УДК 519.71:330.42

В.И. ИВАНЕНКО, В.М. МИХАЛЕВИЧ

К ВОПРОСУ О НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ В ЗАДАЧАХ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Ключевые слова: *неопределенность, принятие решения, матричная схема, лотерейная схема.*

Задачи принятия решений (ЗПР) преимущественно рассматриваются как оптимизационные, т.е. как задачи выбора оптимальных решений. Множество таких задач можно разделить на два подкласса: ЗПР без неопределенности (так называемые детерминистические задачи) и ЗПР с неопределенностью. Для такой классификации необходим критерий существования неопределенности в ЗПР.

Уточним некоторые понятия относительно такого критерия.

Будем говорить, что ЗПР возникает в системе принятия решений (СПР), которая образуется всегда, когда лицо, принимающее решение (ЛПР), оказывается в ситуации решения (СР). Иными словами, ЛПР находится в ситуации, которая требует от него выбрать одно решение (альтернатива) d из множества возможных решений D.

Ситуация решения может принадлежать одному из двух классов — параметрических и непараметрических ситуаций. В первом случае присутствует параметр ω из некоторого множества Ω, которое в дальнейшем будем называть пространством неизвестного параметра (кратко — параметрическим пространством). В случае, если таковой параметр отсутствует, то такую СР назовем непараметрической.

Будем считать, что в общем случае всякое решение $d \in D$ в СПР вызывает из множества возможных последствий C лишь одно $c \in C_d$, где C_d является подмножеством множества всех возможных в данной СПР последствий, т.е. $C = \bigcup\limits_{d \in D} C_d$.

Будем также считать, что лицо, принимающее решение, имеет на множестве последствий C свое личное отношение предпочтений (ОП) $\{\geq\}$, а на множестве решений D ему необходимо построить ОП $\{\succsim\}$, по которому будет пытаться определить наилучшее (оптимальное) решение. Для простоты будем рассматривать лишь класс линейных упорядочений (множество последствий C факторизовано относительно эквивалентности, т.е. $c_1 = c_2 \Leftrightarrow c_1$ совпадает с c_2).

Определение 1. Будем считать, что решение d_1 доминирует над d_2 относительно $(C, \geq)$, если $C_{d_1} > C_{d_2}$, т.е. $c_1 \geq c_2$ $\forall c_1 \in C_{d_1}$, $\forall c_2 \in C_{d_2}$, $\mathrm{Card}(C_{d_1} \cap C_{d_2}) \leq 1$, $C_{d_1} \neq C_{d_2}$. Тогда процедуру формирования отношения предпочтений на заданном множестве решений D при условиях

1) $C_{d_1} > C_{d_2} \Rightarrow d_1 \quad d_2 \;\; \forall d_1, d_2 \in D$;

2) $C_{d_1} = C_{d_2}$, $\mathrm{Card}\, C_{d_1} = 1 \Rightarrow d_1 \approx d_2 \;\; \forall d_1, d_2 \in D$

будем кратко называть проектированием.

Определение 2. Под задачей принятия решения (кратко задачей решения (ЗР)) будем понимать проектирование отношения предпочтений $(C, \geq)$ на решения D, когда одно и то же предпочтение на последствиях может проектироваться в несколько отношений предпочтений на решениях, т.е. когда проектирование неоднозначно.

Уточним эти понятия, используя модель СР при так называемой полной неопределенности. Такую модель назовем схемой СР [2].

Определение 3. Лотерейной схемой $Z_л$ СР будем называть тройку

$$Z_л = (D, C, a(\cdot)), \tag{1}$$

где D — пространство возможных решений, C — пространство всех возможных последствий, $a(\cdot)$ — многозначное отображение пространства решений D в пространство последствий C (т.е. $a: D \to 2^C$), принадлежащее некоторому классу $K \subset (2^C)^D$. Этот класс уточним ниже.

Очевидно, что необходимым условием существования неопределенности является неоднозначность последствий для какой-то альтернативы, т.е. $K \neq (2^C)^D$. Однако ясно, что это условие не является достаточным, т.е. $K \neq (2^C)^D \setminus C^D$. Чтобы определить класс K, докажем следующую лемму.

Лемма 1. Отображение $a(\cdot) \in K$ для (1) тогда и только тогда, когда найдутся такие отношения предпочтений на последствиях $(C, \geq)$, разные решения $d_1, d_2 \in D$ и последствия $c_1, c_2 \in a(d_1)$, $c_3, c_4 \in a(d_2)$, что $c_1 < c_3$, $c_2 > c_4$.

Доказательство. Необходимость. В качестве $(C, \geq)$ возьмем некоторое отношение предпочтений на последствиях, в котором по условию возможны разные проекции на множестве решений D.

Допустим обратное, когда $\forall d_1, d_2 \in D$, $d_1 \neq d_2$, выполняется условие: или $a(d_1) < a(d_2)$, $\mathrm{Card}(a(d_1) \cap a(d_2)) \leq 1$, или $a(d_1) > a(d_2)$, $\mathrm{Card}(a(d_1) \cap \cap a(d_2)) \leq 1$, или $a(d_1) = a(d_2)$, $\mathrm{Card}(a(d_1)) = 1$. Тогда для $(C, \geq)$ согласно условиям 1, 2 определения 1 существует единственное ОП $(D, \lceil)$, а именно $d_1 \lceil d_2 \Leftrightarrow a(d_1) \geq a(d_2)$ $\forall d_1, d_2 \in D$. Это противоречит неоднозначности выбора отношения предпочтений на альтернативах.

Достаточность. Рассмотрим отношение предпочтений $(\geq)$ на последствиях C согласно условию леммы 1. Тогда существуют такие $d', d'' \in D$, $d' \neq d''$, $c_1, c_2 \in a(d')$, $c_3, c_4 \in a(d'')$, что $c_1 < c_3$, $c_2 > c_4$. Пусть $(D, \succsim')$ — некоторое отношение предпочтений на альтернативах ЛПР (задано, например, лексикографично относительно $(C, \geq)$). Тогда в качестве другого отношения предпочтений на альтернативах возьмем $(D, \lceil'')$ такое, что

$$d_1 \succsim'' d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} d_1 \succsim d_2, \\ d_1 \cup' d_2, \;\; d_1 \not\succsim \; d_2 \,. \end{cases}$$

Лемма 2. Необходимые и достаточные условия в лемме 1 равносильны тому, что существую разные решения $d_1, d_2 \in D$ и последствия $c_1, c_2 \in a(d_1)$, $c_3, c_4 \in (d_2)$ такие, что или $c_1 < c_3 < c_2$, или $c_1 = c_3$, $c_2 = c_4$, $c_1 \neq c_2$.

Доказательство. Необходимость. Пусть для $d_1, d_2, c_1, c_2, c_3, c_4$ выполняются условия леммы 1, тогда не уменьшая общности можно считать, что $c_1 \leq c_2$. Если $c_1 = c_2$, то при $c_1' = c_4$, $c_3' = c_4' = c_1$, $c_2' = c_3$ для c_1', c_2', c_3', c_4' получаем первое условие леммы 2. Если $c_1 < c_2$, то при $c_3 > c_2$ для $c_1' = c_4$, $c_2' = c_3$, $c_3' = c_2$, $c_4' = c_1$ снова получаем первое условие леммы 2.

Аналогичные рассуждения для $c_3 < c_2$. Если $c_3 = c_2$ и $c_1 = c_4$, то имеем при $c_1' = c_1, c_2' = c_2, c_3' = c_3, c_4' = c_4$ второе условие леммы 2. И, наконец, если $c_1 \neq c_4$ (пусть, например, $c_4 > c_1$), то при $c_1' = c_1$, $c_2' = c_2$, $c_3' = c_4$, $c_4' = c_3$ имеем второе условие леммы 2.

Достаточность. Пусть для $d_1, d_2, c_1, c_2, c_3, c_4$ используются условия леммы 2. Тогда при $c_1 < c_3 < c_2$ для $c_1' = c_1, c_2' = c_2, c_3' = c_4' = c_3$ выполняется условие леммы 1. Если $c_1 = c_3 > c_2 = c_4$, то для $c_1' = c_2$, $c_2' = c_1, c_3' = c_3, c_4' = c_4$ выполняется условие леммы 1.

Из этих лемм непосредственно следует теорема 1.

Теорема 1. Схема $Z_л$ порождает ЗР тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие: отображение $a(\cdot)$ таково, что в нем существуют разные $d_1, d_2 \in \mathrm{Dom}\, a$ и разные c_1, c_2, для которых или $a(d_1) = a(d_2) = \{c_1, c_2\}$, или существует еще c_3, не совпадающее с c_1 и c_2 и такие, что $c_1, c_2 \in a(d_1)$, а $c_3 \in a(d_2)$.

Определение 4. Матричной схемой $Z_м$ СР будем называть четверку

$$Z_м = (\Omega, D, C, g(\cdot,\cdot)), \tag{2}$$

где D и C — пространства решений и последствий соответственно; Ω — параметрическое пространство (пространство неизвестного параметра); $g(\cdot,\cdot)$ — некоторая функция $g : \Omega \times U \to C$, т.е. $g(\omega, d) \in C \ \ \forall \omega \in \Omega, \ \forall d \in D$ (в [1] пространство последствий называется пространством доходов).

Очевидно, что матричная схема $Z_м$ является естественной для моделирования параметрической ситуации, а лотерейная схема $Z_л$ — для непараметрической ситуации. Однако если до принятия решения на основании проведенного эксперимента получена дополнительная информация о ситуации, то связанные с этим формулы пересчета для лотерейной модели оказываются намного сложнее, чем соответствующие формулы для матричной модели [2]. Возможно, именно поэтому в большинстве известных исследований ЗПР используются матричные схемы СР [5, 6]. Обоснованием этого может служить то, что лотерейная и матричная схемы в некотором смысле эквивалентны.

Для доказательства этого факта перейдем от матричной схемы СР $Z_м$ к лотерейной $Z_л$ этой же ситуации. Многозначное отображение a выберем так [4], что

$$a(d) = \{g(\omega, d) : \omega \in \Omega\} \ \ \forall d \in D. \tag{3}$$

Такую операцию назовем операцией сжатия и обозначим ν:

$$\nu : \mathbf{Z}_м = \{Z_м(\Omega, D, C, g(\cdot,\cdot))\} \to \mathbf{Z}_л = \{Z_л(D, C, a(\cdot))\},$$

где $\mathbf{Z}_м$ и $\mathbf{Z}_л$ — классы всех матричных и всех лотерейных схем соответственно. Оказывается, операция сжатия ν является сюръекцией $Z_м$ в $Z_л$. Для доказательства этого утверждения выполним обратный переход — от лотерейной схемы ситуации $Z_л$ к матричной $Z_м$ таким образом, чтобы результат сжатия совпадал с $Z_л$. Для этого параметрическое пространство Ω выберем в виде [3, 4]

$$\Omega = \{\omega \in C^D : \omega(d) \in a(d) \ \ \forall d \in D\}, \tag{4}$$

а функцию g определим как $g(\omega, d) = \omega(d) \, \forall \omega \in \Omega, \ \forall d \in D$. Такое отображение $Z_л$ в $Z_м$ обозначим τ. Тогда с учетом (3) имеем

$$\nu[\tau(Z_л)] = \nu[\tau(D, C, a(\cdot))] = \nu(\{\omega \in C^D : \omega(d) \in a(d) \ \ \forall d \in D\},$$

$$D, C, (g(\cdot,\cdot) : g(\omega, d) = \omega(d) \, \forall \omega \in \Omega, \ \forall d \in D)) =$$

$$= (D, C, \{\omega(d) : \omega \in \Omega\}) = (D, C, \ a(\cdot)) = Z_{\text{л}} \ \ \forall \ Z_{\text{л}} \in \mathbf{Z}_{\text{л}}.$$

Полученый результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 2. Класс ситуаций решений, которые имеют схематичное представление в матричном виде (2), совпадает с классом ситуаций решений, которые имеют схематическое представление в лотерейном виде (1), т.е. $\mathbf{Z}_{\text{м}} = \mathbf{Z}_{\text{л}}$.

Чтобы отличать матричные схемы СР, введем обозначения: $Z_{\text{см}}$ — субъективная матричная схема ситуации, построение которой требует искусственного (субъективного) введения пространства неизвестного параметра Θ; $Z_{\text{ом}}$ — объективная матричная схема ситуации, в которой это пространство уже присутствует объективно. Тогда для отображения τ из теоремы 2 имеем $\tau(Z_{\text{л}}) = Z_{\text{см}}$.

Наконец, из теорем 1 и 2 непосредственно следует критерий существования ЗР в терминах матричной схемы.

Теорема 3. Схема $Z_{\text{м}}$ порождает ЗР тогда и только тогда, когда функция $g(\cdot, \cdot)$ такова, что существуют разные $d_1, d_2 \in D$, для которых или $g(\Theta, d_1) = (\Theta, d_2)$ и $\mathrm{Card}(g(\Theta, d_1)) = 2$, или найдутся $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \Theta$ такие, что $g(\theta_1, d_1) \neq g(\theta_2, d_1) \neq g(\theta_3, d_2)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Де Грот М. Оптимальные статистические решения. — М.: Мир, 1974. — 491 с.
2. Иваненко В.И., Лабковский В.А. Проблема неопределенности в задачах принятия решений. — Киев: Наук. думка, 1990. — 135 с.
3. Ivanenko V., Munier B. Decision making in random in a broad sense environments. Kluwer AP // Theory and Decision. — 2000. — **49**. — P. 127–150.
4. Ivanenko V., Labkobskii V. Experiment in the general decision problem // Theory and Decision. — 2005. — **57**. — P. 309–330.
5. Льюс Р.Д., Райфа Х. Игры и решения. — М.: ИЛ, 1961. — 642 с.
6. Фишберн П. Теория полезности для принятия решений. — М.: Наука, 1978. — 352 с.

Поступила 23.05.2007