УДК 519.85

Л.Н. КОЛЕЧКИНА, Е.А. РОДИОНОВА

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ НА МНОЖЕСТВЕ ПОЛИРАЗМЕЩЕНИЙ

Ключевые слова: *многокритериальные комбинаторные задачи, полиразмещения, эффективная альтернатива, Парето-оптимальные решения.*

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время актуальным становится исследование свойств дискретных задач [1–8] и разработка методов их решения. Достаточно важным при этом является исследование класса комбинаторных задач, выделяемых из дискретных.

При решении практических задач часто используются математические модели комбинаторных оптимизационных задач [3, 4, 8]. В зависимости от сложности прикладной задачи одновременно может рассматриваться не один, а несколько критериев оптимизации, которые не могут быть объединены в один. Часто возникает необходимость учитывать комбинаторные свойства множества допустимых значений. Таким образом, является целесообразным объединение поиска решений задач многокритериальной оптимизации с учетом комбинаторных свойств области допустимых значений. Вышеупомянутые проблемы являются сложными и малоисследованными, поэтому вопрос их изучения актуален.

Исследования относительно моделирования задач в области экономики и техники, использование моделей дискретной многокритериальной оптимизации были проведены в работах [1, 2, 5, 7]. Изучены свойства комбинаторных оптимизационных задач с векторным критерием, вопросы их сложности, решаемости, устойчивости, алгоритмические проблемы их решения. Однако теоретические исследования и полученный опыт показали большую сложность задач дискретной, в частности комбинаторной, оптимизации.

В настоящее время исследуются свойства комбинаторных множеств и разрабатываются методы решения задач комбинаторной оптимизации. Однако обычно исследованными являются возможности их применения к определенному классу задач. Вопрос поиска общих подходов и методов решения задач со многими критериями на комбинаторном множестве, в частности на множестве полиразмещений, считается неисследованным, а поэтому актуальным.

Статья является продолжением исследований, которые отображены в работах [1–8], и посвящена рассмотрению класса задач многокритериальной оптимизации на комбинаторном множестве полиразмещений и разработке подхода к их решению.

I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим многокритериальные задачи с учетом комбинаторных свойств области допустимых решений. На практике такие задачи возникают при необходимости формализации отдельных условий в виде критериев (объединение этих критериев является невозможным), оптимальные значения которых необходимо найти.

Рассмотрим многокритериальную безусловную задачу на полиразмещениях. Обозначим N_m, N_s множество m и s первых натуральных чисел соответственно: $N_m = \{1, \ldots, m\}$, $N_s = \{1, \ldots, s\}$. Оптимизируемые критерии представляются набором функций:

$$\begin{gathered} f_1(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j^1 x_j \to \min \\ f_2(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j^2 x_j \to \min \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_s(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j^s x_j \to \min \\ f_{s+1}(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j^{s+1} x_j \to \max \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j^m x_j \to \max \end{gathered} \tag{1}$$

Следовательно, s функций из m должны минимизироваться и $m - s$ функций максимизироваться, хотя при решении практических задач часто возникает необходимость в уменьшении одних критериев и увеличении других. В частном случае возможна ситуация, когда все функции максимизируются или минимизируются.

Набор функций (1) целесообразно представить в виде вектор-функции

$$F\,(-f_1, \ldots, -f_s, f_{s+1}, \ldots, f_m), \tag{2}$$

максимум которой необходимо найти.

Условие принадлежности решений комбинаторному множеству может возникать из дополнительных условий, которые налагаются на переменные в самой постановке задачи. В математической модели задачи (1) на решение налагается условие принадлежности множеству полиразмещений в виде

$$x = (x_1, \ldots, x_k) \in E_{\eta n}^{ks}(G, H). \tag{3}$$

Как известно [8], множество полиразмещений равно множеству вершин многогранника полиразмещений: $E_{\eta n}^{ks}(G, H) = \operatorname{vert} \Pi_{\eta n}^{ks}(G, H)$, выпуклая оболочка которого $\Pi_{\eta n}^{ks}(G, H)$ описывается в виде

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j \in \omega^i} x_j \ge \sum^{|\omega^i|} g_j^{M_i}, \\ \displaystyle\sum_{j \in \omega^i} x_j \le \sum^{|\omega^i|} g_{\eta_i - j+1}^{M_i} \quad \forall\, \omega^i \subset M_i \quad \forall\, i \in N_s. \end{cases} \tag{4}$$

С учетом всех вышеуказанных условий задачу можно сформулировать следующим образом: найти множество значений (3), которые является оптимальными для функций (2). Такая задача называется комбинаторной многокритериальной безусловной задачей на множестве полиразмещений. Если на множество допустимых решений налагаются дополнительные условия D вида

$$A_{ij} x_j \le b_j, \quad \text{где} \quad i \in N_m, \quad j \in N_k, \tag{5}$$

то задача (2), (3), (5) является комбинаторной многокритериальной на полиразмещениях с дополнительными ограничениями:

$$X = D \cap \Pi_{\eta n}^{ks}(G, H). \tag{6}$$

2. ПОДХОД К РЕШЕНИЮ КОМБИНАТОРНЫХ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

При решении многокритериальных комбинаторных задач возникает вопрос определения эффективного решения, который обусловлен сравнением альтернатив на множестве целевых функций. Следует отметить, что такое решение может оказаться неоптимальным ни для одной из целевых функций, однако оно является наилучшим компромиссным решением с учетом всех целевых функций одновременно.

Определение 1[5]. Решение является эффективным, если на множестве допустимых решений, которые определяются условием (4), (5), не существует такого решения $\bar{x}$, для которого были бы справедливы неравенства

$$f_i(\bar{x}) \ge f_i(x_0) \quad \forall\, i \in I_1, \tag{7}$$

$$f_i(\bar{x}) \le f_i(x_0) \quad \forall\, i \in I_2$$

и хотя бы одно из них было строгим.

Это означает, что ни одно из допустимых решений не может улучшить значение некоторой целевой функции, не ухудшая при этом хотя бы одну из оставшихся целевых функций. Эффективную альтернативу называют также оптимальной по Парето [5]. Все такие альтернативы составляют $P(F, X)$ — множество Парето-оптимальных решений [6, 7]. Согласно [7] для любого $x \in X$ справедливо утверждение

$$x \in P(F, X) \Leftrightarrow \{y \in X \mid F(y) \ge F(x), F(y) \ne F(x)\} = \varnothing,$$

где F — вектор-функция (2), а X — множество допустимых значений функции, которое определяется условиями (6) задачи.

Для определения множества эффективных решений задачи комбинаторной многокритериальной оптимизации используем следующую теорему.

Теорема 1 [8]. Если $x^* = (x_1^*, \ldots, x_l^*) = (X_1^*, \ldots, X_i^*, \ldots, X_s^*)$, где $X_j^* = (x_{m_j+1}^*, \ldots, x_{m_j+k_j}^*)$, то выполняются условия

$$g_1^{M_i} \le \ldots \le g_{\eta_i}^{M_i}, \tag{8}$$

$$c_{m_j+1} \ge \ldots \ge c_{m_j+s_j} \ge 0 > c_{m_j+s_j+1} \ge \ldots \ge c_{m_j+k_j}, \tag{9}$$

$$m_0 = 0, \quad k_0 = 0, \quad m_j = m_{j-1} + k_{j-1} \quad \# j \in N_s. \tag{10}$$

Тогда минимум функции $f(x)=\sum_{j=1}^{k} c_j x_j$ на множестве полиразмещений $E_{\eta n}^{ks}(G,H)$ достигается в точке $x^*=(x_1,\ldots,x_k)\in E_{\eta n}^{ks}(G,H)$, которая удовлетворяет условиям

$$x^*_{m_j+1}=g_i^{M_j} \quad \forall\, i\in N_{s_j};\quad x^*_{m_j+s_j+1}=g_{\eta_i-r_j+i}^{M_j} \quad \forall\, i\in M_{r_j},\quad \forall\, j\in N_s, \tag{11}$$

где r_j, s_j удовлетворяют условиям

$$r_j, s_j\in N_{k_j}^0,\quad r_j+s_j=k_j \quad \forall\, j\in N_s. \tag{12}$$

Как следствие предыдущей теоремы, сформулируем в виде теоремы критерий оптимальности безусловной многокритериальной задачи на множестве полиразмещений.

Теорема 2. Пусть B_i — множество перестановок $\beta^i=(\beta_1^i,\ldots,\beta_k^i)$, принадлежащих множеству $E_k(N_k)$, которые удовлетворяют условию

$$C^i_{\beta_1^i}\ge C^i_{\beta_2^i}\ge\ldots\ge C^i_{\beta_s^i}\ge 0> C^i_{\beta_{s+1}^i}\ge\ldots\ge C^i_{\beta_k^i}.$$

Тогда множество решений безусловной многокритериальной задачи непусто, если непусто множество, являющееся пересечением множеств B_i, найденных для критериев (1):

$$\bigcap_{i=1}^{m} B_i=B=\varnothing. \tag{13}$$

Для любой перестановки $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_k)\in B$ точка $x^*=(x_1,\ldots,x_k)\in$ $\in E_{\eta n}^{ks}(G,H)$ в виде (11) при условиях (8)—(10), (12) принадлежит множеству решений.

Рассмотрим следующий пример, иллюстрирующий теорему 2.

Пусть дано мультимножество $G=\{1,2,3,3,3,4,5,6,7\}$, состоящее из $\eta=9$ элементов. Следовательно, $N_9=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Пусть $s=3$, выберем разбиение N_9 на множества $K_1=\{1,2,3\}$, $K_2=\{4,6\}$, $K_3=\{5,7,8,9\}$, зададим $k=4$, $k_1=1$, $k_2=1$, $k_3=2$. Тогда множество полиразмещений представляется как $E_{97}^{43}(G,H)$.

Задан следующий набор функций:

$$\begin{cases} f_1=5x_1+x_2+10x_3-x_4\to\min,\\ f_2=2x_1+x_2+3x_3-2x_4\to\min,\\ f_3=3x_1+2x_2+4x_3-x_4\to\min,\\ f_4=7x_1+5x_2+7x_3-3x_4\to\min. \end{cases}$$

Очевидно, что $C_3^i\ge C_1^i\ge\ldots\ge C_2^i\ge 0> C_4^i$ # $i\in N_4$. Условие теоремы 2 выполняется, а следовательно, точка $x^*=(3,3,1,7)\in E_{97}^{43}(G,H)$ является оптимальной для каждой из функций.

Как упоминалось ранее, комбинаторные многокритериальные задачи являются достаточно актуальными при решении ряда прикладных задач, но существующие разработанные методы не полностью адекватно могут дать решение таких задач. Необходим новый подход к их решению. Рассмотрим один из возможных подходов к решению таких задач, являющийся комбинацией двух ранее рассмотренных методов: метода ограничений [2] и метода комбинаторного отсечения [3].

Пусть задано некоторое множество целевых функций, записанное в виде вектор-функции (2),

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{k} c_{ij} x_j, \quad j \in N_m, \tag{14}$$

причем s первых функций нужно минимизировать, а следующие $m-s$ функций — максимизировать. На решение наложены ограничения вида (5), а также условие принадлежности множеству полиразмещений (3).

Алгоритм решения задачи

1. Вводим целочисленную переменную q, полагая $q=0$.

2. Записываем условие принадлежности множеству полиразмещений в виде системы неравенств (4).

3. Объединяем систему (4) с системой линейных дополнительных ограничений задачи (5).

4. С использованием теоремы 1 определяем x_i^0 — решение, которые принадлежат множеству полиразмещений, и оптимизируем i-ю целевую функцию $x_{i\max}$ $(x_{i\min})$ — решения, которые максимизируют (минимизируют) соответствующий критерий на допустимом множестве решений.

5. Записываем следующие отображения:

а) для функций из набора (1), которые минимизируются:

$$W_i(f_i(X)) = \frac{\sum_{j=1}^{k} c_{ij} x_j - \sum_{j=1}^{k} c_{ij} x_j^0}{\sum_{j=1}^{k} c_{ij} x_{i\max} - \sum_{j=1}^{k} c_{ij} x_j^0} \quad \forall\, i \in N; \tag{15}$$

б) для функций из набора (1), которые максимизируются:

$$W_i(f_i(X)) = \frac{\sum_{j=1}^{k} c_{ij} x_j^0 - \sum_{j=1}^{k} c_{ij} x_j}{\sum_{j=1}^{k} c_{ij} x_j^0 - \sum_{j=1}^{k} c_{ij} x_{i\min}} \quad \forall\, i \in N_{m-s}. \tag{16}$$

Комментарии. Компромиссным решением данной многокритериальной задачи будет такое эффективное решение x, для которого относительные отклонения одинаковые и минимальные, т.е. выполняется условие

$$\rho_1 W_1(X) = \rho_2 W_2(X) = \ldots = \rho_m W_m(X) = k_{0\min}. \tag{17}$$

6. Записываем следующую однокритериальную задачу линейного программирования:

$$k_0 = x_{n+1} \to \min$$

при условиях

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{k} c_{ij}x_j \le \sum\limits_{j=1}^{k} c_{ij}x_j^0 + \dfrac{k_0}{\rho_i}\left(\sum\limits_{j=1}^{k} c_{ij}x_{i\max} - \sum\limits_{j=1}^{k} c_{ij}x_j^0 \right) \quad \forall\, i \in N_s, \\ \sum\limits_{j=1}^{k} c_{ij}x_j \ge \sum\limits_{j=1}^{k} c_{ij}x_j^0 - \dfrac{k_0}{\rho_i}\left(\sum\limits_{j=1}^{k} c_{ij}x_j^0 - \sum\limits_{j=1}^{k} c_{ij}x_{i\min} \right) \quad \forall\, i \in N_{m-s}, \\ a_{ij}x_j \le b_j, \quad i \in J_n, \\ \sum\limits_{j\in\omega^i} x_j \ge \sum\limits^{|\omega^i|} g_j^{N_i}, \\ \sum\limits_{j\in\omega^i} x_j \ge \sum\limits^{|\omega^i|} g_{\eta_i - j + 1}^{N_i}. \end{cases} \tag{18}$$

7. Решаем задачу (18) двойственным симплексным методом.

8. Проверяем принадлежность вектора-решения $x = (x_1, \ldots, x_k)$ множеству (4). Если $x = (x_1, \ldots, x_k) \in E_{\eta n}^{ks}(G, H)$, то решение найдено и алгоритм завершен, иначе переходим к п. 9.

9. Проверяем значение q. Если $q > 1$, то сделать переход на шаг 11, иначе — переход на шаг 10.

10. Увеличить q на единицу. Добавить к системе ограничений (18) сформированное неравенство-отсечение согласно [3]

$$\frac{x_{i_1}}{\Theta_{i_1}} + \frac{x_{i_2}}{\Theta_{i_2}} + \ldots + \frac{x_{i_r}}{\Theta_{i_r}} \ge 1 \tag{19}$$

в виде уравнения
$$-\frac{x_{i_1}}{\Theta_{i_1}} - \frac{x_{i_2}}{\Theta_{i_2}} - \ldots - \frac{x_{i_r}}{\Theta_{i_r}} + x_{n+q} = -1, \tag{20}$$

введя вспомогательную переменную $x_{n+q} \ge 0$, где $i_1, \ldots, i_\gamma$ — номера небазисных переменных в последней точке x^*, γ — их количество, а Θ_{ij} $\forall\, j \in N_r$ определяется по формуле
$$\Theta_{ij} = \min_{j:\, a_{ij} > 0} \frac{b_i}{a_{ij}} = \frac{b_i}{a_{ij}}. \tag{21}$$

Переходим на шаг 6.

11. Проверяем значение Θ_{n+q-1} (Θ_{n+q-1} определяется по формуле (21)). Если $\Theta_{n+q-1} \ne 0$, переходим на шаг 10. Если $\Theta_{n+q-1} = 0$, то в уравнении (20), присоединенном к системе уравнении (4), (5), заменить введенную вспомогательную переменную нулем. Перейти на шаг 6 алгоритма.Для иллюстрации предложенного алгоритма решим следующие задачи.

Пример 1. Пусть задано мультимножество $G = \{2, 2, 3, 3, 4\}$, которое состоит из пяти элементов. Следовательно, $N_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Пусть задано $s = 2$, выберем разбиение N_5 на множества $K_1 = \{1, 3, 5\}$, $K_2 = \{2, 4\}$. Пусть задано $k = 2$ и выбраны $k_1 = 1$, $k_2 = 1$. Тогда множество формируется в виде $H = \{(1, 2); (1, 4); (3, 2); (3, 4); (5, 2); (5, 4)\}$. Поэтому множество полиразмещений будет иметь следующий вид: $E_{53}^{22}(G, H) = \{(2, 2); (2, 3); (3, 2); (3, 3); (4, 2); (4, 3)\}$.

Математическая постановка. Найти множество значений $x \in E_{53}^{22}(G, H)$, которые являются оптимальными для функций

$$F_1 = 3x_1 + 5x_2 \to \max,$$

$$F_2 = -2x_1 - 3x_2 \to \min.$$

Решение. Запишем условие принадлежности решения множеству полиразмещений в виде неравенств $x_1 \geq 2$; $-x_1 \geq -4$; $x_2 \geq 2$; $-x_2 \geq -3$; $x_1 + x_2 \geq 4$; $-x_1 - x_2 \geq -7$.

Согласно формулам (15), (16) преобразуются целевые функции. Тогда определяются минимальное и максимальное значения каждой из них. Для коэффициентов первого критерия F_1 справедливо соотношение коэффициентов $0 \leq c_1 \leq c_2$, а следовательно, $F_1(x_1^0) = F_1(4, 3) = 27$, $F_1(x_{1\min}) = F_1(2, 2) = 16$.

Аналогично определяем максимальное значение для функции $F_2 : F_2(x_2^0) = -17$, $F_2(x_{2\max}) = -10$.

В результате преобразования имеем следующие функции:

$$W_1 = \frac{1}{2}\,\frac{27 - 3x_1 - 5x_2}{27 - 16} = \frac{27 - 3x_1 - 5x_2}{22} \leq x_3,$$

$$W_2 = \frac{1}{2}\,\frac{-2x_1 - 3x_2 + 17}{-10 + 17} = \frac{-2x_1 - 3x_2 + 17}{14} \leq x_3.$$

Согласно вышеизложенному методу выполняется переход к следующей задаче:

минимизировать x_3 при условиях $3x_1 + 5x_2 + 22x_3 \geq 27$; $2x_1 + 3x_2 + 14x_3 \geq 17$; $x_1 \geq 2$; $-x_1 \geq -4$; $x_2 \geq 2$; $-x_2 \geq -3$; $x_1 + x_2 \geq 4$; $-x_1 - x_2 \geq -7$.

Переход к двойственной задаче:

$$27y_1 + 17y_2 + 2y_3 - 4y_4 + 2y_5 - 3y_6 + 4y_7 - 7y_8 \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 + y_3 - y_4 + y_7 - y_8 \leq 0, \\ 5y_1 + 3y_2 + y_5 - y_6 + y_7 - y_8 \leq 0, \\ 22y_1 + 14y_2 \leq 1. \end{cases}$$

В результате решения задачи двойственным симплекс-методом получаем следующие значения: $x_1 = 4$, $x_2 = 3$; $x_3 = 0$; $x = (4, 3) \in E_{54}^{22}$ — искомое решение.

Пример 2. Задано мультимножество $G = \{2, 2, 2, 3, 3, 4\}$, для которого $N_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Выбираются $K_1 = \{1, 2, 4, 6\}$, $K_2 = \{3, 5\}$, $k_1 = 2$, $k_2 = 1$. Тогда

$$H = \{(1, 2, 3); (1, 2, 5); (2, 1, 3); (2, 1, 5); (1, 4, 3); (1, 4, 5); (4, 1, 3); (4, 1, 5);$$

$$(1, 6, 3); (1, 6, 5); (6, 1, 3); (6, 1, 5); (2, 4, 3); (2, 4, 5); (2, 4, 3)\ (4, 2, 5);$$

$$(2, 6, 3); (2, 6, 5); (2, 6, 3); (6, 2, 5); (4, 6, 3); (4, 6, 5); (6,4,3); (6,4,5)\}.$$

Множество полиразмещений имеет вид

$$E_{63}^{32}(G, H) = \{(2, 2, 2); (2, 2, 3); (2, 2, 2); (2, 2, 3); (2, 3, 2); (2, 3, 3); (3, 2, 2);$$

$$(3, 2, 3); (2, 4, 2); (2, 4, 3); (4, 2, 2); (2, 4, 3); (2, 3, 2); (2, 3, 3); (3, 2, 2);$$

$$(3,2,3);\ (2,4,2);\ (2,4,3);\ (4,2,2);\ (4,2,3);\ (3,4,2);\ (3,4,3);\ (4,3,3)\} =$$
$$= \{(2,2,2);\ (2,2,3);\ (2,3,2);\ (2,3,3);\ (3,2,2);\ (3,2,3);\ (2,4,2);\ (2,4,3);$$
$$(4,2,2);\ (4,2,3);\ (3,4,2);\ (3,4,3);\ (4,3,3)\}.$$

Математическая постановка. Найти множество значений $x \in E_{63}^{32}(G, H)$, которые являются оптимальными для функций

$$F_1 = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max,$$
$$F_1 = x_1 - 3x_2 + 3x_3 \to \max.$$

Решение. Принадлежность решения множеству $E_{63}^{32}(G, H)$ представляем в виде следующей системы: $x_1 \ge 2$; $-x_1 \ge -4$; $x_2 \ge 2$; $-x_2 \ge -4$; $x_3 \ge 2$; $-x_3 \ge -3$; $x_1 + x_2 \ge 4$; $-x_1 - x_2 \ge -8$; $x_1 + x_3 \ge 4$; $-x_1 - x_3 \ge -7$; $x_2 + x_3 \ge 4$; $-x_2 - x_3 \ge -7$; $x_1 + x_2 + x_3 \ge 6$, $-x_1 - x_2 - x_3 \ge -11$.

Используя теорему 1 и формулы (15), (16), преобразуем функции к виду

$$W(F_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{14 - x_1 - 2x_2 - x_3}{14 - 8} = \frac{14 - x_1 - 2x_2 - x_3}{12} \le x_4,$$

$$W(F_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{7 - x_1 + 3x_2 - 3x_3}{7 + 4} = \frac{7 - x_1 + 3x_2 - 3x_3}{22} \le x_4.$$

Переходим к следующей задаче: $f = x_4 \to \min$ при условиях $x_1 + 2x_2 + x_3 + 12x_4 \ge 14$; $x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 22x_4 \ge 7$; $x_1 \ge 2$; $-x_1 \ge -4$; $x_2 \ge 2$; $-x_2 \ge -4$; $x_3 \ge 2$; $-x_3 \ge -3$; $x_1 + x_2 \ge 4$; $-x_1 - x_2 \ge -8$; $x_1 + x_3 \ge 4$; $-x_1 - x_3 \ge -7$; $x_2 + x_3 \ge 4$; $-x_2 - x_3 \ge -7$; $x_1 + x_2 + x_3 \ge 6$; $-x_1 - x_2 - x_3 \ge -11$.

Перейдем к двойственной задаче

$$14y_1 + 7y_2 + 2y_3 - 4y_4 + 2y_5 - 4y_6 + 2y_7 - 3y_8 + 4y_9 - 8y_{10} +$$
$$+ 4y_{11} - 7y_{12} + 4y_{13} - 7y_{14} + 6y_{15} - 11y_{16} \to \max$$

при условии

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 - y_4 + y_9 - y_{10} + y_{11} - y_{12} + y_{15} - y_{16} \le 0, \\ 2y_1 - 3y_2 + y_5 - y_6 + y_9 - y_{10} + y_{13} - y_{14} + y_{15} - y_{16} \le 0, \\ y_1 + 3y_2 + y_7 - y_8 + y_{11} - y_{12} + y_{13} - y_{14} + y_{15} - y_{16} \le 0, \\ 12y_1 + 22y_2 \le 1. \end{cases}$$

В результате решения задачи симплексным методом имеем $x_1 = 4$; $x_2 = 2{,}8$; $x_3 = 3$; $x_4 = 0{,}1$.

Выполнено отсечение и получена точка $x^* = (4, 3, 3)$, оптимальная для функций.

Замечание. Описанный алгоритм сходится к оптимальному решению за конечное число шагов. Поскольку множество допустимых решений X ограничено, то задача (2), (4), (5) имеет конечное оптимальное решение.

Таким образом, построен и обоснован один из возможных подходов к решению многокритериальных задач. Разработан и реализован алгоритм решения. Проведены численные эксперименты. Последующие исследования данной работы планируется проводить в направлении изучения эффективности существующего метода решения многокритериальных задач и разработки новых методов решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения, исследования. — К.: Наук. думка, 2003. — 260 с.
2. Зайченко Ю.П. Исследование операций. Нечеткая оптимизация: Учеб. пособие. — Киев: Вища шк., 1991. — 198 с.
3. Ємець О.О., Колєчкіна Л.М. Задачџ комбџнаторноВ оптимџзацџВ з дробово-лџнџйними цџльовими функцџями. — К.: Наук. думка, 2005. — 113 с.
4. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорџя џ методи евклџдовоВ комбџнаторноВ оптимџзацџВ. — КиВв, 1993. — 188 с.
5. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. — М.: Наука, 1982. — 256 с.
6. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. — Киев: Наук. думка, 1995. — 170 с.
7. Лебедева Т.Т., Семенова Н.В., Сергиенко Т.И. Устойчивость векторных задач целочисленной оптимизации: взаимосвязь с устойчивостью множеств оптимальных и неоптимальных решений // Кибернетика и системный анализ. — 2005. — № 4. — С. 90—100.
8. Стоян Ю.Г., Ємець О.О., Ємець Є.М. Оптимџзацџя на полџрозмџщеннях: теорџя та методи. — Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2005. — 103 с.

Поступила 05.04.2007