УДК 519.8

Е.М. КИСЕЛЁВА, М.С. ДУНАЙЧУК

РЕШЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ С РАЗМЕЩЕНИЕМ ЦЕНТРОВ ПОДМНОЖЕСТВ ДЛЯ СЛУЧАЯ ВЫПУКЛОГО ЦЕЛЕВОГО ФУНКЦИОНАЛА

Ключевые слова: *бесконечномерное математическое программирование, оптимальное разбиение множеств, негладкая оптимизация.*

ВВЕДЕНИЕ

Математическая теория непрерывных линейных задач оптимального разбиения множеств (ОРМ) n-мерного евклидова пространства, являющихся неклассическими задачами бесконечномерного математического программирования с булевыми переменными, изложена в [1]. На основе разработанных и теоретически обоснованных в этой монографии методов решения задач ОРМ сформулированы алгоритмы, составной частью которых является r-алгоритм Шора или его модификации. Предлагаемая в монографии теория основана на едином подходе, состоящем в сведении исходных бесконечномерных задач оптимизации определенным образом (например, через функционал Лагранжа) к негладким, как правило, конечномерным задачам оптимизации. Для численного решения таких задач применяются современные эффективные методы недифференцируемой оптимизации — различные варианты r-алгоритма, разработанные под руководством Н.З. Шора в Институте кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины. Особенность такого подхода заключается в том, что решение рассматриваемых исходных бесконечномерных задач оптимизации удается получить аналитически в явном виде, причем в аналитическое выражение входят параметры, отыскиваемые как оптимальное решение названных выше вспомогательных конечномерных задач оптимизации с негладкими целевыми функциями.

Интерес к непрерывным моделям оптимального разбиения множеств вызван тем, что к указанным моделям сводится в математической постановке достаточно широкий класс как теоретических, так и практических задач оптимизации. Типичными представителями непрерывных задач ОРМ являются бесконечномерные транспортные задачи или (более общие) бесконечномерные задачи размещения предприятий с одновременным разбиением данного региона, непрерывно заполненного потребителями, на области потребителей. Каждая область обслуживается одним предприятием с целью минимизации транспортных и производственных затрат. В роли потребителей могут выступать телефонные абоненты, школьники, избиратели, точки орошаемой территории, пациенты, которым надо поставить диагноз.

Необходимость в рассмотрении бесконечномерных задач размещения возникает в случае большого числа потребителей, например, в задачах о телевизионных, радио- и телеабонентах, школьных регионах, избирательных округах и т.п. Формулировка задачи размещения как дискретной математической модели становится нецелесообразной из-за трудностей, связанных с решением задач чрезмерно большой размерности.

Существуют также задачи, сводящиеся к задачам оптимального разбиения, у которых множество, разбиваемое на подмножества, уже изначально континуально по своей структуре. К ним относятся задачи отыскания областей притяжения локальных минимумов некоторой многоэкстремальной функции; непрерывные задачи о шаровом покрытии; задачи отыскания узлов оптимальных кубатурных формул для вычисления интегралов; нелинейные задачи целочисленного стохастического программирования при вычислении решающих правил; задачи в теории статистических решений при разбиении пространства признаков на непересекающиеся классы; задачи, в которых размещаемый объект рассматривается не как точечный, а как протяженный объект (так называемые задачи планировки).

Интерес к непрерывным моделям оптимального разбиения множеств обусловлен также тем, что они являются еще одним источником, порождающим негладкие задачи.

Настоящая статья посвящена дальнейшему развитию теории непрерывных задач ОРМ для случая непрерывных нелинейных однопродуктовых задач оптимального разбиения множеств с размещением центров подмножеств при ограничениях в виде равенств и неравенств с выпуклым целевым функционалом.

В отличие от линейных задач ОРМ, рассмотренных в [1], для которых оптимальное решение исходной бесконечномерной задачи удается найти в явном виде, в нелинейном случае отыскание оптимального решения исходной бесконечномерной задачи сводится к отысканию решения некоторого вспомогательного операторного уравнения с параметрами.

Результаты, полученные в работе [2] для нелинейных задач ОРМ с фиксированными центрами подмножеств, координаты которых задаются заранее, обобщены в данной статье на случай нелинейных задач ОРМ с неизвестным заранее расположением центров подмножеств, координаты которых отыскиваются в процессе решения исходной задачи. Приведено теоретическое обоснование метода решения названной выше задачи, на его основе разработан алгоритм, составной частью которого является модификация r-алгоритма Шора. Изложены результаты реализации разработанного алгоритма для некотоых модельных задач.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть Ω — ограниченное, измеримое по Лебегу множество в n-мерном евклидовом пространстве E_n. Совокупность измеримых по Лебегу подмножеств $\Omega_1, \ldots, \Omega_N$ из $\Omega \subset E_n$ назовем возможным разбиением множества, если

$$\bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i = \Omega, \ \operatorname{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \ i \neq j; \ i, \ j = 1, \ldots, N,$$

где $\operatorname{mes}(\cdot)$ означает меру Лебега.

Обозначим $\sum_{\Omega}^{N}$ класс всех возможных разбиений множества Ω:

$$\textstyle\sum_{\Omega}^{N} = \{(\Omega_1, \ldots, \Omega_N): \bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i = \Omega, \ \operatorname{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0 \ \ i \neq j; \ i, \ j = 1, \ldots, N\}.$$

Введем функционал

$$F(\{\Omega_1, \ldots, \Omega_N\}, \ \{\tau_1, \ldots, \tau_N\}) = \sum_{i=1}^{N} [\varphi_i (\int_{\Omega_i} \rho(x)\, dx) + \int_{\Omega_i} c(x, \tau_i)\, \rho(x)\, dx].$$

(Здесь и в дальнейшем интегралы понимаются в смысле Лебега.) Будем считать, что мера граничных точек подмножеств Ω_i, $i=1,\ldots,N$, равна нулю. Функции $c(x,\tau_i)$ — действительные, ограниченные, определенные на $\Omega\times\Omega$, измеримые по x при любом фиксированном $\tau_i=(\tau_i^{(1)},\ldots,\tau_i^{(n)})$ из Ω для всех $i=1,\ldots,N$; функция $\rho(x)$ — действительная, ограниченная, измеримая, неотрицательная на Ω; $\tau_i=(\tau_i^{(1)},\ldots,\tau_i^{(n)})$ — некоторая неизвестная заранее, эталонная точка для подмножества Ω_i, $i=1,\ldots,N$, называемая центром этого подмножества; $\varphi_i(\cdot)$, $i=1,\ldots,N$, — действительные, ограниченные, выпуклые, дважды непрерывно-дифференцируемые функции своего аргумента.

Тогда под непрерывной нелинейной однопродуктовой задачей оптимального разбиения множества Ω из E_n на его непересекающиеся подмножества $\Omega_1,\ldots,\Omega_N$ с отысканием координат центров (с размещением центров) подмножеств при ограничениях в виде равенств и неравенств будем понимать следующую задачу.

Задача А. Найти

$$\min_{(\{\Omega_1,\ldots,\Omega_N\},\{\tau_1,\ldots,\tau_N\})} F(\{\Omega_1,\ldots,\Omega_N\},\ \{\tau_1,\ldots,\tau_N\})$$

при условиях

$$\int_{\Omega_i}\rho(x)dx=b_i,\ i=1,\ldots,\mathrm{p},$$

$$\int_{\Omega_i}\rho(x)dx\le b_i,\ i=\mathrm{p}+1,\ldots,N,$$

$$\{\Omega_1,\ldots,\Omega_N\}\in\sum\nolimits_{\Omega}^{N},\quad \tau=(\tau_1,\ldots,\tau_N)\in\underbrace{\Omega\times\ldots\times\Omega}_{N}\in\Omega^N,$$

где $x=(x^{(1)},\ldots,x^{(n)})\in\Omega$; $\tau_i=(\tau_i^{(1)},\ldots,\tau_i^{(n)})\in\Omega$; $b_1,\ldots,b_N$ — заданные неотрицательные числа, причем выполняются условия разрешимости задачи

$$S=\int_{\Omega}\rho(x)dx\le\sum_{i=1}^{N}b_i,\ 0<b_i\le S,\ i=1,\ldots,N. \tag{1}$$

Разбиение $\{\Omega_1^*,\ldots,\Omega_N^*\}$, являющееся решением задачи A, назовем оптимальным.

На рис. 1 изображено разбиение множества $\Omega\subset E_2$ на три подмножества: Ω_1, Ω_2, Ω_3 с центрами τ_1,τ_2,τ_3 этих подмножеств соответственно.

Введем характеристическую функцию

$$\lambda_i(x)=\begin{cases}1,\ x\in\Omega_i,\\0,\ x\in\Omega\setminus\Omega_i,\ i=1,\ldots,N,\end{cases}$$

подмножества Ω_i, $i=1,\ldots,N$.

Рассмотрим функционал

$$I(\lambda(\cdot),\tau)=$$
$$=\sum_{i=1}^{N}[\varphi_i(\int_{\Omega}\rho(x)\lambda_i(x)dx)+$$
$$+\int_{\Omega}c(x,\tau_i)\rho(x)\lambda_i(x)dx], \tag{2}$$

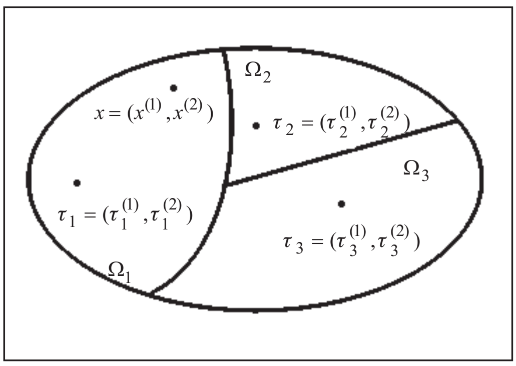

Рис. 1

где вектор-функция имеет вид $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \ldots, \lambda_N(x))$. Очевидно, $I(\lambda(\cdot), \tau) = F(\{\Omega_1, \ldots, \Omega_N\}, \tau)$.

Перепишем задачу A в терминах характеристических функций $\lambda_i(x)$ подмножеств Ω_i, $i = 1, \ldots, N$, в следующем виде.

Задача *B*. Найти

$$\min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_1 \times \Omega^N} I(\lambda(\cdot), \tau),$$

где

$$\Gamma_1 = \{\lambda(x)\colon \lambda(x) \in \Gamma'_1 \text{ почти всюду для } x \in \Omega;$$

$$\int_\Omega \rho(x)\, \lambda_i(x)\, dx = b_i,\ i = 1, \ldots, \text{p},$$

$$\int_\Omega \rho(x)\, \lambda_i(x)\, dx \le b_i,\ i = \text{p}+1, \ldots, N\};$$

$$\Gamma'_1 = \{\lambda(x) = (\lambda_1(x), \ldots, \lambda_N(x))\colon \lambda_i(x) = 0 \ne 1 \text{ почти всюду для } x \in \Omega,$$

$$i = 1, \ldots, N,$$

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i(x) = 1 \text{ почти всюду для } x \in \Omega\};\ \tau = (\tau_1, \ldots, \tau_N) \in \Omega^N.$$

Задача B является задачей бесконечномерного математического программирования с булевыми переменными $\lambda(\cdot)$.

От задачи B с булевыми значениями переменных $\lambda_i(\cdot)$, $i = 1, \ldots, N$, перейдем к соответствующей задаче со значениями $\lambda_i(\cdot)$ из отрезка [0,1].

Задача *C*. Найти

$$\min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_2 \times \Omega^N} I(\lambda(\cdot), \tau),$$

где $\Gamma_2 = \{\lambda(x)\colon \lambda(x) \in \Gamma$ почти всюду для $x \in \Omega$;

$$\int_\Omega \rho(x)\, \lambda_i(x)\, dx = b_i,\ i = 1, \ldots, \text{p},\ \int_\Omega \rho(x)\, \lambda_i(x)\, dx \le b_i,\ i = \text{p}+1, \ldots, N\ \};$$

$$\Gamma = \{\lambda(x) = (\lambda_1(x), \ \ldots, \ \lambda_N(x))\colon 0 \le \lambda_i(x) \le 1,\ x \in \Omega,\ i = 1, \ldots, N,\ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i(x) = 1$$

$$\text{почти всюду для } x \in \Omega\};$$

$$\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_N) \in \Omega^N.$$

Как доказано в [1], Γ_2 — ограниченное, замкнутое, выпуклое множество гильбертова пространства $L_2^N(\Omega)$ с нормой

$$\|\lambda(\cdot)\| = \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^{N} [\lambda_i(x)]^2\, dx \right)^{1/2}.$$

Тогда согласно [3] множество Γ_2 слабо компактно в гильбертовом пространстве $L_2^N(\Omega)$.

Очевидно,

$$I(\lambda_*(\cdot), \tau_*) = \min_{(\lambda, \tau) \in \Gamma_2 \times \Omega^N} I(\lambda(\cdot), \tau) =$$

$$= \min_{\tau \in \Omega^N} \left(\min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_2} I(\lambda(\cdot), \tau) \right). \qquad (3)$$

Изучим сначала свойства функционала $I(\lambda(\cdot),\tau)$ из (2).

Обозначая $f_i(\lambda_i(\cdot))=\int\limits_\Omega \rho(x)\,\lambda_i(x)\,dx$, перепишем функционал (2) в виде

$$I(\lambda(\cdot),\tau)=\sum_{i=1}^{N}\,[\varphi_i(f_i(\lambda_i(\cdot)))+\int\limits_\Omega c(x,\tau_i)\,\rho(x)\,\lambda_i(x)\,dx]. \tag{4}$$

Имеет место следующее утверждение.

Утверждение 1. Если $\varphi_i(\cdot)$, $i=1,\ldots,N$, — выпуклые функции своего аргумента, то при каждом фиксированном $\tau\in\Omega^N$ функционал $I(\lambda(\cdot),\tau)$ из (4) является выпуклым по $\lambda(\cdot)$ на $L_2^N(\Omega)$.

Доказательство. Из выпуклости функций $\varphi_i(\cdot)$, $i=1,\ldots,N$, в области определения, линейности функционалов

$$f_i(\lambda_i(\cdot))=\int\limits_\Omega \rho(x)\,\lambda_i(x)\,dx,\ i=1,\ldots,N,$$

на $L_2(\Omega)$ и свойств сложных функций следует, что функционалы $\varphi_i(f_i(\lambda_i(\cdot)))$, $i=1,\ldots,N$, будут выпуклы по $\lambda_i(\cdot)$ на $L_2(\Omega)$.

Пусть $\lambda^1(x)$, $\lambda^2(x)\in L_2^N(\Omega)$ почти всюду для $x\in\Omega$. Возьмем $\lambda^\alpha(x)=$ $=\alpha\,\lambda^1(x)+(1-\alpha)\,\lambda^2(x)$ почти всюду для $x\in\Omega$, $\alpha\in[0,1]$. Очевидно, что $\lambda^\alpha(\cdot)\in L_2^N(\Omega)$. Для функционала $I(\lambda^\alpha(\cdot),\tau)$ при фиксированном $\tau\in\Omega^N$ имеем

$$I(\lambda^\alpha(\cdot),\tau)=\sum_{i=1}^{N}\left[\varphi_i(f_i(\lambda_i^\alpha(\cdot)))+\int\limits_\Omega c(x,\tau_i)\,\rho(x)\,\lambda_i^\alpha(x)\,dx\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\left[\varphi_i\Big(f_i\Big(\alpha\,\lambda_i^1(\cdot)+(1-\alpha)\,\lambda_i^2(\cdot)\Big)\Big)+\int\limits_\Omega c(x,\tau_i)\,\rho(x)\right.$$

$$\left.\times\Big(\alpha\,\lambda_i^1(x)+(1-\alpha)\,\lambda_i^2(x)\Big)dx\right]$$

$$\le\sum_{i=1}^{N}\left[\alpha\,\varphi_i(f_i(\lambda_i^1(\cdot)))+(1-\alpha)\,\varphi_i(f_i(\lambda_i^2(\cdot)))+\alpha\int\limits_\Omega c(x,\tau_i)\,\rho(x)\,\lambda_i^1(x)\,dx\right.$$

$$\left.+(1-\alpha)\int\limits_\Omega c(x,\tau_i)\,\rho(x)\,\lambda_i^2(x)\,dx\right]$$

$$=\alpha\sum_{i=1}^{N}\left[\varphi_i(f_i(\lambda_i^1(\cdot)))+\int\limits_\Omega c(x,\tau_i)\,\rho(x)\,\lambda_i^1(x)\,dx\right]$$

$$+(1-\alpha)\sum_{i=1}^{N}\left[\varphi_i\Big(f_i(\lambda_i^2(\cdot))\Big)+\int\limits_\Omega c(x,\tau_i)\rho(x)\lambda_i^2(x)dx\right]$$

$$=\alpha\cdot I(\lambda^1(\cdot),\tau)+(1-\alpha)\cdot I(\lambda^2(\cdot),\tau).$$

Утверждение 1 доказано.

Замечание 1. Из выпуклости функционала $I\left(\lambda(\cdot),\tau\right)$ по $\lambda(\cdot)$ на $L_2^N(\Omega)$ следует его непрерывность по $\lambda(\cdot)$ на $L_2^N(\Omega)$ [4].

Теорема 1. Внутренняя задача из (3) имеет решение при каждом фиксированном $\tau\in\Omega^N$.

Доказательство. Действительно, из обобщенной теоремы Вейерштрасса [3] следует, что непрерывный выпуклый по $\lambda(\cdot)$ функционал $I\left(\lambda(\cdot),\tau\right)$ из (3), определенный на гильбертовом пространстве $L_2^N(\Omega)$, достигает при каждом фиксированном $\tau\in\Omega^N$ своего минимума по $\lambda(\cdot)$ на любом выпуклом, замкнутом, ограниченном множестве (в данном случае на множестве Γ_2).Теорема 1 доказана.

Таким образом, как следует из утверждения 1 и теоремы 1, при каждом фиксированном $\tau\in\Omega^N$ внутренняя задача из (3) глобально разрешима относительно $\lambda(\cdot)$ на множестве Γ_2.

Замечание 2. Условия теоремы 1 могут быть ослаблены, так как будут достигать на Γ_2 своей нижней грани не только выпуклые непрерывные функционалы, но и непрерывные снизу (слабо полунепрерывные снизу) функционалы.

Действительно, как отмечалось выше, ограниченное, замкнутое, выпуклое множество в гильбертовом пространстве $L_2^N(\Omega)$ слабо компактно. По обобщенной теореме Вейерштрасса [3] полунепрерывный снизу по $\lambda(\cdot)$ (слабо полунепрерывный снизу по $\lambda(\cdot)$) функционал $I(\lambda(\cdot),\tau)$ на слабо компактном множестве Γ_2 гильбертова пространства $L_2^N(\Omega)$ ограничен снизу и достигает на этом множестве своей нижней грани по $\lambda(\cdot)$ при каждом фиксированном $\tau\in\Omega^N$.

ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Введем для задачи C функционал Лагранжа

$$h(\{\lambda(\cdot),\tau\},\psi)=I(\lambda(\cdot),\tau)+\sum_{i=1}^{N}\psi_i\left[\int_\Omega\rho(x)\,\lambda_i(x)\,dx-b_i\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\left[\varphi_i\left(\int_\Omega\rho(x)\,\lambda_i(x)\,dx\right)+\int_\Omega\left(c(x,\tau_i)+\psi_i\right)\rho(x)\,\lambda_i(x)\,dx\right]-\sum_{i=1}^{N}\psi_i\,b_i\,,\quad(5)$$

где $\psi=(\psi_1\ldots\psi_N)$ — N-мерный вектор вещественных чисел, у которого компоненты $\psi_1\ldots\psi_p$ произвольны по знаку, а $\psi_{p+1}\ldots\psi_N$ — неотрицательны; $\lambda(x)\in\Gamma$ для $x\in\Omega$; $\tau=\left(\tau_1,\ldots,\tau_N\right)\in\Omega^N$.

Пару элементов $(\{\lambda_*(\cdot),\tau_*\},\psi^*)$ назовем седловой точкой функционала (5) на множестве $\{\Gamma\times\Omega^N\}\times\Lambda$, где

$$\Lambda=\{\psi=(\psi_1\ldots\psi_N)\in E_N:\psi_i\ge 0,\quad i=p+1,\ldots,N\},$$

если

$$h(\{\lambda_*(\cdot),\tau_*\},\psi)\le h(\{\lambda_*(\cdot),\tau_*\},\psi^*)\le h(\{\lambda(\cdot),\tau\},\psi^*)$$

$$\text{для всех } \lambda(x)\in\Gamma,\ \tau\in\Omega^N,\ \psi\in\Lambda,$$

или

$$h(\{\lambda_*(\cdot),\tau_*\},\psi^*)=\max_{\psi\in\Lambda}\ \min_{(\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma\times\Omega^N}h(\{\lambda(\cdot),\tau\},\psi)=$$

$$=\min_{(\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma\times\Omega^N}\ \max_{\psi\in\Lambda}h(\{\lambda(\cdot),\tau\},\psi).$$

Не останавливаясь пока на исследовании вопроса о существовании седловой точки, перейдем к решению задачи

$$\max_{\psi \in \Lambda} \min_{(\lambda(\cdot),\tau) \in \Gamma \times \Omega^N} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi).$$

Обозначим

$$G(\psi) = \min_{(\lambda(\cdot),\tau) \in \Gamma \times \Omega^N} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi), \; \psi \in \Lambda.$$

Задача, двойственная к задаче C, имеет вид

$$G(\psi) \to \max, \; \psi \in \Lambda. \tag{6}$$

Для отыскания $\min\limits_{(\lambda(\cdot),\tau) \in \Gamma \times \Omega^N} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi)$ перейдем к задаче

$$\min_{\tau \in \Omega^N} \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi) \text{ при } \psi \in \Lambda. \tag{7}$$

Утверждение 2. При каждом фиксированном $\tau \in \Omega^N$ и каждом фиксированном $\psi \in \Lambda$ функционал $h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi)$ из (7), определяемый по формуле (5), будет выпуклым по $\lambda(\cdot)$ на $L_2^N(\Omega)$, если $\varphi_i(\cdot)$, $i = 1, \ldots, N$, — выпуклые функции своего аргумента.

Доказательство утверждения 2 аналогично доказательству утверждения 1.

Утверждение 3. По аналогии с теоремой 1 легко доказать, что при каждом фиксированном $\tau \in \Omega^N$ и каждом фиксированном $\psi \in \Lambda$ минимум по $\lambda(\cdot)$ функционала $h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi)$ достигается на симплексе Γ.

Таким образом, внутренняя задача в (7) глобально разрешима по $\lambda(\cdot)$ на Γ.

Обозначим в (7)

$$G_1(\tau, \psi) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi), \; \tau \in \Omega^N, \; \psi \in \Lambda. \tag{8}$$

Далее вместо двойственной задачи (6) с учетом (7), (8) перейдем к решению следующей задачи:

$$\max_{\psi \in \Lambda} \min_{\tau \in \Omega^N} G_1(\tau, \psi).$$

Для этого сначала конкретизируем выражение $G_1(\tau, \psi)$ из (8).

Подставляя в (8) выражение для $h(\{\lambda(\cdot), \tau\}, \psi)$ из (5), получаем

$$G_1(\tau, \psi) = -\sum_{i=1}^{N} \psi_i b_i +$$

$$+ \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} \sum_{i=1}^{N} \left[\varphi_i \left(\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \right) + \int_{\Omega} (c(x, \tau_i) + \psi_i) \rho(x) \lambda_i(x) \, dx \right], \tag{9}$$

$$\tau \in \Omega^N, \; \psi \in \Lambda.$$

Обозначим в (9)

$$\Phi_i\big(\lambda_i(\cdot), \tau_i, \psi_i\big) = \varphi_i \left(\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) \, dx \right) + \int_{\Omega} (c(x, \tau_i) + \psi_i) \rho(x) \lambda_i(x) \, dx$$

и рассмотрим задачу

$$\min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} \Phi(\lambda(\cdot), \tau, \psi), \; \tau \in \Omega^N, \; \psi \in \Lambda,$$

где
$$\Phi(\lambda(\cdot), \tau, \psi) = \sum_{i=1}^{N} \Phi_i(\lambda_i(\cdot), \tau_i, \psi_i). \tag{10}$$

Очевидно, что при каждом фиксированном $\tau \in \Omega^N$ и каждом фиксированном $\psi \in \Lambda$ для функционала $\Phi(\lambda(\cdot), \tau, \psi)$ из (10) имеют место утверждения, аналогичные утверждениям 2 и 3, т.е. функционал $\Phi(\lambda(\cdot), \tau, \psi)$ из (10) будет выпуклым по $\lambda(\cdot)$ на $L_2^N(\Omega)$, если $\varphi_i(\cdot)$, $i = 1, \ldots, N$, — выпуклые функции своего аргумента и минимум по $\lambda(\cdot)$ функционала $\Phi(\lambda(\cdot), \tau, \psi)$ достигается на множестве Γ.

Обозначим $sgrad_\lambda \Phi\big(\lambda(\cdot), \tau, \psi\big)$ субградиент по $\lambda(\cdot)$ выпуклого по $\lambda(\cdot)$ при каждом фиксированном $\tau \in \Omega^N$ и каждом фиксированном $\psi \in \Lambda$ функционала $\Phi(\lambda(\cdot), \tau, \psi)$.

Можно показать, что $sgrad_\lambda \Phi(\lambda(\cdot), \tau, \psi)$ при каждом фиксированном $\tau \in \Omega^N$ и каждом фиксированном $\psi \in \Lambda$ имеет вид

$$sgrad_\lambda \Phi(\lambda(\cdot), \tau, \psi) =$$
$$= (\Phi'_{\lambda_1}(\lambda_1(\cdot), \tau_1, \psi_1), \ldots, \Phi'_{\lambda_i}(\lambda_i(\cdot), \tau_i, \psi_i), \ldots, \Phi'_{\lambda_N}(\lambda_N(\cdot), \tau_N, \psi_N)),$$

где
$$\Phi'_{\lambda_i}(\lambda_i(\cdot), \tau_i, \psi_i) = \varphi'_{iY_i}\left(\int_\Omega \rho(x)\, \lambda_i(x)\, dx\right)\rho(x) + (c(x, \tau_i) + \psi_i)\, \rho(x), \quad i = 1, \ldots, N,$$

здесь
$$Y_i = \int_\Omega \rho(x)\, \lambda_i(x)\, dx. \tag{11}$$

Согласно [5] при каждом фиксированном $\tau \in \Omega^N$ и каждом фиксированном $\psi \in \Lambda$ необходимое и достаточное условие минимума по $\lambda(\cdot)$ выпуклого по $\lambda(\cdot)$ функционала $\Phi(\lambda(\cdot), \tau, \psi)$ на симплексе Γ имеет вид

$$\min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} \int_\Omega (sgrad_\lambda \Phi(\lambda^*(\cdot), \tau, \psi), (\lambda(x) - \lambda^*(x)))\, dx = 0.$$

Перепишем полученное равенство в виде

$$\int_\Omega (sgrad_\lambda \Phi(\lambda^*(\cdot), \tau, \psi), \lambda^*(x))\, dx =$$
$$= \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} \int_\Omega (sgrad_\lambda \Phi(\lambda^*(\cdot), \tau, \psi), \lambda(x))dx. \tag{12}$$

Предположим, что при каждом фиксированном $\tau \in \Omega^N$ и каждом фиксированном $\psi \in \Lambda$ для функционала $\Phi(\lambda(\cdot), \tau, \psi)$ из (10) по переменной $\lambda(\cdot)$ выполняется условие, которое назовем, следуя [5], условием сильной регулярности, если

$$\Phi'_{\lambda_i}\left(\lambda_i^*(\cdot), \tau_i, \psi_i\right) = \varphi'_{iY_i}\left(\int_\Omega \rho(x)\, \lambda_i^*(x)\, dx\right) \cdot \rho(x) + \big(c(x, \tau_i) + \psi_i\big)\, \rho(x) \neq 0,$$
$$i = 1, \ldots, N,$$

за исключением множества точек $x \in \Omega$ нулевой меры, или, в другой записи,
$$\operatorname{mes}\left\{x \in \Omega : \left(c(x, \tau_i) + \psi_i + \varphi'_{iY_i}\left(\int_\Omega \rho(x)\, \lambda_i^*(x)\, dx\right)\right)\rho(x) = 0\right\} = 0, \tag{13}$$

где Y_i, $i = 1, \ldots, N$, имеет вид (11).

Условие сильной регулярности означает, что для оптимальной вектор-функции $\lambda^*(x)$ ни на одном множестве точек $x \in \Omega$ ненулевой меры не удовлетворяется ни одно из уравнений Эйлера

$$\Phi'_{\lambda_i}(\lambda_i^*(\cdot), \tau_i, \psi_i) = 0, \ i = 1, \ldots, N,$$

для задачи минимизации без ограничений функционала $\Phi(\lambda(\cdot), \tau, \psi)$ из (10).

Как следует из [1, 5], в случае выполнения условия сильной регулярности (13) вектор-функция $\lambda^*(x)$, доставляющая минимум линейному функционалу из правой части формулы (12), определяется при каждом фиксированном $\tau \in \Omega^N$ и каждом фиксированном $\psi \in \Lambda$ очевидным образом из следующего операторного уравнения:

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 0, \text{если} \left(c(x, \tau_i) + \psi_i + \varphi'_{iY_i}\left(\int\limits_\Omega \rho(x)\lambda_i^*(x)dx \right) \right) \rho(x) > 0, \\ 1, \text{если} \left(c(x, \tau_i) + \psi_i + \varphi'_{iY_i}\left(\int\limits_\Omega \rho(x)\lambda_i^*(x)dx \right) \right) \rho(x) < 0, \ i = 1, \ldots, N, \\ [0,1], \text{если} \left(c(x, \tau_i) + \psi_i + \varphi'_{iY_i}\left(\int\limits_\Omega \rho(x)\lambda_i^*(x)dx \right) \right) \rho(x) = 0. \end{cases}$$

С учетом (13) и того, что мера множества граничных точек подмножеств Ω_i, $i = 1, \ldots, N$, равна нулю, имеем

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, c(x, \tau_i) + \psi_i + \varphi_{iY_i}'\left(\int\limits_\Omega \rho(x)\lambda_i^*(x)\,dx \right) \le \\ \quad \le c(x, \tau_k) + \psi_k + \varphi_{kY_k}'\left(\int\limits_\Omega \rho(x)\lambda_k^*(x)\,dx \right), \\ \quad i \ne k \text{ по÷ти всюду дл } x \in \Omega \text{ (другими словами, } i = k \\ \quad \text{только на множестве меры ноль, т.е. в то÷ках границы между} \\ \quad \text{подмножествами } \Omega_i \text{ и } \Omega_k), \ i, k = 1, \ldots, N; \\ 0 \text{ в остальных слу÷ах.} \end{cases}$$

С учетом обозначений (11), прибавляя и вычитая под знаком суммы в (9) выражение $\varphi_{iY_i}'\left(\int\limits_\Omega \rho(x)\lambda_i(x)\,dx \right)$, перепишем $G_1(\tau, \psi)$ из (9) в виде

$$G_1(\tau, \psi) = -\sum_{i=1}^N \psi_i b_i +$$

$$+ \min_{\lambda(\cdot)\in\Gamma} \sum_{i=1}^N \left[\left(\varphi_i\left(\int\limits_\Omega \rho(x)\lambda_i(x)\,dx_i \right) - \varphi'_{iY_i}\left(\int\limits_\Omega \rho(x)\lambda_i(x)\,dx_i \right) \cdot \int\limits_\Omega \rho(x)\lambda_i(x)\,dx \right) + \right.$$

$$\left. + \int\limits_\Omega (c(x, \tau_i) + \psi_i + \varphi'_{iY_i}(\int\limits_\Omega \rho(x)\lambda_i(x)\,dx))\rho(x)\lambda_i(x)\,dx \right], \qquad (15)$$

$$\tau \in \Omega^N, \ \psi \in \Lambda.$$

Подставляя выражение для $\lambda_i^*(x)$ из (14) в ту часть формулы (15), которая линейно зависит от $\lambda(\cdot)$, и оставляя переменной величину Y_i, $i = 1, \ldots, N$, связанную с $\lambda(\cdot)$ зависимостью (11), получаем (с учетом ограничений задачи C) выражение для $G_1(\tau, \psi)$ в следующем виде:

$$G_2(Y, \tau, \psi) = -\sum_{i=1}^{N} \psi_i b_i + \sum_{i=1}^{N} \left[(\varphi_i(Y_i) - \varphi'_{iY_i}(Y_i) \cdot Y_i) \right.$$

$$\left. + \int_{\Omega} \min_{k=1,N} (c(x, \tau_k) + \psi_k + \varphi'_{kY_k}(Y_k)) \rho(x) dx \right], \tag{16}$$

$$\tau \in \Omega^N, \ \psi \in \Lambda, \ Y \in U = \{Y = (Y_1, \ldots, Y_N) \in E_N : 0 \le Y_i \le b_i, \ i = 1, \ldots, N\}.$$

Таким образом, конкретизируя выражение для $G_1(\tau, \psi)$ из (8), двойственную задачу (6) привели к виду

$$\max_{\psi \in \Lambda} \min_{\tau \in \Omega^N} \max_{Y \in U} G_2(Y, \tau, \psi). \tag{17}$$

Прежде чем сформулировать алгоритм решения задачи (17), остановимся на некоторых свойствах функции $G_2(Y, \tau, \psi)$, определяемой по формуле (16).

При каждом фиксированном $\psi \in \Lambda$ и каждом фиксированном $Y \in U$ функция переменной τ на Ω^N обладает свойствами, установленными в [1]. Иными словами, функция $G_2(Y, \tau, \psi)$ из (16) при каждом фиксированном $\psi \in \Lambda$ и каждом фиксированном $Y \in U$ является по $\tau \in \Omega^N$ недифференцируемой многоэкстремальной. Однако в некоторых частных случаях (см. [1]), вводя на множестве $\Omega \subset E_n$ определенные отношения порядка между координатами точек $\tau_1, \ldots, \tau_N$, можно множество Ω^N представить в виде объединения таких выпуклых подмножеств, каждое из которых будет определяться своим отношением порядка между координатами точек $\tau_1, \ldots, \tau_N$, и на каждом из таких выпуклых подмножеств множества Ω^N функция $G_2(Y, \tau, \psi)$ из (16) будет выпуклой по τ и иметь по τ точку локального минимума. Причем значение функции $G_2(Y, \tau, \psi)$ при каждом фиксированном $\psi \in \Lambda$ и каждом фиксированном $Y \in U$ в этих точках локальных минимумов будут совпадать. Следовательно, в этом случае задача отыскания $\min_{\tau \in \Omega^N} G_2(Y, \tau, \psi)$ при каждом фиксированном $\psi \in \Lambda$ и каждом фиксированном $Y \in U$ будет одноэкстремальной.

При каждом фиксированном $\tau \in \Omega^N$ и каждом фиксированном $\psi \in \Lambda$ функция $G_2(Y, \tau, \psi)$ из (16) по переменной Y будет вогнутой на выпуклом множестве U, если $\varphi_i(\cdot)$, $i = 1, \ldots, N$, — выпуклые функции своего аргумента [2]. И, наконец, при каждом фиксированном $\tau \in \Omega^N$ и каждом фиксированном $Y \in U$ функция $G_2(Y, \tau, \psi)$ из (16) по переменной ψ будет вогнутой и недифференцируемой на множестве Λ [1].

Учитывая вышеизложенное и обобщая на случай задачи C результаты, полученные в [1] для аналогичной непрерывной линейной однопродуктовой задачи оптимального разбиения множеств с размещением центров подмножеств, можно сделать вывод, что для задачи C имеет место теорема Куна–Таккера в двойственной форме, т.е. $I(\lambda_*(\cdot), \tau_*) = G(\psi^*)$, где $(\lambda_*(\cdot), \tau_*)$ — оптимальное решение задачи C, ψ^* — оптимальное решение двойственной задачи (17), причем максимум в двойственной задаче (17) достигается.

Сформулируем теорему, подводящую итог нашим рассуждениям и обусловливающую переход от бесконечномерной задачи C к поиску седловой точки функционала (5) посредством решения негладкой конечномерной задачи (17), к которой сведена двойственная задача (6).

Теорема 2. Пусть

1) $\varphi_i(\cdot)$, $i = 1, \ldots, N$, — выпуклые, дважды непрерывно-дифференцируемые функции своего аргумента;

2) при каждом фиксированном $\tau \in \Omega^N$ и каждом фиксированном $\psi \in \Lambda$ имеет место условие сильной регулярности (13)

$$\operatorname{mes}\{x \in \Omega : \left(c(x, \tau_i) + \psi_i + \varphi_{iY_i}{}'\left(\int_\Omega \rho(x)\, \lambda_i^*(x)\, dx\right) \right) \rho(x) = 0\} = 0,\ i = 1, \ldots, N.$$

Тогда седловая точка $(\{\lambda_*(\cdot), \tau_*\}, \psi^*)$ (где первая компонента $\{\lambda_*(\cdot), \tau_*\}$ является оптимальным решением задачи C) функционала (5) на множестве $\{\Gamma \times \mathrm{T}^{\,j}_{<\tau_1, \ldots, \tau_N>}\} \times \Lambda$ (здесь $\mathrm{T}^{\,j}_{<\tau_1, \ldots, \tau_N>}$ — выпуклые подмножества множества Ω^N, определяемые своим отношением порядка между координатами точек $\tau_1, \ldots, \tau_N$, на которых функция $G_2(Y, \tau, \psi)$ из (16) — выпукла и объединение которых составляет множество Ω^N) определяется для $i = 1, \ldots, N$ и почти всех $x \in \Omega$ следующим образом:

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x \in \Omega_{*i} \text{ и } x \notin \Omega_{*q},\ q \le i, \\ 0 \text{ при } x \notin \Omega_{*i}. \end{cases}$$

Здесь

$$\Omega_{*i} = \{x \in \Omega : c(x, \tau_i^*) + \psi_i^* + \varphi'_{iY_i}(Y_i^*) =$$
$$= \min_{k=1,\ldots,N} (c(x, \tau_k^*) + \psi_k^* + \varphi'_{kY_k}(Y_k^*)),\ i \ne k \text{ почти всюду для } x \in \Omega\},$$

в качестве $Y_1^*, \ldots, Y_N^*$, $\tau_1^*, \ldots, \tau_N^*$, $\psi_1^*, \ldots, \psi_N^*$ выбирается оптимальное решение двойственной задачи (6), приведенной к виду

$$G(\psi) = \min_{\tau \in \Omega^N} \max_{Y \in U} G_2(Y, \tau, \psi) = \min_{\tau \in \Omega^N} \max_{Y \in U} \left\{ -\sum_{i=1}^N \psi_i b_i + \right.$$
$$+ \sum_{i=1}^N \left[(\varphi_i(Y_i) - \varphi'_{iY_i}(Y_i) \cdot Y_i) + \int_\Omega \min_{k=\overline{1,N}} (c(x, \tau_k) + \right.$$
$$\left.\left. \psi_k + \varphi'_{kY_k}(Y_k))\rho(x) dx \right] \right\} \to \max$$

при условиях $\psi_i \ge 0$, $i = p + 1, \ldots, N$.

Утверждение 4. При выполнении условия сильной регулярности (13) множества оптимальных решений задач B и C совпадают.

Доказательство утверждения 4 основано на справедливости утверждений 4.1–4.3.

Утверждение 4.1. При каждом фиксированном $\tau \in \Omega^N$ и каждом фиксированном $\psi \in \Lambda$ ограниченное, замкнутое, выпуклое множество Γ гильбертова пространства $L_2^N(\Omega)$ слабо компактно и (согласно теореме Крейна-Мильмана [4]) содержит по крайней мере одну крайнюю точку.

Утверждение 4.2. Среди множества точек, в которых линейный относительно $\lambda(\cdot)$ функционал

$$R(\lambda(\cdot), \tau, \psi) = \int_{\Omega} (sgrad_{\lambda} \Phi(\lambda^*(\cdot), \tau, \psi), \lambda(x))\, dx \tag{18}$$

достигает при каждом фиксированном $\tau \in \Omega^N$ и каждом фиксированном $\psi \in \Lambda$ минимума по $\lambda(\cdot)$ на Γ, найдется хотя бы одна крайняя точка симплекса Γ.

Утверждение 4.3. Крайние точки симплекса Γ представляют собой характеристические функции некоторых подмножеств Ω_i, образующих при каждом фиксированном $\tau \in \Omega^N$ и $\psi \in \Lambda$ разбиение множества Ω.

Таким образом, множества оптимальных решений задач B и C совпадают.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Рассмотрим алгоритм решения задачи B, основанный на теореме 2.

Для отыскания оптимального решения задачи (17) будем использовать эвристический алгоритм обобщенных псевдоградиентов с растяжением пространства, близкий к r-алгоритму Шора [6].

Для этого от задачи (17) введением в целевую функцию (16) негладких штрафных функций множеств $\{\psi_i \ge 0, i = p+1, \ldots, N\}$, $\{Y_i \ge 0, \ i = 1, \ldots, N\}$, $\{Y_i \le b_i, i = 1, \ldots, N\}$ перейдем к следующей задаче:

найти

$$\max_{\psi \in E^N} \ \min_{\tau \in \Omega^N} \ \max_{Y \in E^N} P(Y, \tau, \psi), \tag{19}$$

где

$$P(Y, \tau, \psi) = G_2(Y, \tau, \psi) - S_1 \cdot \sum_{i=1}^{N} \max\{0, -\psi_i\} - S_2 \cdot \sum_{i=1}^{N} \max\{0, Y_i\} -$$
$$- S_3 \cdot \sum_{i=1}^{N} \max\{0, Y_i - b_i\}. \tag{20}$$

Здесь S_1, S_2, S_3 — достаточно большие положительные числа, значительно большие максимальных из множителей Лагранжа для функции (16). (О возможности перехода от задачи (17) к задаче (19), (20) см. в [1,6,7].)

Определим i-ю компоненту $3 \cdot N$-мерного вектора обобщенного псевдо-градиента

$$g(Y, \tau, \psi) = (-g_p^Y(Y, \tau, \psi), g_p^{\tau}(Y, \tau, \psi), -g_p^{\psi}(Y, \tau, \psi)) =$$
$$= (-g_p^{Y_1}(Y, \tau, \psi), \ldots, -g_p^{Y_N}(Y, \tau, \psi);\ g_p^{\tau_1}(Y, \tau, \psi), \ldots, g_p^{\tau_N}(Y, \tau, \psi);$$
$$-g_p^{\psi_1}(Y, \tau, \psi), \ldots, -g_p^{\psi_N}(Y, \tau, \psi))$$

функции (20) в точке $(Y, \tau, \psi) = (Y_1, \ldots, Y_N; \tau_1, \ldots, \tau_N; \psi_1, \ldots, \psi_N)$ следующим образом:

$$
\begin{cases}
g_p^{Y_i}(Y,\tau,\psi) = -\varphi_{iY_iY_i}''(Y_i)\cdot Y_i + S_2 \max[0,\operatorname{sign}(-Y_i)] - S_3 \max[0,\operatorname{sign}(Y_i - b_i)], \\
\quad \text{если } i \neq k, \text{ где } k\colon [c(x,\tau_k) + \psi_k + \varphi'_{kY_k}(Y_k)] = \\
\quad = \min\limits_{l=\overline{1,N}} [c(x,\tau_l) + \psi_l + \varphi'_{lY_l}(Y_l)], \\
g_p^{Y_k}(Y,\tau,\psi) = -\varphi_{kY_kY_k}''(Y_k)\cdot Y_k + \varphi_{kY_kY_k}''(Y_k)\cdot \int\limits_{\Omega} \rho(x)\,\lambda_k(x)\,dx + \\
\quad + S_2 \max[0,\operatorname{sign}(-Y_k)] - S_3 \max[0,\operatorname{sign}(Y_k - b_k)],
\end{cases} \tag{21}
$$

$$
i = 1,\ldots,N;
$$

$$
g_p^{\tau_i}(Y,\tau,\psi) = \int\limits_{\Omega} \rho(x)\cdot g_c^{\tau_i}(x,\tau_i)\,\lambda_i(x)\,dx,\quad i=1,\ldots,N, \tag{22}
$$

где $g_c^{\tau_i}(x,\tau_i)$ — i-я компонента N-мерного вектора обобщенного градиента $g_c^{\tau_i}(x,\tau_i)$ функции $c(x,\tau_i)$ в точке $\tau=(\tau_1,\ldots,\tau_i,\ldots,\tau_N)$ при фиксированном x,

$$
g_c^{\tau_i}(x,\tau) = \begin{pmatrix} g_c^{\tau_i^{(1)}}(x,\tau) \\ ---- \\ g_c^{\tau_i^{(n)}}(x,\tau) \end{pmatrix};
$$

$$
g_p^{\psi_i}(Y,\tau,\psi) = \int\limits_{\Omega} \rho(x)\,\lambda_i(x)\,dx - b_i + S_1 \max\big[0,\operatorname{sign}(-\psi_i)\big],\quad i=1,\ldots,N. \tag{23}
$$

В формулах (21)–(23) $\lambda_i(x)$, $i=1,\ldots,N$, определяется следующим образом:

$$
\lambda_i(x) = \begin{cases}
1,\ c(x,\tau_i) + \psi_i + \varphi_{iY_i}'(Y_i) = \min\limits_{k=\overline{1,N}} [c(x,\tau_k) + \psi_k + \varphi_{kY_k}'(Y_k)], \\
\quad i \neq k \text{ по÷ти всюду дл } x \in \Omega; \\
0 \text{ в остальных слу÷ах.}
\end{cases} \tag{24}
$$

Опишем алгоритм решения задачи B.

Алгоритм

Предварительный этап. Область Ω заключаем в n-мерный параллелепипед П, стороны которого параллельны осям декартовой системы координат, полагаем $\rho(x)=0$ при $x \in \Pi \setminus \Omega$, $j=1,\ldots,M$. Параллелепипед П покрываем прямоугольной сеткой и задаем начальное приближение $(Y,\tau,\psi)=(Y^{(0)},\tau^{(0)},\psi^{(0)})$. Вычисляем значение $\lambda^{(0)}(x)$ в узлах сетки по формулам (24) при $Y=Y^{(0)}$, $\tau=\tau^{(0)}$, $\psi=\psi^{(0)}$. Вычисляем значение $g_p^Y(Y^{(0)},\tau^{(0)},\psi^{(0)})$, $g_p^\tau(Y^{(0)},\tau^{(0)},\psi^{(0)})$, $g_p^\psi(Y^{(0)},\tau^{(0)},\psi^{(0)})$ в узлах сетки по формулам (21)–(23) при $Y=Y^{(0)}$, $\tau=\tau^{(0)}$, $\psi=\psi^{(0)}$, $\lambda(x)=\lambda^{(0)}(x)$. Выбираем начальный пробный шаг $h_0>0$ r-алгоритма Шора.

Первый шаг алгоритма проводим по формулам

$$
Y^{(1)} = Y^{(0)} - h_0 g_p^Y(Y^{(0)},\tau^{(0)},\psi^{(0)}),
$$

$$
\tau^{(1)} = \mathrm{P}_\Pi(\tau^{(0)} - h_0 g_p^\tau(Y^{(0)},\tau^{(0)},\psi^{(0)})),
$$

$$
\psi^{(1)} = \psi^{(0)} - h_0 g_p^\psi(Y^{(0)},\tau^{(0)},\psi^{(0)}),
$$

где P_Π — оператор проектирования на П.

Переходим ко второму шагу. Пусть в результате вычислений после k, $k=1,2,\dots,$ шагов алгоритма получены определенные значения $Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}, \lambda^{(k-1)}(x)$ в узлах сетки.

Опишем **(k + 1)-й шаг** алгоритма.

1. Вычисляем значения $\lambda^{(k)}(x)$ в узлах сетки по формулам (24) при $Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}$.

2. Вычисляем значения $g_p(Y, \tau, \psi)$ по формулам (21)–(23) при $\lambda(x)=\lambda^{(k)}(x)$, $Y=Y^{(k)}$, $\tau=\tau^{(k)}$, $\psi=\psi^{(k)}$.

3. Проводим (k + 1)-й шаг r-алгоритма обобщенных псевдоградиентов с растяжением пространства, близкого к r-алгоритму Шора в H-форме [6], итерационная формула которого имеет вид

$$Y^{(k+1)}=Y^{(k)}-h_k \frac{H_{k+1} g_p^Y(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)})}{\sqrt{(H_{k+1} g_p^Y(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}), g_p^Y(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}))}},$$

$$\tau^{(k+1)}=\mathrm{P}_\Pi\left(\tau^{(k)}-h_k \frac{H_{k+1} g_p^\tau(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)})}{\sqrt{(H_{k+1} g_p^\tau(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}), g_p^\tau(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}))}}\right),$$

$$\psi^{(k+1)}=\psi^{(k)}-h_k \frac{H_{k+1} g_p^\psi(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)})}{\sqrt{(H_{k+1} g_p^\psi(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}), g_p^\psi(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}))}}.$$

Здесь H_{k+1} — матрица растяжения пространства с коэффициентом α (его целесообразно брать равным трем) в направлении разности двух последовательных обобщенных градиентов,

$$H_{k+1}=H_k+\left(\frac{1}{\alpha^2}-1\right)\frac{H_k \Delta_k \Delta_k^T H_k}{(H_k \Delta_k, \Delta_k)},$$

$$\Delta_k=g_p^T(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)})-g_p^T(Y^{(k-1)}, \tau^{(k-1)}, \psi^{(k-1)}),$$

где T — одна из переменных Y, τ или ψ.

Если H_{k+1} ввиду округления счета перестает быть положительно определенной, то заменяем ее единичной матрицей.

Шаговый множитель h_k выбираем из условия минимума разности $[G_2(Y^{(k)}, \tau^{(k-1)}, \Psi^{(k)})-G_2(Y^{(k-1)}, \tau^{(k)}, \Psi^{(k-1)})]$ по направлению антипсевдоградиента $-g(Y, \tau, \Psi)$ в преобразованном пространстве.

4. Если условие

$$||(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)})-(Y^{(k+1)}, \tau^{(k+1)}, \psi^{(k+1)})|| \le \varepsilon,\ \varepsilon>0, \tag{25}$$

не выполняется, переходим к (k + 2)-му шагу алгоритма, в противном случае — к п. 5.

5. Полагаем, что $Y_*=Y^{(l)}$, $\tau_*=\tau^{(l)}$, $\psi_*=\psi^{(l)}$, $\lambda_*(x)=\lambda^{(l)}(x)$, где l — номер итерации, на которой выполнилось условие (25).

6. Вычисляем оптимальное значение целевого функционала по формуле (20) при $Y=Y^*, \tau=\tau^*, \psi=\psi^*$ и для контроля правильности счета — по формуле

$$I\ (\lambda_*(\cdot), \tau_*) = \sum_{i=1}^{N} \left[\varphi_i \left(\int_{\Omega} \rho\ (x)\ \lambda_{*i}(x) dx \right) + \int_{\Omega} c\ (x, \tau_{*i})\ \rho\ (x)\ \lambda_{*i}\ (x)\ dx \right].$$

Алгоритм описан.

РЕШЕНИЕ МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Описанный алгоритм реализован для модельных бесконечномерных задач размещения в заданной области трех предприятий, производящих однородную продукцию для распределенного в этой области с заданной плотностью потребителя, с ограничениями на мощности предприятий в виде равенств и неравенств.

Модельная задача 1. Потребитель некоторой однородной продукции, производимой тремя предприятиями, непрерывно распределен в области $\Omega = \{(x, y) : 0 \le x \le 10; 0 \le y \le 10\}$. Заданы начальные координаты расположения предприятий $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}) = (0;0)$, $i = \overline{1,3}$. Для каждого i-го предприятия, $i = \overline{1,3}$, задана функция

$$c\ (x, y, \tau_i) = \sqrt{(x - \tau_i^{(1)})^2 + (y - \tau_i^{(2)})^2},$$

описывающая стоимость транспортировки единицы продукции из i-го предприятия к потребителю с координатами (x, y). Известен спрос $\rho\ (x, y)$ на продукцию для каждого пункта потребления с координатами (x, y). Для простоты полагается $\rho\ (x, y) \equiv 1\ \forall\ x \in \Omega$. Функции $\varphi_i(Y_i)$, описывающие зависимость стоимости производства продукции на i-м предприятии от его мощности, имеют вид $\varphi_i(Y_i) = Y_i^3$, $i = 1,2,3$, где мощность i-го предприятия определяется по формуле

$$Y_i = \int\int_{\Omega_i} \rho\ (x, y)\ dx\ dy. \tag{26}$$

Множество потребителей Ω можно разбивать на зоны обслуживания Ω_i потребителей i-м пунктом производства так, чтобы

$$\bigcup_{i=1}^{3} \Omega_i = \Omega,\ \text{mes}\ (\Omega_i \cap \Omega_k)_{i \ne k} = 0,\ i = 1,2,3, \tag{27}$$

причем мощность i-го предприятия, $i = 1,2,3$, определяется суммарным спросом потребителей, принадлежащих Ω_i, $i = 1,2,3$, и не должна превышать заданных объемов

$$0 \le \int\int_{\Omega_i} \rho\ (x, y)\ dx\ dy \le b_i,\ i = 1,2,3, \tag{28}$$

$$b_1 = 90,\ b_2 = 50,\ b_3 = 35.$$

Требуется разбить множество потребителей Ω на зоны их обслуживания тремя предприятиями, т.е. на подмножества Ω_i, $i = 1,2,3$, и разместить эти предприятия в области Ω так, чтобы минимизировать функционал суммарных затрат на производство продукции и доставку ее к потребителю:

$$F\ (\{\Omega_1, \ldots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \ldots, \tau_N\}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{3} \left[\varphi_i \left(\int\int_{\Omega_i} \rho\ (x, y)\ dx\ dy \right) + \int\int_{\Omega_i} c\ (x, \tau_i)\ \rho\ (x, y)\ dx\ dy \right] \tag{29}$$

при условиях (27), (28).

Для решения сформулированной задачи с помощью описанного выше алгоритма область Ω покрывалась прямоугольной сеткой с узлами (i, j), $i = 1, \ldots 21$,

$j = 1, \ldots, 21$. В качестве начальных данных были выбраны начальные значения двойственных переменных $\psi_i^{(0)} = 0$, $i = 1,2,3$, начальные значения $Y_1^{(0)} = 1$, $Y_2^{(0)} = 1$, $Y_3^{(0)} = 10$ мощностей, начальные координаты расположения предприятий $\tau_i^{(0)} = (0;0)$, $i = 1,2,3$. Условием прекращения счета являлось выполнение неравенства

$$||(Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}) - (Y^{(k+1)}, \tau^{(k+1)}, \psi^{(k+1)})|| \le \varepsilon, \ \varepsilon > 0,$$

где k — номер итерации алгоритма, на которой произошел останов, $\varepsilon = 10^{-5}$ — точность вычислений r-алгоритмом Шора. Двойные интегралы, входящие в формулы (26), (28), (29), вычислялись с помощью кубатурной формулы трапеций.

В результате работы описанным алгоритмом за 106 итераций получены:

— оптимальное разбиение множества потребителей Ω на зоны обслуживания $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ соответственно каждым из трех предприятий с размещением центров подмножеств для модельной задачи 1 (рис. 2);

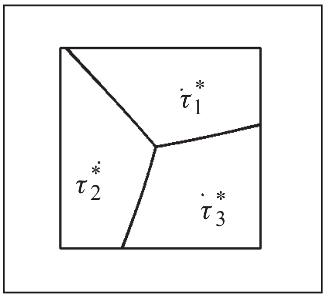

Fig. 2

— оптимальные координаты размещенных предприятий:

$\tau_1^* = (6{,}05;\, 7{,}91)$, $\tau_2^* = (1{,}94;\, 4{,}29)$, $\tau_3^* = (7{,}11;\, 2{,}68)$;

— оптимальные мощности каждого предприятия

$$Y_1^* = 33{,}33; \ Y_2^* = 33{,}34; \ Y_3^* = 33{,}33;$$

— минимальное значение прямого функционала (29): $F_* \approx 111363{,}8$;

— максимальное значение функционала двойственной задачи $G^* \approx 111348{,}5$.

Модельная задача 2. Исходные данные те же, что и для модельной задачи 1, за исключением ограничений на мощности предприятий. Мощность первого предприятия равна заданному объему, а мощности второго и третьего предприятий не должны превышать заданных объемов:

$$Y_1 = 90, \ 0 \le Y_2 \le 50, \ 0 \le Y_3 \le 35.$$

В результате работы алгоритма за 461 итерацию с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ получены:

— оптимальное разбиение множества потребителей Ω на три зоны обслуживания каждым из трех предприятий с размещением центров подмножеств для модельной задачи 2 (рис. 3);

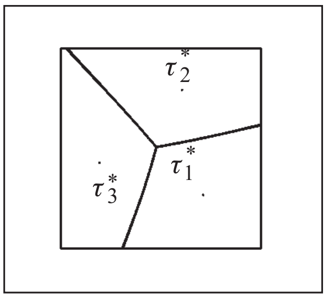

Fig. 3

— оптимальные координаты размещенных предприятий

$\tau_1^* = (5{,}00;\, 5{,}00)$, $\tau_2^* = (1{,}10;\, 8{,}92)$, $\tau_3^* = (8{,}98;\, 1{,}07)$;

— оптимальные мощности каждого из трех предприятий

$$Y_1^* = 90{,}00; \ Y_2^* = 4{,}99; \ Y_3^* = 4{,}99;$$

— минимальное значение прямого функционала (29) $F_* \approx 729571{,}1$;

— максимальное значение функционала двойственной задачи $G^* \approx 729585{,}9$.

Модельная задача 3. Для сравнения с модельной задачей 2 решена задача с теми же данными, только при заданных заранее фиксированных координатах предприятий:

$$\tau_1^{(0)} = (2;2),\ \tau_2^{(0)} = (3;9),\ \tau_3^{(0)} = (5;7).$$

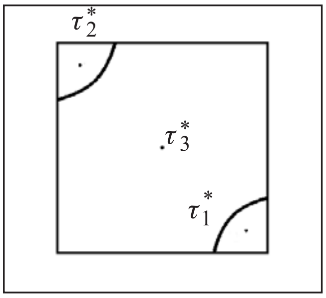

Fig. 4

Получены следующие результаты за 136 итераций:

— оптимальное разбиение множества потребителей Ω на три зоны обслуживания каждым из трех предприятий без размещения центров подмножеств для модельной задачи 3 (рис. 4);

— оптимальные мощности каждого из трех предприятий

$$Y_1^* = 90{,}00;\ Y_2^* = 5{,}00;\ Y_3^* = 5{,}00;$$

— минимальное значение прямого функционала (29) $F_* \approx 729720{,}8$;

— максимальное значение функционала двойственной задачи $G^* \approx 729723{,}2$.

Результаты решений модельных задач 1–3:

1) суммы оптимальных мощностей предприятий в каждой задаче равны суммарной мощности $S = 100$ (см. постановку задачи A, условия разрешимости (1));

2) оптимальная мощность первого предприятия в модельных задачах 2, 3 соответствует ограничению в виде равенства ≈ 90;

3) оптимальное значение целевого функционала прямой задачи при оптимальном размещении предприятий (модельная задача 2) меньше (что естественно), чем в случае, когда координаты предприятий фиксированы (модельная задача 3).

Численные эксперименты проводились также для следующих ограниченных выпуклых на [0; 100] функций $\varphi_i(Y_i)$, $i = 1, \ldots, 3$: монотонно возрастающих на [0; 100] функций $\varphi_i(Y_i) = Y_i^2$; $\varphi_i(Y_i) = 0{,}5 \cdot Y_i^{3/2}$; $\varphi_i(Y_i) = e^{(0{,}1 \cdot Y_i)}$; $\varphi_i(Y_i) = Y_i^4$ и монотонно убывающей на [0; 100] функций $\varphi_i(Y_i) = (Y_i - 100)^2$.

Описанный алгоритм реализован в среде Microsoft Visual Studio языком C++ с применением технологии разработки программного интерфейса WinAPi. Алгоритм состоит из двух частей: интерфейсной части, реализованной языком Visual C++ 6.0, и вычислительной части, которая реализует r-алгоритм Шора минимизации функций, написанной на языке Visual Fortran 6.5.

Замечание 3. По результатам многочисленных вычислительных экспериментов можно заключить, что описанный алгоритм работает и для случая, когда $\varphi_i(\cdot)$, $i = 1, \ldots, N$, — ограниченные вогнутые функции своего аргумента. Тогда двойственная задача (6) приводится вместо вида (17) к следующему:

$$\max_{\psi \in \Lambda} \min_{\tau \in \Omega^N} \min_{Y \in U} G_2(Y, \tau, \psi).$$

Численные эксперименты проводились, в частности, для таких ограниченных вогнутых на [0;100] функций $\varphi_i(\cdot)$, $i = 1, \ldots, 3$, как монотонно возрастающие на [0;100]: $\varphi_i(Y_i) = Y_i^{1/2}$, $\varphi_i(Y_i) = Y_i^{3/2}$ и монотонно убывающие на [0;100]: $\varphi_i(Y_i) = \cos\left(\dfrac{\pi \cdot Y_i}{200}\right)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулирована непрерывная однопродуктовая нелинейная задача оптимального разбиения множества Ω из n-мерного евклидова пространства на его непересекающиеся подмножества с размещением их центров при ограничениях в виде равенств и неравенств для случая выпуклого целевого функционала. Приводится обоснование метода решения этой задачи, который основан на переходе от исходной нелинейной бесконечномерной задачи оптимизации через функционал Лагранжа с применением теории Куна-Таккера к конечномерной с негладким целевым функционалом, для минимизации которого применяется метод обобщенных псевдоградиентов с растяжением пространства, близкий к r-алгоритму Шора. В отличие от линейных задач оптимального разбиения множеств, рассмотренных в [1], для которых оптимальное решение исходной бесконечномерной задачи удается найти в явном виде, в нелинейном случае отыскание оптимального решения исходной бесконечномерной задачи сводится к отысканию решения некоторого вспомогательного операторного уравнения с параметрами.

На основе предложенного метода разработан и программно реализован алгоритм, который проиллюстрирован на модельных задачах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Киселева Е.М., Шор Н.З. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения. — К.: Наук. думка, 2005. — 564 с.
2. Ус С.А. Решение одного класса бесконечномерных задач: Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. — Харьков, 1992. — 16 с.
3. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1981. — 400 с.
4. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. — М.: Наука, 1974. — 480 с.
5. Трухаев Р.Н., Хоменюк В.В. Теория неклассических вариационных задач. — Л.: ЛГУ, 1971. — 168 с.
6. Шор Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложение. — К.: Наук. думка, 1979. — 200 с.
7. Федоров В.В. Численные методы максимина. — М.: Наука, 1979. — 280 с.

Поступила 03.07.2007