

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОНВЕКТИВНОЙ ДИФФУЗИИ

Ключевые слова: задача конвективной диффузии, аппроксимация, устойчивость, сходимост, монотонность, численная вязкость, численная дисперсия.

ВВЕДЕНИЕ

Исследуем свойства схемы [1] для определения возможности ее применения для решения задачи прогноза полей метеорологических величин, учитывая особенности, связанные с решаемой задачей.

Во-первых, уравнения модели циркуляции атмосферы нелинейные, что вызывает серьезные трудности для определения численной устойчивости схемы. Так, исследование устойчивости схемы для линеаризованного или «замороженного» аналогов уравнения дает лишь необходимые условия ее устойчивости для нелинейного уравнения.

Во-вторых, в целях адекватного описания волновых процессов в атмосфере следует учитывать два главных требования к численному решению: оно должно правильно воспроизводить изменения амплитуд волн и правильно описывать изменение фазы колебаний, фазовые и групповые скорости волновых возмущений [2–4].

В-третьих, специфика рассматриваемой задачи, т.е. прогноз метеорологических величин, особенно остро выдвигает требование к эффективности численного алгоритма — разумные временные затраты при хорошей точности решения.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим начально-краевую задачу конвективной диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \eta(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

$$u(0, t) = a(t), \quad u(1, t) = b(t), \quad t > 0, \quad (3)$$

где $v = \text{const} \geq 0$, $\mu = \text{const} \geq 0$, $f = f(x, t)$.

Ниже будем полагать, что параметр уравнения (1) $f(x, t)$ и параметры начальных и граничных условий (2), (3) достаточно гладкие и согласованы так, что сформулированная задача имеет единственное решение $u(x, t)$.

Проведем дискретизацию задачи (1)–(3) по схеме, описанной в [1]. Для этого введем пространственно-временную сетку: поделим отрезок $[0, 1]$ на J неравных частей точками x_j ($0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{J-1} < x_J = 1$) и обозначим расстояния между ними $h_j = x_{j+1} - x_j$, $j = 0, 1, \dots, J-1$; поделим отрезок $[0, T]$ на N равных частей точками $t^n = n\tau$, $n = 0, 1, \dots, N$, с шагом $\tau = TN^{-1}$. В результате задача (1)–(3) примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{v}{h_{j-1} + h_j} \left(h_{j-1} \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h_j} + h_j \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h_{j-1}} \right) = \\ & = f_j^n + \frac{2\mu}{h_{j-1} + h_j} \left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h_j} - \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h_{j-1}} \right) \\ & j=1, \dots, J-1, \quad n=1, \dots, N, \end{aligned} \quad (4)$$

$$u_j^0 = \eta_j, \quad j=0, \dots, J, \quad (5)$$

$$u_0^n = a^n, \quad u_J^n = b^n, \quad n=1, \dots, N. \quad (6)$$

При рассмотрении некоторых вопросов понадобится другое дискретное представление уравнения (1), поэтому преобразуем разностное уравнение (4) к виду

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= (p_j u_{j-1}^{n+1} - q_j u_{j+1}^n + (1 + q_j) u_j^n + \tau f_j^n) / (1 + p_j), \\ & j=1, \dots, J-1, \quad n=1, \dots, N, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$p_j = \tau \beta_j = \frac{\tau(h_j v + 2\mu)}{h_{j-1}(h_{j-1} + h_j)} \geq 0, \quad q_j = \tau \alpha_j = \frac{\tau(h_{j-1} v - 2\mu)}{h_j(h_{j-1} + h_j)}. \quad (8)$$

АППРОКСИМАЦИЯ

Поскольку начальное условие (2) и краевые условия (3) в конечно-разностном представлении (4)–(6) задаются точно, то исследование аппроксимации задачи (1)–(3) сводится к исследованию аппроксимации уравнения (1) дискретным уравнением (4).

Найдем первое дифференциальное приближение (ПДП) для (4) [5]. Для этого произведем разложение функции $u(x, t)$ по формуле Тейлора в окрестности точки (x_j, t^n) :

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n + \tau \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_j^n + \frac{\tau^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_j^n + \frac{\tau^3}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right)_j^n + o(\tau^3), \\ u_{j+1}^n &= u_j^n + h_j \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_j^n + \frac{h_j^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j^n + \frac{h_j^3}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_j^n + o(h_j^3), \\ u_{j-1}^{n+1} &= u_j^n + \tau \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_j^n - h_{j-1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_j^n + \frac{\tau^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_j^n - \tau h_{j-1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right)_j^n + \\ & + \frac{h_{j-1}^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j^n + \frac{\tau^3}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right)_j^n - \frac{\tau^2}{2} h_{j-1} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} \right)_j^n + \frac{h_{j-1}^2}{2} \tau \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right)_j^n - \\ & - \frac{h_{j-1}^3}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_j^n + o \left(\sum_{k=0}^3 \tau^k h_{j-1}^{3-k} \right). \end{aligned}$$

Подставив эти ряды в (4) и сделав преобразования, получим ПДП в Г-форме:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\tau(vh_j + 2\mu)}{h_{j-1} + h_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \left(\frac{\mu(h_j - h_{j-1})}{3} - \frac{1}{6} v h_{j-1} h_j \right) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\mu\tau}{h_{j-1} + h_j} \left(h_{j-1} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - \tau \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \right) + o(\tau + h_j + h_{j-1}). \quad (9)$$

Как видно, имеет место условная аппроксимация первого порядка по пространству и времени. Условие аппроксимации запишем

$$\frac{\tau}{h_{j-1} + h_j} \rightarrow 0 \text{ при } \tau \rightarrow 0 \text{ и } (h_{j-1} + h_j) \rightarrow 0, \quad (10)$$

поэтому конечно-разностная схема (4)–(6) условно согласована с исходной задачей (1)–(3). В частности, как следует из (9), для уравнения чистой конвекции ($\mu = 0$) согласованность становится безусловной.

Обобщим задачу (1)–(3) заменой правого краевого условия первого рода (3) условием третьего рода

$$u(0, t) = a(t), \quad (11)$$

$$\gamma_1 u(1, t) + \varepsilon_1 u'_x(1, t) = b(t). \quad (12)$$

Аппроксимируем производную в условии (12) односторонней двухточечной разностью

$$\gamma_1 u_J^{n+1} + \varepsilon_1 \frac{u_J^{n+1} - u_{J-1}^{n+1}}{h_{J-1}} = b^{n+1}, \quad (13)$$

что не изменит ни порядка аппроксимации задачи (1), (2), (11), (12), ни условия согласованности (10), но такое обобщение повлияет на алгоритм решения задачи. Действительно, как и в случае первой краевой задачи, используется схема (7) для узлов $j=1, \dots, J-1$. А для определения значения в последнем узле $j=J$ воспользуемся краевым условием (13)

$$u_J^{n+1} = \frac{b^{n+1} h_{J-1} + \varepsilon_1 u_{J-1}^{n+1}}{h_{J-1} \gamma_1 + \varepsilon_1}.$$

Таким образом, принципиальных сложностей в применении схемы (7) для случая краевых условий третьего рода не возникает. Единственное неудобство — алгоритм решения уже не является однородным.

УСТОЙЧИВОСТЬ

Используем спектральный признак для нахождения необходимого условия устойчивости схемы (5)–(7). Положим, что $f(x, t) \equiv 0$. Решение будем искать в виде функции

$$u_j^n = u_j^0 \lambda^n \exp(ikx_j) = u_j^0 \lambda^n \exp\left(ik \left(x_0 + \sum_{s=0}^{j-1} h_s \right) \right),$$

где k — волновое число гармоники; $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица; j и n — номера пространственного и временного узлов сетки [3].

Подставив это решение в (7), после некоторых преобразований получим

$$\lambda(k) = \frac{\left(1 + 2q_j \sin^2\left(\frac{k}{2} h_j\right)\right) \left(1 + 2p_j \sin^2\left(\frac{k}{2} h_{j-1}\right)\right) - p_j q_j \sin(kh_j) \sin(kh_{j-1})}{1 + 4p_j(1 + p_j) \sin^2\left(\frac{k}{2} h_{j-1}\right)} - i \frac{p_j \sin(kh_{j-1}) \left(1 + 2q_j \sin^2\left(\frac{k}{2} h_j\right)\right) + q_j \sin(kh_j) \left(1 + 2p_j \sin^2\left(\frac{k}{2} h_{j-1}\right)\right)}{1 + 4p_j(1 + p_j) \sin^2\left(\frac{k}{2} h_{j-1}\right)}$$

Отсюда находим модуль λ -функции

$$|\lambda(k)|^2 = \frac{1 + 4q_j(q_j + 1) \sin^2\left(\frac{k}{2} h_j\right)}{1 + 4p_j(p_j + 1) \sin^2\left(\frac{k}{2} h_{j-1}\right)}. \quad (14)$$

Чтобы решение оставалось ограниченным на конечном отрезке времени, должно выполняться условие

$$|\lambda|^2 \leq 1 + O(\tau). \quad (15)$$

Пусть $|\lambda|^2 \approx 1 + C\tau$. Используя (8) для (14), получим

$$C = 4 \left(\beta_j \sin^2\left(\frac{k}{2} h_{j-1}\right) - \alpha_j \sin^2\left(\frac{k}{2} h_j\right) \right).$$

Если предположить, что $h_j \geq h_{j-1}$, то из (8) следует неравенство $|\alpha_j| \leq \beta_j$, поэтому $C \leq 8\beta_j$ и $|\lambda|^2 \leq 1 + 8\beta_j \tau$, что подтверждает выполнение неравенства (15). Таким образом, неравенство $h_j \geq h_{j-1}$ можно считать необходимым условием устойчивости схемы.

Замечание 1. Тестовые расчеты действительно показывают, что практическим условием устойчивости схемы является невозрастание пространственного шага сетки против направления конвекции.

Отдельно следует рассмотреть (14) для случая равномерной пространственной сетки $h_j = h$, $j = 0, \dots, J - 1$:

$$|\lambda(k)| = \sqrt{\frac{1 + 4q(q + 1) \sin^2\left(\frac{k}{2} h\right)}{1 + 4p(p + 1) \sin^2\left(\frac{k}{2} h\right)}}. \quad (16)$$

Исследуем поведение функции $g(x) = 1 + 4x(x + 1) \sin^2 \varphi$, где $\varphi \in R$:

$$g'(x) = 4(2x + 1) \sin^2 \varphi, \quad g'(x) = 0 \Rightarrow x_0 = -\frac{1}{2}.$$

Так как $g''(x) = 8 \sin^2 \varphi > 0$ почти для всех φ (иначе $\lambda(k) = 1$), то x_0 — точка

минимума параболы, а в силу симметричности параболы относительно прямой $x = x_0$ имеем, что

$$g(p) = g(2x_0 - p) \Rightarrow g(x) \leq g(p) \text{ при } x \in [2x_0 - p; p].$$

Возвращаясь к (16), получаем, что $|\lambda| \leq 1 \Leftrightarrow -p-1 \leq q \leq p$, а поскольку из (8) следует, что $|q| \leq p$, то схема (7) абсолютно устойчива на равномерной пространственной сетке.

СХОДИМОСТЬ

Из условной согласованности (аппроксимации) и устойчивости схемы (4)–(6) в силу теоремы Лакса об эквивалентности [7] вытекает условная сходимость решений этой разностной схемы к решению задачи (1)–(3) с первым порядком по τ и $h = \max_{j=0, \dots, J-1} h_j$:

$$\|u - u^*\|_h = O\left(\tau + h + \frac{\tau}{h}\right).$$

МОНОТОННОСТЬ

Положим, что $f(x, t) \equiv 0$. Используя (8), запишем соотношение (7) в виде

$$u_j^{n+1} = \frac{\tau\beta_j}{1+\tau\beta_j} u_{j-1}^{n+1} + \frac{1+\tau\alpha_j}{1+\tau\beta_j} u_j^n - \frac{\tau\alpha_j}{1+\tau\beta_j} u_{j+1}^n. \quad (17)$$

Явная форма записи схемы (17) имеет вид

$$u_j^{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\tau^2(\alpha_k\beta_{k-1} - \alpha_{k-1}\beta_k) + \tau(\alpha_k + \beta_{k-1}) + 1}{1 + \tau\beta_{k-1}} \psi(j-k, j) u_{j-k}^n - \tau\alpha_j \psi(j, j) u_{j+1}^n, \quad (18)$$

где

$$\psi(k, m) = \frac{\tau^{m-k} \prod_{n=k+1}^m \beta_n}{\prod_{n=k}^m (1 + \tau\beta_n)} \geq 0.$$

Согласно признаку монотонности из [6] найдем условия, при которых все коэффициенты в правой части (18) будут неотрицательными:

$$\begin{cases} \tau^2(\alpha_k\beta_{k-1} - \alpha_{k-1}\beta_k) + \tau(\alpha_k + \beta_{k-1}) + 1 \geq 0 \\ -\alpha_j \geq 0. \end{cases} \quad (19)$$

Пусть для определенности пространственная сетка задается соотношением

$$h_j = \gamma h_{j-1} = \gamma^j h_0, \quad \gamma \geq 1. \quad (20)$$

Рассмотрим первое неравенство из (19). Найдем корни соответствующего квадратного уравнения

$$\tau_{1,2} = \frac{-(\alpha_k + \beta_{k-1}) \pm \sqrt{(\alpha_k - \beta_{k-1})^2 + 4\alpha_{k-1}\beta_k}}{2(\alpha_k\beta_{k-1} - \alpha_{k-1}\beta_k)}$$

и оценим их. Очевидно, что

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \frac{vh_{k-1} - 2\mu}{\gamma h_{k-1}(h_{k-1} + h_k)} = \frac{\gamma v h_{k-2} - 2\mu}{\gamma^3 h_{k-2}(h_{k-2} + h_{k-1})} \leq \\ &\leq \beta_k = \frac{\gamma v h_{k-1} + 2\mu}{h_{k-1}(h_{k-1} + h_k)} = \frac{\gamma^2 v h_{k-2} + 2\mu}{\gamma^2 h_{k-2}(h_{k-2} + h_{k-1})}, \\ \alpha_{k-1} &= \frac{vh_{k-2} - 2\mu}{\gamma h_{k-2}(h_{k-2} + h_{k-1})} \leq \beta_{k-1} = \frac{\gamma v h_{k-2} + 2\mu}{h_{k-2}(h_{k-2} + h_{k-1})}.\end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}\alpha_k + \beta_{k-1} &= \frac{\gamma v h_{k-2}(1 + \gamma^3) + 2\mu + (\gamma^3 - 1)}{\gamma^3 h_{k-2}(h_{k-2} + h_{k-1})} \geq 0; \\ \alpha_k \beta_{k-1} &= \frac{(\gamma v h_{k-2})^2 - (2\mu)^2}{\gamma^3 h_{k-2}^2 (h_{k-2} + h_{k-1})^2}, \\ \alpha_{k-1} \beta_k &= \frac{(\gamma v h_{k-2})^2 - (2\mu)^2 + 2\mu v h_{k-2}(1 - \gamma^2)}{\gamma^3 h_{k-2}^2 (h_{k-2} + h_{k-1})^2} \Rightarrow \alpha_k \beta_{k-1} \geq \alpha_{k-1} \beta_k,\end{aligned}$$

поэтому разность $(\alpha_k + \beta_{k-1})^2 - ((\alpha_k - \beta_{k-1})^2 + 4\alpha_{k-1}\beta_k) = 4(\alpha_k \beta_{k-1} - \alpha_{k-1}\beta_k) \geq 0$. Следовательно, $\tau_{1,2} \leq 0$ и квадратичное неравенство из (19) выполняется $\forall \tau \geq 0$.

Замечание 2. Для произвольной сетки вида $h_0 < h_1 < \dots < h_{J-1}$, вообще говоря, данный результат не имеет места.

Рассмотрим второе неравенство из (19). Запишем его так:

$$2\mu - h_0 v \gamma^j \geq 0 \quad \forall j, \text{ или } \gamma \leq \left(\frac{2\mu}{h_0 v} \right)^{\frac{1}{j}} \quad \forall j.$$

Отсюда при $j = J - 1$ и из неравенства $\gamma \geq 1$ получаем условие монотонности схемы, связанное с параметрами сетки (20) $h_0 \leq \frac{2\mu}{v}$ и $\gamma \leq \left(\frac{2\mu}{h_0 v} \right)^{\frac{1}{J-1}}$.

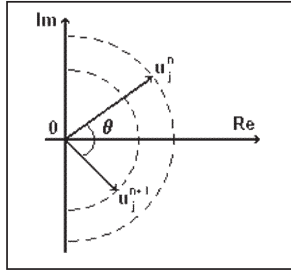
Замечание 3. Для равномерной сетки условие монотонности схемы имеет вид $h \leq \frac{2\mu}{v}$.

ИЗМЕНЕНИЕ ФАЗЫ И МОДУЛЯ В ТОЧКЕ

Далее для исследования дисперсионных и диссипативных свойств аппроксимации (4) будем полагать в (1), что $f(x, t) \equiv 0$. Тогда, как известно, уравнение (1) имеет аналитическое решение вида [3]

$$u(x, t) = \exp(-\mu k^2 t) \exp(ik(x - vt)). \quad (21)$$

Очевидно, что в некоторой фиксированной точке x_j в моменты времени t^n и $t^{n+1} = t^n + \tau$ значение точного решения будет отличаться по модулю (первый сомножитель) и фазе (второй сомножитель). Это изменение задается соотношением $u_j^{n+1} = \rho u_j^n$, где $\rho = \exp(-\mu k^2 \tau) \exp(-ikv\tau)$.



Следовательно, модуль точного решения (21) в фиксированной точке пространства за время τ изменится в $|\rho| = \exp(-\mu k^2 \tau) < 1$ раз, а фаза — на угол $\theta = \arctg \frac{\text{Im } \rho}{\text{Re } \rho} = -kv\tau$ (рис. 1).

Рис. 1. Изменение по фазе и абсолютному значению за один временной шаг

Найдем эти же изменения для численного решения. Как показано выше, для (7) справедливо переходное соотношение $u_j^{n+1} = \lambda u_j^n$, где

$$\text{Re } \lambda = \frac{\left(1 + 2q_j \sin^2\left(\frac{k}{2} h_j\right)\right) \left(1 + 2p_j \sin^2\left(\frac{k}{2} h_{j-1}\right)\right) - p_j q_j \sin(kh_j) \sin(kh_{j-1})}{1 + 4p_j(1 + p_j) \sin^2\left(\frac{k}{2} h_{j-1}\right)},$$

$$\text{Im } \lambda = - \frac{p_j \sin(kh_{j-1}) \left(1 + 2q_j \sin^2\left(\frac{k}{2} h_j\right)\right) + q_j \sin(kh_j) \left(1 + 2p_j \sin^2\left(\frac{k}{2} h_{j-1}\right)\right)}{1 + 4p_j(1 + p_j) \sin^2\left(\frac{k}{2} h_{j-1}\right)}.$$

Тогда согласно (14) изменение модуля численного решения равно

$$|\lambda| = \sqrt{\frac{1 + 4q_j(q_j + 1) \sin^2\left(\frac{k}{2} h_j\right)}{1 + 4p_j(p_j + 1) \sin^2\left(\frac{k}{2} h_{j-1}\right)}}, \quad (22)$$

а изменение фазы —

$$\varphi = \arctg\left(\frac{\text{Im } \lambda}{\text{Re } \lambda}\right). \quad (23)$$

Для упрощения дальнейших рассуждений сделаем два предположения: во-первых, что $h = h_j = h_{j-1}$, во-вторых, поскольку короткие волны $k > \pi / 4h$ все равно не могут быть корректно отображены на сетке, будем считать, что $kh < 1$. Тогда формула (22) примет вид

$$|\lambda| = \sqrt{\frac{1 + 4q(q + 1) \sin^2\left(\frac{k}{2} h\right)}{1 + 4p(p + 1) \sin^2\left(\frac{k}{2} h\right)}} < 1,$$

где $p = \frac{\tau(hv + 2\mu)}{2h^2} \geq 0$, $q = \frac{\tau(hv - 2\mu)}{2h^2}$, $|q| < p$.

Используя разложения по формуле Тейлора для оценки $|\lambda|$, получим

$|\lambda| \approx 1 - \mu k^2 \tau - \frac{(k\tau)^2 v \mu}{2h}$. Таким образом, схема (4) является диссипативной

($|\lambda| \leq 1$). А если учесть, что $|\rho| \approx 1 - \mu k^2 \tau + \frac{(\mu k^2 \tau)^2}{2} - \dots$, то получим точность

передачи изменения модуля в точке порядка τ^2 . Отличие в других членах разложений указывает на необходимость отдельного исследования диссипативных свойств схемы (численная вязкость).

Оценим изменение фазы решения в точке x_j . Согласно принятым предположениям формула (23) упростится к виду

$$\varphi = -\operatorname{arctg} \left(\frac{p \sin(kh) \left(1 + 2q \sin^2 \left(\frac{k}{2} h \right) \right) + q \sin(kh) \left(1 + 2p \sin^2 \left(\frac{k}{2} h \right) \right)}{\left(1 + 2q \sin^2 \left(\frac{k}{2} h \right) \right) \left(1 + 2p \sin^2 \left(\frac{k}{2} h \right) \right) - pq \sin^2(kh)} \right).$$

Использував приближения по формуле Тейлора, получим такую оценку:

$$\varphi \approx -k\tau v + \frac{k\tau v}{6} (kh)^2 = \theta \left(1 - \frac{(kh)^2}{6} \right).$$

Следовательно, данная схема замедляющая ($\varphi / \theta \leq 1$). Замедление тем больше, чем больший пространственный шаг или волновое число.

ЧИСЛЕННАЯ ВЯЗКОСТЬ

Преобразуем ПДП (9) к П-форме. Но поскольку полученный результат достаточно громоздкий, ограничимся только той частью П-формы, которая содержит все члены с $\partial^2 u / \partial x^2$ и $\partial^3 u / \partial x^3$ [5]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &\approx \frac{\tau v}{2} \frac{v(h_j - h_{j-1}) + 4\mu}{h_{j-1} + h_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \\ &+ 2\mu \left(\frac{h_j - h_{j-1}}{6} - \frac{vh_{j-1}h_j}{12\mu} + \tau \frac{\tau v(vh_{j-1} - 2\mu) - \mu(h_j + h_{j-1})}{(h_{j-1} + h_j)^2} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}. \end{aligned}$$

Отсюда находим оценку численной вязкости

$$\mu_c = \frac{\tau v}{2} \frac{4\mu + v(h_j - h_{j-1})}{h_{j-1} + h_j}. \quad (24)$$

Как видно, величина численной вязкости прямо пропорциональна временно-му шагу, скорости конвекции и физической вязкости. В частности, для уравнения чистой диффузии ($v=0$) она вообще отсутствует.

Найдем условие корректности схемы (4), т.е. когда $(\mu + \mu_c) \geq 0$. После несложных преобразований получим условие на шаги пространственной сетки

$$h_j \geq \frac{\tau v^2 - 2\mu}{\tau v^2 + 2\mu} h_{j-1} - \frac{4\tau v \mu}{\tau v^2 + 2\mu}.$$

Но поскольку $\left| \frac{\tau v^2 - 2\mu}{\tau v^2 + 2\mu} \right| \leq 1$ и $\frac{4\tau v \mu}{\tau v^2 + 2\mu} \geq 0$, то достаточным условием корректности будет $h_j \geq h_{j-1}$. Отметим, что для равномерной пространственной сетки ($h_j = h$), как следует из (24), схема абсолютно корректная.

ФАЗОВАЯ СКОРОСТЬ

Фазовая скорость характеризует скорость изменения фазы решения во времени в фиксированной точке пространства. Для точного решения (21) она равна $v_P^A = -v$ для всех длин волн и точек пространства [2]. Для численного решения оценку фазовой скорости находим по определению

$$v_P = \frac{\varphi}{k\tau} \approx -v \left(1 - \frac{(kh)^2}{6} \right) = v_P^A \left(1 - \frac{(kh)^2}{6} \right).$$

Таким образом, в численном решении фазовая скорость занижена для всех волн. Причиной этому является конечно-разностное представление пространственных производных. К тому же фазовая скорость для разных волн различна: волны большей длины имеют большую скорость, поэтому в схеме присутствует численная дисперсия.

ГРУППОВАЯ СКОРОСТЬ

Групповая скорость — это скорость распространения волны с максимальной амплитудой, которая порождается суперпозицией группы волн с близкими волновыми числами. Эта скорость характеризует скорость перенесения энергии. Определим групповую скорость для точного решения (21):

$$v_G^A = \frac{1}{\tau} \frac{d\theta}{dk} = -v.$$

Она постоянна для всех длин волн и равна истинной фазовой скорости [2]. Найдем численную групповую скорость

$$v_G = \frac{1}{\tau} \frac{d\varphi}{dk} \approx -v + \frac{v(kh)^2}{2} = v_G^A \left(1 - \frac{(kh)^2}{2} \right).$$

Понятно, что она занижена для всех длин волн вследствие конечно-разностного представления пространственных производных. Для разных волн групповая скорость различна: с увеличением длины волны (уменьшением волнового числа k) она приближается к истинной. Поэтому распространение энергии длинными волнами передается схемой (4) лучше, чем распространение коротковолновой энергии.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СЛОЖНОСТЬ

Рассмотрим схему (5)–(7). Для простоты положим, что $h_j = h$, $j = 0, \dots, J-1$. Тогда количество операций, необходимых для перехода на следующий временной слой, будет равно $8(J-1)+11$. Чтобы лучше понять величину этого числа, для сравнения приведем количество операций для алгоритмов решения задачи (1)–(3), в случае явной и неявной схем (все прочие условия равные): явная — $7(J-1)+8$; неявная — $10(J-1)$. Как видно, схема (5)–(7), являясь безусловно устойчивой как неявная, требует почти столько же операций при пе-

реходе на следующий временной слой, как явная схема. Но если учесть, что задача решается для некоторого фиксированного промежутка времени, преимущество схемы (5)–(7) перед явной и неявной очевидно. Следует ожидать, что решение методом (5)–(7) нелинейных многомерных уравнений гидротермодинамики потребует меньших затрат машинного времени в отличие от известных методов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

К преимуществам схемы (4)–(6) следует отнести абсолютную устойчивость (равномерная пространственная сетка) и экономичный алгоритм решения по количеству операций и необходимому объему памяти. К тому же согласно [1] коэффициенты уравнения (1) $v(x, t)$ и $\mu(x, t)$ берутся на явном слое, поэтому при решении системы прогностических уравнений возможен параллельный пересчет на следующий временной шаг для каждого уравнения системы, что не приводит к итерациям, как в случае неявных методов. Это должно повысить эффективность решения всей задачи прогноза с использованием метода (4)–(6). Но для реализации такой возможности необходимо провести расщепление многомерной задачи таким образом, чтобы оно сохранило преимущества одномерной схемы [8, 9]. Работа в этом направлении ведется в настоящее время.

К недостаткам рассматриваемого метода можно отнести условную сходимость и условную монотонность. Однако практическое удовлетворение этим условиям не слишком обременительно, поэтому мы считаем целесообразным применить данный метод при решении задачи прогноза метеорологических полей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эффективная разностная схема численного решения задачи конвективной диффузии / В.А. Прусов, А.Е. Дорошенко, Р.И. Черныш, Л.Н. Гук // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 3. — С. 64–74.
2. Белов П.Н., Борисенков Е.П., Панин Б.Д. Численные методы прогноза погоды. — Л.: Гидрометеиздат, 1989. — 376 с.
3. Прусов В.А., Дорошенко А.Ю. Моделирование природных и техногенных процессов в атмосфере. — КИВВ: Наук. думка, 2006. — 542 с.
4. Динамика погоды. / Под ред. С. Манабе — Л.: Гидрометеиздат, 1988. — 420 с.
5. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. — М.: Наука, 1992. — 424 с.
6. Калиткин Н.Н. Численные методы. — М.: Наука, 1978. — 512 с.
7. Joe D. Hoffman. Numerical methods for engineers and scientists. — New York: Basel, 2001. — 829 p.
8. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. — Новосибирск: Наука, 1967. — 196 с.
9. Ковеня В.М., Яненко Н.Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. — Новосибирск: Наука, 1981. — 304 с.

Поступила 14.06.2007