$dx(t) = -[bx(t) + y(t)x(t-h)]dt + \sigma x(t) d\omega(t) \tag{44}$$

с начальными условиями

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h, 0], \tag{45}$$

где $b \geq 0$, $h \geq 0$ — константы, $\{y(t)\}$ — однородный марковский процесс с двумя состояниями $y_1 > 0$ и y_2 с переходными вероятностями (31)–(33).

Определим достаточные условия экспоненциальной устойчивости в среднем квадратичном задачи (44), (45). Воспользуемся снова функционалом (41), для которого

$$\mathfrak{L}v(\varphi, y_k) = \varphi^2(t)[-2by_k + by_1 + (q_{12} - q_{21})(|y_2| - y_1) + \sigma^2 |y_k|] -$$
$$- y_1 b \varphi^2(t-h) - 2|y_k| y_k \varphi(t)\varphi(t-h) < 0.$$

Таким образом, достаточными условиями экспоненциальной устойчивости в среднем квадратичном нулевого решения задачи (44), (45) будет выполнение неравенств

$$- y_1 b < 0,$$

$$y_1 b[2by_k - by_1 - (q_{12} - q_{21})(|y_2| - y_1)] - \sigma^2 |y_k| - y_k^4 > 0, \quad k = 1, 2.$$

Данные условия дают возможность в плоскости параметров b, σ строить зоны устойчивости решений (44), (45). Заметим, что полученные теоремы об устойчивости решений ДСФДУ могут применяться для анализа устойчивости динамических систем, имеющих транспортное, информационное, экологическое последействие и т.д. [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их применения. — Киев: Наук. думка, 1982. — 612 с.
2. Королюк В.С., Ясинський В.К. Курс теоріВ ймовірностей, випадкових процесів та математичноВ статистики. — КиВв: ТВ•МС, 2005. — 526 с.
3. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. — М.: Физматгиз, 1969. — 859 с.
4. Царьков Е.Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. — Рига: Зинатне, 1989. — 421 с.
5. Кац И.Я. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры. — Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. академии путей сообщения, 1998. — 228 с.
6. Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. — М.: Наука, 1981. — 448 с.
7. Королюк В.С. Устойчивость автономной динамической системы с быстрыми марковскими переключениями // Укр. мат. журн. — 1991. — **42**, № 9. — С. 1176–1181.
8. Скороход А.В. Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. — К.: Наук. думка, 1987. — 328 с.
9. Царьков Е.Ф., Ясинский В.К. Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения. — Рига: Ориентир, 1992. — 328 с.
10. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 534 с.
11. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. — М.: ИЛ, 1962. — 829 с.
12. Жакод Ж., Ширяев А.Н. Предельные теоремы для случайных процессов: В 2 т. — М.: Физматгиз, 1994. — **1**. — 544 с.
13. Жакод Ж., Ширяев А.Н. Предельные теоремы для случайных процессов: В 2 т. — М.: Физматгиз, 1994. — **2**. — 497 с.

Поступила 19.12.2006