УДК 519.21

В.С. КИРИЛЮК

ПОЛИЭДРАЛЬНЫЕ КОГЕРЕНТНЫЕ МЕРЫ РИСКА И ОПТИМИЗАЦИЯ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ[1]

Ключевые слова: *полиэдральная когерентная мера риска, conditional value-at-risk, проблема оптимизации портфеля, техника линейного программирования, катастрофические наводнения.*

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе продолжается изучение класса полиэдральных когерентных мер риска (ПКМР) [1–3] для задач оптимизации портфеля по соотношению доходность–риск. Понятие ПКМР [1] охватывает целый класс известных мер риска, а его использование в задачах оптимизации портфеля позволяет свести такие проблемы к соответствующим задачам линейного программирования (ЛП) [2]. В [3] понятие ПКМР и соответствующие задачи оптимизации портфеля несколько обобщались. Однако постановки задач, рассматриваемые в этих работах, предполагают знание распределений соответствующих случайных величин (сл.в.) (т.е. «условия риска» [4]). Так, для построения оптимального портфеля необходимо знать распределения всех его компонент. Если ограничиться дискретными конечно-распределенными сл.в. на некотором множестве сценариев, то это предполагает знание как значений этих величин для каждого из сценариев, так и всех сценарных вероятностей. Последние не всегда известны, особенно в случае так называемых редких событий. Например, как долго необходимо проводить наблюдения, чтобы утверждать, что некоторые события происходят с вероятностью раз в сто лет? Однако именно подобные события с малыми вероятностями и очень значительными последствиями необходимо учитывать в разнообразных задачах управления катастрофическими рисками. Такой, например, является задача распределения инвестиций в условиях рисков катастрофических наводнений.

При разработке сценариев будущих событий иногда легче описать значения соответствующих сл.в. для всех сценариев, чем точно оценить их вероятности. Для подобных событий оценка вероятности как устойчивой частоты не представляется возможной, а ее субъективное оценивание лицом, принимающим решение (ЛПР), может привести к неадекватным решениям. Но информации об изучаемом процессе бывает достаточно для оценивания вероятностей сценариев в виде некоторых ограничений (например, оценок сверху и снизу и прочих). В этом случае представляется естественным называть подобные постановки задач проблемами в условиях частичной неопределенности («в условиях неопределенности о распределениях сл.в. ничего не известно» [4]). Развитию аппарата ПКМР на задачи оптимизации портфеля в условиях частичной неопределенности и посвящена данная статья.

Отметим, что задачи с неполной информацией о распределениях сл.в. давно изучаются в стохастической оптимизации. Так, в [5, 6] решения ищутся на целом классе вероятностных мер в более общей ситуации. В настоящей работе мы ограничились простым случаем дискретных конечно-распределенных сл.в., когда неизвестными являются сценарные вероятности.

[1]Работа выполнена при поддержке Украинского научно-технологического центра, проект G3127.

© В.С. Кирилюк, 2008

1. НЕКОТОРЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРИМЕРЫ ПКМР

Пусть имеется некоторое множество n сценариев. В случае если каждому i сценарию $i=1,\ldots,n$ соответствует некоторая известная вероятность $p_i>0$, то имеется некоторый вектор вероятностей $p_0=(p_1^0,\ldots,p_n^0)$, $p_i^0>0$, $i=1,\ldots,n$, $\sum_1^n p_i^0=1$, а сл.в. X характеризуется ее распределением $x=(x_1,\ldots,x_n)\in R^n$ и, следовательно, она идентифицируется с этим n-мерным вектором.

Отметим, что в процессе развития теории принятия решений и соответствующих приложений для оценивания риска изучались и использовались различные функции (так называемые меры риска), например, в [7–14].

В [13] предложено понятие когерентной меры риска (КМР), которая имеет вид

$$\rho(x)=\sup\{E_p[-X]/\ p\in P\},\tag{1}$$

где P — некоторое выпуклое замкнутое множество вероятностных мер (вероятностей событий для дискретной конечно-распределенной сл.в.). Оно называлось множеством обобщенных вероятностей сценариев.

В [1] условие (1) дополнено условием полиэдральности множества P. Функция вида (1), для которой множество P представляется как выпуклая оболочка конечного числа точек, была названа ПКМР. Точнее, если множество P задано в виде

$$P=\mathrm{co}\{p_i: i=1,\ldots,k\}\tag{2}$$

или в эквивалентной форме

$$P=\{p: Bp\le c,\ p\ge 0\},\tag{3}$$

где B и c — матрица и вектор (соответствующих размерностей), то соотношения (1), (2) (или (3)) однозначно определяют некоторую ПКМР.

Замечание 1. Поскольку P — множество обобщенных сценарных вероятностей, то $P\subseteq S^n$ (единичный симплекс), а первые две строки матрицы B и компоненты вектора c содержат технические ограничения $\begin{pmatrix}1\ldots1\\-1\ldots-1\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ соответственно, означающие $\sum_{i=1}^{n} p_i=1.$

Пусть распределение $x=(x_1,\ldots,x_n)$ описывает доходность, полученную в результате реализации сценариев с соответствующими вероятностями $p_0=(p_1^0,\ldots,p_n^0)$. Напомним несколько примеров мер риска, известных в финансовых приложениях, которые попадают в класс ПКМР:

П1) WCR (Worst Case Risk) — случай наихудших потерь [14];

П2) CVaR_α (Conditional Value-at-Risk) — условное ожидание потерь на α-хвосте распределения [11];

П3) WCE_α (Worst Conditional Expectation) — наихудшее условное среднее [13];

П4) SCRM (Spectral Coherent Risk Measure) — спектральная когерентная мера риска [12];

П5) меры, построенные по полуотклонению от средней прибыльности: $\rho(x)=-E[x]+rE[(E[x]-x)^+]$ при $0\le r\le 1$ [10];

П6) меры, построенные по абсолютному отклонению от средней прибыльности: $\rho(x) = -E[x] + rE[|x - E[x]|]$ при $0 \le r \le 1/2$ [9].

Для представления соответствующей меры риска из (1) достаточно описать ее множество P. Например, для случаев WCR, CVaR_{α}, WCE_{α} и SCRM они имеют, соответственно, следующий вид:

$$P_{WCR} = \{p = (p_1, \ldots, p_n) : \textstyle\sum_1^n p_i = 1,\ p_i \ge 0,\ i = 1, \ldots, n\}. \tag{4}$$

$$P_{CVaR_{\alpha}} = \{p = (p_1, \ldots, p_n) : \textstyle\sum_1^n p_i = 1,\ p_i \le p_i^0 / \alpha,\ p_i \ge 0,\ i = 1, \ldots, n\}, \tag{5}$$

$$P_{WCE_{\alpha}} = \mathrm{co}\{(p_1, \ldots, p_n) /\ \text{для}$$

$$\textstyle\sum_1^m p_{i_j}^0 > \alpha,\ p_{i_j} = p_{i_j}^0 / \sum_1^m p_{i_j}^0,\ j \le m;\ p_{i_j} = 0,\ j > m\},$$

$$P_{SCRM} = \{p = (p_1, \ldots, p_n) : \textstyle\sum_1^n p_i = 1,\ p_i \le \left(\sum_1^m \lambda_j / \alpha_j \right) p_i^0,$$

$$p_i \ge 0,\ i = 1, \ldots, n\}, \tag{6}$$

где $p_0 = (p_1^0, \ldots, p_n^0)$ — вектор исходных вероятностей сценариев, $\sum_1^m \lambda_j = 1$, $\lambda_j \ge 0,\ i = 1, \ldots, m$. Подобное описание можно сделать и для оставшихся двух функций. Таким образом, эти множества P строятся как некоторое многозначное отображение (м.о.) от исходных вероятностей сценариев p_0:

$$P = a(p_0), \tag{7}$$

что может быть очевидным образом отражено в соотношениях (2) и (3).

Замечание 2. С точностью до знака «–» м.о. $a(p_0)$ — субдифференциал меры риска $\rho(\cdot)$, поэтому естественно назвать такое м.о. $a(\cdot)$ субдифференциальным для $\rho(\cdot)$.

Напомним также, что класс ПКМР не исчерпывается этими мерами риска, поскольку допускает ряд инвариантных операций: выпуклую комбинацию, функцию максимума, инфимальную конволюцию. Следовательно, он включает в себя и функции, построенные из функций П1–П6 с помощью таких операций.

Конструкция меры риска (1) означает, что ЛПР с учетом этой функции принимает решение по средним значениям сл.в. X, но при этом перестраховывается на наихудший случай из множества обобщенных вероятностей P. Для ПКМР это множество, как следует из (2), представляет собой конечный набор его крайних точек и всех их выпуклых комбинаций.

2. ПРОБЛЕМЫ ОПТИМИЗАЦИИ ПОРТФЕЛЯ

Отметим, что проблематика по оптимизации портфеля, начиная с [7], интенсивно развивалась в многочисленных работах, стимулируемых финансовыми приложениями. При этом в качестве одного из критериев использовалась средняя доходность, а в качестве другого — различные меры риска, см., например, [2–3, 7–14].

Пусть распределение доходностей всех возможных компонент портфеля z_j, $j = 1, \ldots, k$, представлено в виде матрицы H размерности $n \times k$, чей j-й столбец описывает распределение доходности j-й компоненты. Вектор $u = (u_1, \ldots, u_k)$, который описывает структуру портфеля, рассматривается как переменная, причем $\sum_1^k u_i = 1$, $u_i \ge 0,\ i = 1, \ldots, k$.

При известном векторе вероятностей сценариев $p_0 = (p_1^0, \dots, p_n^0)$ можно рассмотреть следующие две взаимосвязанные портфельные постановки задач.

Минимизация меры риска при гарантированной средней доходности. Зафиксируем нижнее допустимое значение средней доходности портфеля $E_p[Hu]$ некоторой величиной μ в виде ограничений и минимизируем его меру риска $\rho(Hu)$:

$$\min_{\substack{\sum_1^n u_i = 1,\, u_i \geq 0 \\ E_{p_0}[Hu] \geq \mu}} \rho(Hu). \tag{8}$$

Максимизация средней доходности при ограничениях на меры риска. Зафиксируем некоторый уровень меры риска портфеля $\rho(Hu)$ величиной ρ_0 в виде ограничений и максимизируем его среднюю доходность $E_p[Hu]$:

$$\max_{\substack{\sum_1^n u_i = 1,\, u_i \geq 0 \\ \rho(Hu) \leq \rho_0}} E_{p_0}[Hu]. \tag{9}$$

Кроме того, возможна также постановка, когда необходимо придерживаться ограничений, налагаемых на m различных мер риска $\rho_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, m$:

$$\max_{\substack{\sum u_j = 1,\, u \geq 0 \\ \rho_1(Hu) \leq \rho_1^0 \\ \dots\dots \\ \rho_m(Hu) \leq \rho_m^0}} E_{p_0}[Hu]. \tag{10}$$

Напомним, что если $\rho(\cdot)$ есть ПКМР, то эти задачи сведены к соответствующим проблемам ЛП [2]. Однако ситуация усложняется, когда вектор вероятностей сценариев не известен, а только оценивается некоторым полиэдральным множеством

$$p_0 \in P_0. \tag{11}$$

В такой ситуации, например, уже не вычисляется средняя доходность (только ее оценки).

Рассмотрим некоторый математический аппарат, пригодный для работы с портфельными постановками в условиях частичной неопределенности. Пусть имеются полиэдральное множество P_0, которое оценивает сценарные вероятности p_0, а также еще одно формальное полиэдральное множество Q из того же пространства, которое описывается в виде, подобном соотношениям (2) и (3):

$$P_0 = \mathrm{co}\{p_i^0 : i = 1, \dots, k_0\}, \text{ или } P_0 = \{p : B_0 p \leq c_0,\ p \geq 0\}, \tag{12}$$

$$Q = \mathrm{co}\{q_i : i = 1, \dots, l\}, \text{ или } Q = \{q : D_0 q \leq e_0,\ q \geq 0\}. \tag{13}$$

Построим по этим множествам соответственно нижние и верхние оценки средних значений сл.в. X:

$$LE_{P_0}(X) = \min\{E_p[X] / p \in P_0\},\ UE_Q(X) = \max\{E_q[X] / q \in Q\},$$

которые при $P_0 = Q$, очевидно, есть соответственно пессимистическая и оптимистическая оценки $E_p[X]$, т.е. величина $E_p[X]$ описывается интервалом $[LE_{P_0}(X), UE_{P_0}(X)]$. Введем следующие обозначения:

$$\rho(X) = -LE_{P_0}(X) = \max\{E_p[-X] / p \in P_0\}, \tag{14}$$

$$g(X) = UE_Q(X) = \max\{E_p[X] / p \in Q\}, \tag{15}$$

которые по аналогии со случаем известных распределений можно назвать функционалами риска и доходности соответственно и рассматривать как критерии для портфельных постановок.

Замечание 3. Понятно, что если наши знания о сценарных вероятностях ограничиваются соотношением (11), то в качестве Q в (13) также выбираем P_0. Однако введение формально другого множества Q позволяет охватить и иные постановки. Например, выбрав в качестве P_0 множество P из (1), а в качестве Q — одноточечное множество $\{p_0\}$, легко получить в качестве критериев меру риска $\rho(X)$ и среднюю доходность $E_{p_0}[X]$. Этим и обусловлены названия функций $\rho(\cdot)$ и $g(\cdot)$.

Тогда задачи оптимизации портфеля: минимизация функционала риска $\rho(\cdot)$ при гарантированных значениях функционала доходности $g(\cdot)$ и, наоборот, максимизация функционала доходности при ограничениях на функционал риска имеют соответственно вид

$$\min_{\substack{\sum u_i = 1,\, u \geq 0 \\ g(Hu) \geq g_0}} \rho(Hu), \tag{16}$$

$$\max_{\substack{\sum u_i = 1,\, u \geq 0 \\ \rho(Hu) \leq \rho_0}} g(Hu). \tag{17}$$

Замечание 4. Нетрудно видеть, что такие постановки означают максимизацию одного из концов интервала $[LE_{P_0}(X), UE_Q(X)]$ при ограничениях на значения второго конца.

Рассмотрим теперь задачу (16). Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Решением задачи оптимизации портфеля (16) есть компонента u решения (v, u) проблемы

$$\min_{1 \leq i \leq l} \{ \min_{\substack{(u,v) \\ \sum u_i = 1,\, u \geq 0,\, v \geq 0 \\ -B_0^T v - Hu \leq 0 \\ \langle Hu, q_i \rangle \geq g_0}} \langle c_0, v \rangle \} , \tag{18}$$

где q_i, $i = 1, \ldots, l$, — крайние точки множества Q из (13) и обозначениях

$$\min_{\substack{(u,v) \\ \sum u_i = 1,\, u \geq 0,\, v \geq 0 \\ -B_0^T v - Hu \leq 0 \\ \langle Hu, q_i \rangle \geq g_0}} \langle c_0, v \rangle = +\infty, \tag{19}$$

если допустимое множество подпроблемы пусто.

Доказательство. Рассмотрим задачу (16), расписав соответственно функции $\rho(\cdot)$ и $g(\cdot)$:

$$\min_{\substack{\sum u_i = 1,\, u \geq 0 \\ g(Hu) \geq g_0}} \rho(Hu) = \min_{\substack{\sum u_i = 1,\, u \geq 0 \\ g(Hu) \geq g_0}} \max_{\substack{B_0 p \leq c_0 \\ p \geq 0}} \langle -Hu, p \rangle =$$

$$= \min_{\substack{\sum u_i = 1,\, u \geq 0 \\ \max\{\langle Hu, q \rangle :\, q \in Q\} \geq g_0}} \max_{\substack{B_0 p \leq c_0 \\ p \geq 0}} \langle -Hu, p \rangle.$$

Заменяя внутреннюю подзадачу ЛП полученного выражения ее двойственной и учитывая представление множества $Q = \mathrm{co}\{q_i : i = 1, \ldots, l\}$ из (13), имеем

$$\min_{\substack{\sum u_i = 1,\, u \geq 0 \\ \max\limits_{q \in \mathrm{co}\{q_i,\, i=1,\ldots,l\}} \langle Hu, q \rangle \geq g_0}} \min_{\substack{-B_0^T v - Hu \leq 0 \\ v \geq 0}} \langle c_0, v \rangle = \min_{\substack{\sum u_i = 1,\, u \geq 0,\, v \geq 0 \\ -B_0^T v - Hu \leq 0 \\ \max\limits_{q \in \mathrm{co}\{q_i,\, i=1,\ldots,l\}} \langle Hu, q \rangle \geq g_0}} \langle c_0, v \rangle.$$

Рассмотрим теперь допустимое множество полученной проблемы:

$$M = \leq \{(u, v): \sum u_i = 1, u \geq 0, v \geq 0,$$

$$-B_0^T v - Hu \leq 0, \max_{q \in \mathrm{co}\{q_i, i=1,\dots,l\}} < Hu, q > \geq g_0 \}.$$

Поскольку функция $< Hu, q >$ линейна по q, то

$$\max_{q \in \mathrm{co}\{q_i, i=1,\dots,l\}} < Hu, q > \geq g_0 \Leftrightarrow \max_{i=1,\dots,l} < Hu, q_i > \geq g_0 .$$

Следовательно, множество M представимо в виде

$$M = \bigcup_{i=1}^{l} M_i ,$$

где $M_i = \{(u, v): \sum u_i = 1, u \geq 0, v \geq 0, -B_0^T v - Hu \leq 0, < Hu, q_i > \geq g_0 \}$, причем некоторые из M_i могут быть пустыми. Это означает, что

$$\min_{\substack{\sum u_i = 1,\, u \geq 0,\, v \geq 0 \\ -B_0^T v - Hu \leq 0 \\ \max\limits_{q \in \mathrm{co}\{q_i,\, i=1,\dots,l\}} <Hu, q> \geq g_0}} < c_0, v > = \min_{1 \leq i \leq l} \min_{\substack{\sum u_i = 1,\, u \geq 0,\, v \geq 0 \\ -B_0^T v - Hu \leq 0 \\ <Hu, q_i> \geq g_0}} < c_0, v >$$

при обозначениях (19), а следовательно, и доказывает теорему.

Следствие 1. При условиях $P_0 = P, Q = \{p_0\}$ теорема 1 описывает задачу минимизации ПКМР портфеля (8), которая сводится к следующей проблеме ЛП [2]:

$$\min_{(u,v) \atop {\sum u_i = 1,\, u \geq 0, v \geq 0 \atop {-B^T v - Hu \leq 0 \atop < Hu, p_0 > \geq \mu}}} < c, v >.$$

Обратимся теперь к задаче (17). Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Решением задачи оптимизации портфеля (17) есть компонента u решения (v, u) проблемы

$$\max_{1 \leq j \leq l} \{ \max_{(u,v) \atop {\sum u_i = 1,\, u \geq 0,\, v \geq 0 \atop {-B_0^T v - Hu \leq 0 \atop < c_0, v > \leq \rho_0}}} < Hu, q_j > \}, \tag{20}$$

где $q_j, j = 1, \dots, l,$ — крайние точки множества Q из (13).

Доказательство. Обратимся к задаче (17). Расписав соответственно функции $\rho(\cdot)$ и $g(\cdot)$ и множество Q в виде (13), получим

$$\max_{\substack{\sum u_i = 1,\, u \geq 0 \\ \rho(Hu) \leq \rho_0}} g(Hu) = \max_{\substack{\sum u_i = 1,\, u \geq 0 \\ \max\limits_{B_0 p \leq c_0,\, p \geq 0} <-Hu, p> \leq \rho_0}} \max_{q \in \mathrm{co}\{q_i,\, i=1,\dots,l\}} < Hu, q > =$$

Заменяя задачу ЛП $\max\limits_{B_0 p \leq c_0,\, p \geq 0} < -Hu, p > \leq \rho_0$ в первой подзадаче ее двойственной $\min\limits_{\substack{-B_0^T v - Hu \leq 0 \\ v \geq 0}} < c_0, v > \leq \rho_0$, получаем

$$= \max_{\substack{\sum u_i = 1,\, u \geq 0 \\ \min\limits_{\substack{-B_0^T v - Hu \leq 0 \\ v \geq 0}} <c_0, v> \leq \rho_0}} \max_{q \in \mathrm{co}\{q_i,\, i=1,\dots,l\}} < Hu, q > =$$

$$= \max_{\substack{\sum u_i = 1,\, u \ge 0,\, v \ge 0 \\ -B_0^T v - Hu \le 0 \\ < c_0, v > \le \rho_0}} \ \max_{q \in \mathrm{co}\{q_i,\, i=1,\dots,l\}} < Hu, q >.$$

Как нетрудно видеть, последнее равенство имеет место в силу того, что

$$\min_{\substack{-B_0^T v - Hu \le 0 \\ v \ge 0}} < c_0, v > \ \le \rho_0 \Leftrightarrow \exists\, v : v \ge 0, -B_0^T v - Hu \le 0, < c_0, v > \ \le \rho_0 .$$

Поэтому такие v можно явным образом указать в допустимом множестве. Поскольку функция $< Hu, q >$ линейна по q, то

$$\max_{q \in \mathrm{co}\{q_i, i=1,\dots,l\}} < Hu, q > = \max_{i=1,\dots,l} < Hu, q_i >,$$

поэтому, продолжая цепочку равенств, получаем

$$\max_{\substack{\sum u_i = 1,\, u \ge 0 \\ \min\limits_{\substack{-B_0^T v - Hu \le 0 \\ v \ge 0}} <c_0, v> \le \rho_0}} \ \max_{q \in \mathrm{co}\{q_i,\, i=1,\dots,l\}} < Hu, q > \ = \max_{i=1,\dots,l} \ \max_{\substack{\sum u_i = 1,\, u \ge 0,\, v \ge 0 \\ -B_0^T v - Hu \le 0 \\ < c_0, v > \le \rho_0}} < Hu, q_i >.$$

Это и доказывает теорему.

Следствие 2. При условиях $P_0 = P, Q = \{p_0\}$ теорема 2 описывает задачу максимизации средней доходности портфеля (9), которая сводится к следующей проблеме ЛП [2]:

$$\max_{\substack{(u,v) \\ \sum u_i = 1,\, u \ge 0,\, v \ge 0 \\ -B^T v - Hu \le 0 \\ < c, v > \le \rho_0}} < Hu, p_0 >.$$

Допустим теперь, что у нас имеется некоторый набор полиэдральных множеств $P_j,\ j = 1,\dots, m,$

$$P_j = \mathrm{co}\{p_{ji} : i = 1,\dots, k_j\} \text{ или } P_j = \{p : B_j\ p \le c_j,\ p \ge 0\}, \qquad (21)$$

которые посредством соотношения (1) задают m функционалов риска $\rho_i(\cdot),\ i = 1,\dots, m.$ Тогда аналогично задаче (18) сформулируем задачу максимизации функционала доходности при ограничениях на эти функционалы риска:

$$\max_{\substack{\sum u_j = 1,\, u \ge 0 \\ \rho_1(Hu) \le \rho_1^0 \\ \cdots\cdots \\ \rho_m(Hu) \le \rho_m^0}} g(Hu). \qquad (22)$$

Теорема 3. Решением задачи оптимизации портфеля (22) есть компонента u решения $(u, v_1, \dots, v_m)$ проблемы

$$\max_{1 \le j \le l} \{ \max_{\substack{(u, v_1, \dots, v_m) \\ \sum u_i = 1,\, u \ge 0 \\ -B_1^T v_1 - Hu \le 0 \\ <c_1, v_1> \le \rho_1^0 \\ \cdots\cdots \\ -B_m^T v_m - Hu \le 0 \\ <c_m, v_m> \le \rho_m^0 \\ v_1 \ge 0, \dots, v_m \ge 0}} < u, H^T q_j > \}, \qquad (23)$$

где $q_j, 1 \le j \le l,$ — крайние точки множества Q из (13).

Доказательство можно провести аналогично доказательству теоремы 2. Единственное отличие состоит в том, что переход к двойственной проблеме осуществляется не для одной задачи ЛП, а для m следующих задач: $\max\limits_{B_i p \le c_i,\, p \ge 0} < -Hu,\, p > \;\le \rho_i^0$, $i = 1, \ldots, m$. Это, собственно, и приводит к увеличению размерности задачи до $(u, v_1, \ldots, v_m)$ соответственно.

Следствие 3. При условиях $Q = \{p_0\}$ теорема 3 описывает задачу максимизации средней доходности портфеля (10), которая сводится к следующей проблеме ЛП [2]:

$$\max_{\substack{(u, v_1, \ldots, v_m) \\ \sum u_i = 1,\, u \ge 0, \\ -B_1^T v_1 - Hu \le 0 \\ < c_1, v_1 > \le \rho_1^0 \\ \cdots\cdots \\ -B_m^T v_m - Hu \le 0 \\ < c_m, v_m > \le \rho_m^0 \\ v_1 \ge 0, \ldots, v_m \ge 0}} < u, H^T p_0 >. \tag{24}$$

3. ПКМР В УСЛОВИЯХ ЧАСТИЧНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Рассмотренные выше меры риска $\rho_i(\cdot) = \sup\{E_p[-X]\,/\; p \in P_i\}$, $i = 1, \ldots, m$, в условиях частичной неопределенности $p_0 \in P_0$ носят формальный характер до тех пор, пока не будет указан явный путь их построения (по множеству P_0).

Обратимся теперь к соотношению (7), в котором множество P для построения мер риска $\rho(\cdot)$ в виде (1) представлялось некоторым м.о. $a(\cdot)$ от вектора сценарных вероятностей p_0. Учитывая замечание 2, в дальнейшем будем называть такое $a(\cdot)$ субдифференциальным м.о. для меры риска $\rho(\cdot)$. Исходя из интерпретации меры риска $\rho(\cdot)$, которая позволяла перестраховываться на случай наихудших средних сл.в. X по образу субдифференциального отображения $a(\cdot)$ в векторе сценарных вероятностей p_0, введем следующее определение.

Пусть имеется некоторая КМР, заданная при известном векторе сценарных вероятностей p_0 в виде $\rho(x) = \sup\{E_p[-X]\,/\; p \in a(p_0)\}$.

Определение 1.Мерой риска, индуцированной исходной КМР и множеством неопределенности P_0, назовем функцию

$$\rho(x; P_0) = \sup\{E_p[-X]\,/\; p \in P(P_0)\}, \tag{25}$$

где

$$P(P_0) = \overline{\mathrm{co}}(a(P_0)), \text{ а } a(P_0) = \bigcup_{p_0 \in P_0} a(p_0). \tag{26}$$

Здесь co — выпуклая оболочка, $\overline{M}$ — замыкание множества M. По построению $\rho(x; P_0)$, очевидно, является некоторой КМР.

Напомним некоторые факты из выпуклого анализа и аппарата м.о. М.о. $a(\cdot)$ называется выпуклым в области определения $\mathrm{dom}a$, если

$$a(\lambda p_1 + (1-\lambda) p_2) \supseteq \lambda a(p_1) + (1-\lambda) a(p_2) \;\forall p_1,\, p_2 \in \mathrm{dom}a \;\forall \lambda \in (0, 1).$$

Утверждение 1. Если P_0 — выпуклое множество, а субдифференциальное м.о. $a(\cdot)$ исходной меры $\rho(\cdot)$ — выпуклое м.о., то множество из (26) имеет вид

$$P(P_0) = \overline{a(P_0)}. \tag{27}$$

Доказательство элементарно следует из того факта, что при условиях утверждения множество $a(P_0)$ выпуклое.

Определение 2. Будем говорить, что м.о. $a(\cdot)$ квазилинейное в области определения $\mathrm{dom}a$, если

$$a(\lambda p_1 + (1-\lambda) p_2) = \lambda a(p_1) + (1-\lambda) a(p_2) \;\forall p_1,\, p_2 \in \mathrm{dom}a \;\forall \lambda \in (0, 1). \tag{28}$$

Утверждение 2. Субдифференциальные м.о. для мер риска WCR, CVaR_α и SCRM квазилинейны.

Доказательство. Очевидно, что для WCR с постоянным субдифференциальным м.о. это выполняется. Что касается CVaR_α и SCRM, то, как нетрудно видеть из соотношений (5), (6), м.о. $a(\cdot)$ для них имеет структуру

$$a(p_0)=\{Bp\le c(p_0),\ p\ge 0\},$$

где $B=\begin{pmatrix}B_1\\ I\end{pmatrix}$, $c(p_0)=\begin{pmatrix}c_1\\ c_2(p_0)\end{pmatrix}$, причем $B_1=\begin{pmatrix}1\ldots\ldots1\\ -1\ldots-1\end{pmatrix}$, $c_1=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$ отражают технические ограничения, а I — единичная матрица. Здесь матрица B не зависит от вектора сценарных вероятностей p_0, а вектор $c_2(p_0)$ зависит линейно.

Понятно, что в таком случае м.о. $a(\cdot)$ с многогранными образами формируется параллельными переносами (в зависимости от p_0) соответствующих гиперплоскостей, образованных нетехническими ограничениями. Такая простая структура м.о. $a(\cdot)$ гарантирует на симплексе S^n выполнение равенства (28), следовательно, утверждение имеет место.

Из свойств квазилинейности м.о. $a(\cdot)$ меры риска, как нетрудно видеть, сразу следует такое утверждение.

Утверждение 3. Если P_0 — полиэдральное множество, т.е. представимо в виде (12), а субдифференциальное м.о. $a(\cdot)$ исходной меры $\rho(\cdot)$ — квазилинейное м.о., то множество из (26) имеет вид

$$P(P_0)=\mathrm{co}\{a(p_i^0),\ i=1,\ldots,k_0\}. \tag{29}$$

Следствие 4. Если в условиях утверждения 3 исходная мера риска является ПКМР, т.е. ее субдифференциальное м.о. имеет многогранные образы в крайних точках P_0:

$$a(p_i^0)=\mathrm{co}\{p_j(p_i^0),\ j=1,\ldots,m(p_i^0)\},\ i=1,\ldots,k_0,$$

то множество из (26) имеет вид

$$P(P_0)=\mathrm{co}\{p_j(p_i^0),\ j=1,\ldots,m(p_i^0),\ i=1,\ldots,k_0\}. \tag{30}$$

Следствие 5. Для ПКМР с квазилинейным субдифференциальным м.о. $a(\cdot)$ операция композиции инвариантна на классе

$$\rho(\cdot)\equiv\rho_1\circ\rho_2(\cdot)\Leftrightarrow\rho(x)=\sup\{E_p[-X]: p\in a_1(a_2(p_0))\}.$$

Следствие 6. Следствия 4 и 5 имеют место для WCR, CVaR_α и SCRM.

Обратимся теперь к задачам оптимизации портфеля в условиях частичной неопределенности. Пусть задано множество P_0 в виде (12), некоторая ПКМР $\rho(\cdot)$ с квазилинейным субдифференциальным м.о. $a(\cdot)$.

Поскольку множество $P(P_0)$, как следует из (30), полиэдрально, рассмотрим его эквивалентную форму в виде неравенств

$$P(P_0)=\ \le\{B_{P_0}p\le c_{P_0},\ p\ge 0\}. \tag{31}$$

Обратимся к задачам оптимизации портфеля в условиях частичной неопределенности, т.е. по функционалам доходности и риска $g(\cdot)$ и $\rho(\cdot;P_0)$, где $g(\cdot)$ задан соотношением (16) при $Q=P_0$ а $\rho(\cdot;P_0)$ — мера риска, индуцированная некоторой исходной ПКМР $\rho(\cdot)$ и множеством неопределенности P_0, описанная соотношениями (25), (31), т.е.

$$\min_{\substack{\sum u_i=1,\ u\ge 0\\ g(Hu)\ge g_0}}\rho(Hu;P_0), \tag{32}$$

$$\max_{\substack{\sum u_i = 1,\, u \ge 0 \\ \rho(Hu;\, P_0) \le \rho_0}} g(Hu). \tag{33}$$

Тогда, используя теоремы 1 и 2 с простой заменой формальных множеств P_0 на $P(P_0)$ и Q на P_0, нетрудно извлечь следующие утверждения.

Следствие 7. Решением задачи оптимизации портфеля (32) есть компонента u решения (v, u) проблемы

$$\min_{1 \le i \le k_0} \{ \min_{\substack{(u, v) \\ \sum u_i = 1,\, u \ge 0,\, v \ge 0 \\ -B_{P_0}^T v - Hu \le 0 \\ \langle Hu,\, p_i^0 \rangle \ge g_0}} \langle c_{P_0}, v \rangle \},$$

где p_i^0, $i = 1, \ldots, k_0$ — крайние точки множества P_0 из (12) и обозначениях

$$\min_{\substack{(u, v) \\ \sum u_i = 1,\, u \ge 0,\, v \ge 0 \\ -B_{P_0}^T v - Hu \le 0 \\ \langle Hu,\, p_i^0 \rangle \ge g_0}} \langle c_{P_0}, v \rangle = +\infty,$$

если допустимое множество подпроблемы пусто.

Следствие 8. Решением задачи оптимизации портфеля (33) есть компонента u решения (v, u) проблемы

$$\max_{1 \le j \le k_0} \{ \max_{\substack{(u, v) \\ \sum u_i = 1,\, u \ge 0,\, v \ge 0 \\ -B_{P_0}^T v - Hu \le 0 \\ \langle c_{P_0}, v \rangle \le \rho_0}} \langle Hu,\, p_j^0 \rangle \},$$

где p_j^0, $j = 1, \ldots, k_0$, — крайние точки множества P_0 из (12).

Если имеется m ПКМР $\rho_i(\cdot)$, $i = 1, \ldots, m$, с квазилинейными субдифференциальными м.о., которые задают соответствующие индуцированные меры риска $\rho_i(\cdot; P_0)$, $i = 1, \ldots, m$, то нетрудно изучить проблему максимизации функционала доходности $g(\cdot)$ при ограничениях на $\rho_i(\cdot; P_0)$, $i = 1, \ldots, m$,

$$\max_{\substack{\sum u_i = 1,\, u \ge 0 \\ \rho_j(Hu;\, P_0) \le \rho_j^0,\, j = 1, \ldots, m}} g(Hu). \tag{34}$$

Обозначим множества $P_i(P_0)$ соответствующих индуцированных мер как $P_i(P_0) = \{B_{P_0}^i p \le c_{P_0}^i,\ p \ge 0\}$, $i = 1, \ldots, m$. Заменив формальные множества P_i на $P_i(P_0)$, $i = 1, \ldots, m$, и Q — на P_0, непосредственно из теоремы 3 получим такое утверждение.

Следствие 9. Решением задачи оптимизации портфеля (34) есть компонента u решения $(u, v_1, \ldots, v_m)$ проблемы

$$\max_{1 \le j \le k_0} \{ \max_{\substack{(u, v_1, \ldots, v_m) \\ \sum u_i = 1,\, u \ge 0 \\ -(B_{P_0}^1)^T v_1 - Hu \le 0 \\ \langle c_{P_0}^1, v_1 \rangle \le \rho_1^0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ -(B_{P_0}^m)^T v_m - Hu \le 0 \\ \langle c_{P_0}^m, v_m \rangle \le \rho_m^0 \\ v_1 \ge 0, \ldots, v_m \ge 0}} \langle u, H^T p_j^0 \rangle \},$$

где $p_j^0, j=1,\ldots,k_0$, — крайние точки множества P_0 из (12).

Замечание 5. Если множество P_0 имеет простую структуру в виде неравенств сверху и снизу, то при использовании исходных мер WCR, CVaR_α и SCRM нетрудно перейти от описания множества $P(P_0)$ в форме (30) к виду (31). В общем случае это не так.

4. НЕПРЕРЫВНЫЕ ПРОБЛЕМЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИЙ ПРИ РИСКЕ КАТАСТРОФИЧЕСКИХ НАВОДНЕНИЙ

Рассмотрим теперь использование описанной математической техники для поиска оптимальных инвестиционных решений по соотношению доходность–риск в условиях возможных катастрофических наводнений. Отметим методологию управлениями катастрофическими рисками, развитую в IIASA, например, в [15–18], которая состоит в использовании техники стохастического программирования для моделирования и поиска решений. Также выделим работу [19], содержащую набор важных прикладных задач для принятия эффективных инвестиционных решений в условиях рисков катастрофических наводнений.

Пусть имеем набор базовых сценариев S, которые являются входами в моделирующую систему возникновения наводнений и их распространения в форме соответствующих затоплений, с некоторыми вероятностями p_0. Для таких сценариев в некоторых регионах речных бассейнов могут использоваться исторические данные по наводнениям или набор сценариев природных явлений и событий, являющихся причинами наводнений с последующим моделированием на соответствующих системах и региональных моделях.

Рассмотрим следующую проблему оптимального распределения инвестиций. Пусть имеется некоторое число инвестиционных объектов, не только с разной доходностью, но и с разными уровнями ущербов от наводнений, причем их доходности, как и ущербы, существенно зависят от расположения этих объектов в регионе. Например, близость объектов к воде увеличивает как их привлекательность (соответственно, доходность), так и потенциальные ущербы от наводнений. Какие объекты нужно выбрать и как их расположить в регионе, подверженном риску наводнений, чтобы общий инвестиционный портфель был оптимальным по соотношению доходность–риск?

Чтобы свести эту проблему к описанным ранее постановкам, рассмотрим в качестве компонентов портфеля не только типы объектов инвестирования, но и их географическое расположение (районирование). По всему набору сценариев регион разбивается на клетки (географической карты), и множество всех потенциальных инвестиционных объектов (например, k), расположенных в каждой из возможных клеток (например, m), рассматривается как компоненты портфеля ($k \times m$-компонент).

Теперь для каждой из компонент портфеля $i \in 1,\ldots,k \times m$ для каждого из сценариев $j \in 1,\ldots,s$ опишем ее доходность r_{ij} как долю инвестиционной стоимости. Для определения потенциального ущерба от наводнений d_{ij} необходимо в соответствии со сценарием j промоделировать зону затопления (с глубиной и продолжительностью затопления), а затем с учетом характеристик объекта i (его классификации $1,\ldots,k$) и расположения $(1,\ldots,m)$ оценить уровень ущерба d_{ij} от наводнения как долю стоимости объекта i.

Для оценки вероятностного распределения ущерба и оценки эффективности мер по уменьшению последствий наводнений существуют специальные компьютерные системы, например HEC–FDA [20], MIKE 11 GIS–FAT [21]. Так HEC–FDA обеспечивает возможность интегрированного вероятностного гидрологического и экономического анализа, обычно в ней используются сценарии наводнений с 50, 20, 10, 4, 2, 1, 0,4, 0,2% вероятностями. Профили волн наводнений импортируются из системы вычислений уровней воды через базу данных. Для вычисления ущербов используется каталог функций ущербов «глубина затопления — ущерб (как процент утраченной стоимости)», определенный для различных классов экономических структур.

Таким образом, для каждой компоненты $i \in 1, \ldots, k \times m$ для каждого сценария $j \in 1, \ldots, s$ определяются доходность r_{ij} и потенциальный ущерб от наводнения d_{ij}. Тогда в описанной ранее терминологии матрица H распределений компонент портфеля имеет форму

$$H = R - D, \tag{35}$$

где $R = \{r_{ij}\}_{i = k \times m,\, j = s}$, $D = \{d_{ij}\}_{i = k \times m,\, j = s}$.

Теперь эта ситуация целиком попадает под применение техники для поиска решений задач оптимизации портфеля в соответствии со следствиями 1–3 (в условиях риска) и следствиями 7–9 (в условиях частичной неопределенности).

В том случае, когда имеются длинные исторические данные, которые позволяют моделировать будущие распределения сценариев наводнений с учетом климатических, гидрологических, прочих изменений, ситуация может описываться условиями риска. Тогда выбирается мера риска (набор мер), формулируются портфельные задачи, оптимальное решение которых по соотношениям доходность–риск может быть найдено в соответствии со следствиями 1–3.

Если данные, будущие изменения, а также проблемы моделирования позволяют определить только оценку вектора сценарных вероятностей как $p_0 \in P_0$, ситуация сводится к поиску решений в условиях частичной неопределенности. Она описывается следствиями 7–9.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе аппарат ПКМР развивается для описания задач оптимизации портфеля по соотношению доходность–риск на случай частичной неопределенности, когда вектор сценарных вероятностей оценивается некоторым полиэдральным множеством P_0. Предложено понятие индуцированной меры риска, связанное с исходной ПКМР и множеством неопределенности P_0.

Изучены постановки задач оптимизации портфеля по соотношению доходность–риск при использовании ПКМР в качестве мер риска, а также их сведение к некоторым наборам задач ЛП. При известных распределениях соответствующих сл.в. они сводятся к одной задаче ЛП, в случае частичной неопределенности — к набору таких задач.

Рассмотрены непрерывные задачи распределения инвестиций в условиях возможных катастрофических наводнений, которые вполне укладываются в рамки описанного математического аппарата.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кирилюк В.С. О когерентных мерах риска и задаче оптимизации портфеля // Теорія оптимальних рішень. — 2003. — Вип. 2. — С. 111–119.

2. Кирилюк В.С. О классе полиэдральных когерентных мер риска // Кибернетика и системный анализ. — 2004. — № 4. — С. 155–167.

3. Кирилюк В.С. Об одном обобщении полиэдральной когерентной меры риска // Теорія оптимальних рішень. — 2004. — Вип. 3. — С. 48–55.

4. K n i g h t F. H. Risk, Uncertainty and Profit. — Boston: Houghton Miffin, 1921. — 381 p.

5. E r m o l i e v Y u., G a i v o r o n s k i A. and N e d e v a C. Stochastic optimization problems with in complete information on distribution functions // SIAM J. Control and Optimization. — 1985. — **23,** N 5. — P. 697–716.

6. Г а й в о р о н с ь к и й А. А., Е р м о л ь е в Ю. М. Методы поиска оптимальных подмер (характеризующих решений) // Кибернетика. — 1987. — № 5. — С. 94–101

7. M a r k o w i t z H. M. Portfolio selection // J. Finance. — 1952. — **7(1)**. — P. 77–91.

8. J o r i o n P. H. Value at Risk: A New Benchmark for Measuring Derivatives. — New York: Irwin Professional Publ., 1996. — 284 p.

9. K o n n o H., Y a m a z a k i H. Mean absolute deviation portfolio optimization model and its application to Tokyo stock market // Manag. Sci. — 1991. — **37**. — P. 519–531.

10. O g r y c z a k W., R u s z c z y n s k i A. From stochastic dominance to mean-risk models: Semideviation as risk measures // Eur. J. Oper. Res. — 1999. — **116.** — P. 33–50.

11. R o c k a f e l l a r R. T., U r y a s e v S. Optimization of conditional value-at-risk // J. Risk. — 2000. — **2**. — P. 21–42.

12. A c e r b i C. Spectral measures of risk: A coherent representation of subjective risk aversion // J. Banking and Finance. — 2002. — **26(7)**. — P. 1505–1518.

13. A r t z n e r P., D e l b a e n F., E b e r J.-M., H e a t h D. Coherent measures of risks // Math. Finance. — 1999. — **9**. — P. 203–227.

14. Y o u n g M. R. A minimax portfolio selection rule with linear programming solution, // Manag. Sci. — 1998. — **44**. — P. 673–683.

15. S t o c h a s t i c optimization of insurance portfolios for managing exposure to catastrophic risks / Yu.M. Ermoliev, T.Yu. Ermolieva, G.J. Mac-Donald, V.I. Norkin // Ann. Oper. Res. — 2000. — **99**. — P. 207–225.

16. A s y s t e m approach to management of catastrophic risks / Yu.M. Ermoliev, T.Yu. Ermolieva, A. Amendola, G.J. Mac-Donald, V.I. Norkin // Eur. J. Oper. Res. — 2000. — **122.** — P. 452—460.

17. П р о б л е м ы страхования катастрофических рисков / Ю.М. Ермольев, Т.Ю. Ермольева, Г. МакДональд, В.И. Норкин // Кибернетика и системный анализ. — 2001. — № 2. — С. 90–109.

18. E r m o l i e v a T. and E r m o l i e v Y u. Catastrophic risk management flood and seismic risks case studies // Appl. of stochast. program. / S.W. Wallace and W.T. Ziemba Eds. — Philadelphia: MPS-SIAM, 2005. — P. 425–444.

19. Н о р к и н В. И. Об измерении и профилировании катастрофических рисков // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 6. — С. 80–94

20. H E C - F D A Flood Damage Reduction Analysis (User's manual), US Army Corps of Engineers, Hydrological Engineering Center, version 1.0, Jan. 1998, Approved for Publ. Release, CPD-72.

21. M I K E - 1 1 (2003) River modelling soware system http://www.dhisoware.com/mike11/

Поступила 19.04.2007