УДК 519.71:510.22

М.М. ЛЫЧАК

РОБАСТНАЯ ДИССИПАТИВНОСТЬ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ И ЕЕ ИССЛЕДОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ МНОЖЕСТВ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА

Ключевые слова: *нелинейные дискретные системы, динамика, решения, метод функций Ляпунова, свойство диссипативности, неопределенность параметров, возмущения, робастность, множества, область, момент времени, оценка предельного множества, последовательность, асимптотическая робастная устойчивость.*

ВВЕДЕНИЕ

Для анализа динамики нелинейных дискретных систем управления успешно применяется дискретный аналог метода функций Ляпунова [1–4]. Он используется также для исследования свойства диссипативности [5]. При этом главной проблемой является выбор самой функции Ляпунова, позволяющей провести этот анализ достаточно эффективно. С другой стороны, при неопределенности значений постоянных параметров системы [6], когда лишь известно множество в пространстве параметров, которому принадлежит неизвестное истинное значение вектора параметров, необходимо модифицировать сам метод [7, 8]. Кроме того, в [9] для исследования динамики непрерывных нелинейных систем с известными параметрами предложена другая существенная модификация прямого метода Ляпунова. А именно, вместо построения одной функции Ляпунова, позволяющей исследовать характер поведения фазовых траекторий системы во всем ее фазовом пространстве, предлагалось использовать несколько, фактически целую последовательность функций Ляпунова, каждая из которых позволяет исследовать их поведение лишь в некоторой части этого пространства. Совместное их рассмотрение позволяет исследовать общие динамические свойства системы. Таким образом рассматривалось свойство диссипативности [9] и при определенных условиях вытекающая из нее асимптотическая устойчивость данной системы [10].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим дискретные системы, описываемые векторным разностным уравнением

$$Y_{n+1} = \widetilde{\Phi}(Y_n, L, F_n, n),\ n = n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots,\ Y_{n_0} = Y^{(0)}, \tag{1}$$

где Y_n — m-мерный вектор фазовых координат системы, $\widetilde{\Phi}(Y_n, L, F_n, n)$ — заданная нелинейная m-мерная вектор-функция, ограниченная на любом ограниченном множестве значений Y_n и n, L — s-мерный вектор неизвестных числовых параметров системы, а F_n — r-мерный вектор внешних неопределенных возмущений.

О числовых параметрах системы известно лишь, что их значения принадлежат некоторому заданному стационарному замкнутому множеству Ω_L в пространстве параметров $E^s = \{L\}$, т.е.

$$L \in \Omega_L, \tag{2}$$

а относительно внешних возмущений — лишь то, что их значения в каждый момент времени принадлежат некоторому заданному, в общем случае нестационарному, замкнутому множеству $\Omega_F^{(n)}$ в пространстве $E^r = \{F_n\}$, т.е.

$$F_n \in \Omega_F^{(n)} \ \forall\, n \geq n_0. \tag{3}$$

Рассмотрим решения уравнения (1) в евклидовом фазовом пространстве $E^m = \{Y_n\}$. Пусть $\widetilde{Y}_n = \widetilde{Y}\,(L, n)$ — некоторая заданная ограниченная при всех n вектор-функция, зависящая от значений вектора параметров, отклонения от которой решения (1) в переходном процессе (с увеличением n) предполагается исследовать. Обозначим отклонение решения Y_n от $\widetilde{Y}_n$ через $X_n = Y_n - \widetilde{Y}_n$. Предположим, что в общем случае функция $\widetilde{Y}_n$ не удовлетворяет уравнению (1), т.е. $\widetilde{Y}_{n+1} \neq \widetilde{\Phi}\,(\widetilde{Y}_n, L, F_n, n)$, однако

$$\|\, \widetilde{Y}_{n+1} - \widetilde{\Phi}\,(\widetilde{Y}_n, L, F_n, n) \,\| \leq C = \text{const} \ \forall\, L \in \Omega_L,\, n \geq n_0,\, \widetilde{Y}_{n_0} = \widetilde{Y}\,(n_0),$$

$$F_n \in \Omega_F^{(n)}. \tag{4}$$

Запишем уравнение в отклонениях для системы (1)

$$X_{n+1} = \Phi\,(X_n, L, F_n, n),\ n = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots,\ X_{n_0} = X^{(0)}, \tag{5}$$

где $\Phi\,(X_n, L, F_n, n) = \widetilde{\Phi}\,(X_n + \widetilde{Y}_n, L, F_n, n) - \widetilde{Y}_{n+1}$ — модифицированная m-мерная вектор-функция, ограниченная на любом ограниченном множестве значений X_n и n, учитывающая зависимость от заданных $\widetilde{Y}_n$ и $\widetilde{Y}_{n+1}$. Для частного случая, когда в (2) можно взять $C = 0$, т.е. функция $\widetilde{Y}_n$ удовлетворяет (1), является заданным частным решением уравнения (1) (невозмущенное движение [5]), дополнительно предполагается, что вектор-функция $\Phi\,(X_n, L, F_n, n)$ равномерно непрерывна в окрестности точки $X_n \equiv 0 \ \ \forall n \geq n_0$, $L \in \Omega_L$, $F_n \in \Omega_F^{(n)}$.

Определение 1. Пусть для системы (5) при выполнении условий (2) и (3) в ее фазовом пространстве существует некоторое замкнутое множество Π_X, содержащее точку $X = 0$ и некоторую ее замкнутую окрестность. При этом для всех L из (2) и F_n из (3), а также для данного n_0 и всех начальных состояний $X^{(0)}$, принадлежащих более обширному замкнутому множеству указанного пространства $\Omega_X \supset \Pi_X$ (т.е. содержащему Π_X как подмножество), существует такой момент времени $N = N\,(\Omega_X, \Omega_L, \Omega_F^{(n)}, n_0)$, для которого $X_n \in \Pi_X \ \forall\, n \geq N$. Тогда система (5) называется робастно диссипативной, множество Ω_X называется областью ее робастной диссипативности, а множество Π_X — оценкой ее предельного множества. Если областью робастной диссипативности является все фазовое пространство системы (5) при выполнении условий (2) и (3), то она называется робастно диссипативной в целом. Для робастно диссипативной системы могут быть различные оценки предельного множества $\Pi_X^{(j)} \subset \Omega_X$ $(j = 1, 2, \ldots)$, однако часто существует неизвестная исследователю минимальная оценка $\Pi_X^{(\infty)} \subset \Pi_X^{(j)}$, $\forall\, j = 1, 2, \ldots$которую и будем называть предельным множеством системы (5).

Определение 2. Если какая-либо j-я $(j = 1, 2, \ldots)$ оценка предельного множества робастно диссипативной системы (5) совпадет с достаточно малой окрестностью точки $X=0$, а само предельное множество выродится в точку $X=0$, то такая система будет робастно асимптотически устойчивой.

Когда постоянные параметры системы (5) известны, а внешние возмущения являются заданными функциями времени, т.е. множества в (2) и (3) одноточечные, то будем говорить просто о диссипативности [6] и асимптотической устойчивости. Если же хоть одно из этих множеств не является одноточечным, задача анализа динамики дискретных систем вида (5) ставится как задача нахождения условий ее робастной диссипативности, а также определения тех случаев, когда эти условия становятся условиями робастной асимптотической устойчивости.

ФОРМУЛИРОВКИ ОБЩИХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассмотрим возможности использования для решения поставленной задачи дискретного аналога метода функций Ляпунова [6], который состоит в построении функции $v(X_n, n)$ с заданными свойствами и изучении свойств ее первой разности, вычисленной вдоль траекторий системы (5),

$$\Delta v_n = v_{n+1} - v_n = v[\Phi(X_n, L, F_n, n), n+1] - v(X_n, n). \tag{6}$$

Вначале для простоты изложения развиваемого подхода примем, что параметры системы (3) известны, а внешние возмущения заданы как некоторые функции времени, т.е. будем исследовать свойства диссипативности и асимптотической устойчивости такой системы без учета возможной неопределенности.

Теорема 1 (о диссипативности). Пусть для системы (5) при известных значениях постоянных параметров и внешних возмущениях как заданных функций времени определена скалярная положительно-определенная функция Ляпунова $v^{(0)}(X_n, n)$ в некоторой конечной области $\Omega_X^{(0)}$ фазового пространстве $E^m = \{X_n\}$, выделяемой неравенством

$$\inf_{n=N_0} \{v^{(0)}(X_n, n)\} \le \mu^{(0)}, \tag{7}$$

где $\mu^{(0)} = \text{const} > 0$ — некоторое число, N_0 — некоторый конечный момент времени, причем функция Ляпунова такая, что выполняется неравенство

$$\Delta v_n^{(0)} + \tau_0(X_n, n)[v^{(0)}(X_n, n) - \mu_0] < 0 \tag{8}$$

для всех $n \ge N_0$ и $(X_n \ne 0) \in \Omega_X^{(0)}$, некоторого числа $0 < \mu_0 < \mu^{(0)}$ и некоторой кусочно-непрерывной функции $0 < \tau_0(X_n, n) < 1 \quad \forall\, (X_n \ne 0) \in \Omega_X^{(0)}, \quad n \ge N_0$, а множество $\Pi_X^{(0)}$, выделяемое в фазовом пространстве неравенством

$$\inf_{n \ge N_0} \{v^{(0)}(X_n, n)\} \le \mu_0, \tag{9}$$

принадлежит множеству Ω_X, выделяемому неравенством

$$\sup_{n \ge N_0} \{v^{(0)}(X_n, n)\} \le \mu^{(0)}. \tag{10}$$

Тогда такая система (5) диссипативна в Ω_X, а множество $\Pi_X^{(0)}$ является оценкой ее предельного множества.

Теорема 2 (о диссипативности в целом).Пусть для системы (5) при известных значениях постоянных параметров и внешних возмущениях как заданных функций времени в фазовом пространстве $E^m = \{X_n\}$ определена скалярная положительно-определенная функция Ляпунова $v^{(0)}(X_n, n)$, которая при $||X_n|| \to \infty$ допускает бесконечно большой низший предел. Причем во всем фазовом пространстве E^m выполнялось бы неравенство вида (8) для всех $n \geq N_0$ (N_0 — некоторый конечный момент времени) и $X_n \neq 0$, некоторого числа $\mu_0 > 0$ и некоторой кусочно-непрерывной функции $0 < \tau_0(X_n, n) < 1 \;\; \forall X_n \neq 0,\, n \geq N_0$. Тогда такая система (5) диссипативна в целом, а множество $\Pi_X^{(0)}$ вида (9) является оценкой ее предельного множества.

Справедливость утверждений данных теорем следует из результатов [6].

Отметим, что при выполнении условий диссипативности гарантируется достижение фазовой траекторией за конечное время найденной оценки предельного множества $\Pi_X^{(0)}$, причем в дальнейшем она не выходит за пределы этого множества [6]. Поэтому при последующих исследованиях асимптотических свойств фазовых траекторий данной системы (5) можно ограничиться рассмотрением их поведения лишь внутри найденной оценки $\Pi_X^{(0)}$.

Лемма 1. Пусть для системы (5) выполнены условия теоремы 1 (или теоремы 2), т.е. установлено свойство диссипативности (в некоторой конечной области Ω_X фазового пространстве E^m или в целом) и получена оценка предельного множества $\Pi_X^{(0)} \subset \Omega_X$ для известных значений постоянных параметров системы и внешних возмущениях как заданных функций времени. Кроме того, определена внутри множества $\Pi_X^{(0)}$ такая новая скалярная положительно-определенная функция Ляпунова $v^{(1)}(X_n, n)$, что выполняется неравенство

$$\Delta v_n^{(1)} + \tau_1(X_n, n)\,[v^{(1)}(X_n, n) - \mu_1] < 0 \;\forall\, n \geq N_0,\, (X_n \neq 0) \in \Pi_X^{(0)}, \tag{11}$$

для некоторого числа $\mu_1 > 0$ и некоторой кусочно-непрерывной функции $0 < \tau_1(X_n, n) < 1 \;\forall\, (X_n \neq 0) \in \Pi_X^{(0)},\, n \geq N_0$, которые задают дополнительную оценку предельного множества $\hat{\Pi}_X^{(1)}$, выделяемую в фазовом пространстве неравенством

$$\inf_{n \geq N_0} \{v^{(1)}(X_n, n)\} \leq \mu_1. \tag{12}$$

Тогда новой оценкой предельного множества диссипативной системы (5) является

$$\Pi_X^{(1)} = \hat{\Pi}_X^{(1)} \cap \Pi_X^{(0)}. \tag{13}$$

При выполнении условия

$$\Pi_X^{(0)} \not\subset \hat{\Pi}_X^{(1)} \tag{14}$$

новая оценка будет более точной по сравнению с предыдущей $\Pi_X^{(0)}$.

Справедливость утверждения леммы 1 следует из определения свойства диссипативности и теоремы 1 (или теоремы 2 для случая диссипативности в целом).

Естественно, процесс уточнения оценок вида (13) можно продолжить.

Теорема 3 (о последовательности оценок предельного множества диссипативной системы). Пусть для системы (5) определена последовательность $v^{(k)}(X_n, n)$ $(k = 0,1,2, \ldots, K,\, K = \text{const})$ скалярных функций типа Ляпунова таких, что функция $v^{(0)}(X_n, n)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 (или теоремы 2), функция $\upsilon^{(1)}(X_n, n)$ — условиям леммы 1, а функции $\upsilon^{(k)}(X_n, n)$ при $k > 1$ позволяют получать новые оценки предельного множества $\Pi_X^{(k)}$ аналогично лемме 1 по формуле вида (13), но с заменой 1 на k и 0 на $k-1$. Тогда получим последовательность неухудшающихся оценок предельного множества диссипативной системы (5) $\Pi_X^{(k)}$ $(k > 0)$, задаваемых выражениями вида (12), (13), но с заменой 1 на k и 0 на $k-1$. При этом множество $\Pi_X^{(K)}$ будет наименьшей полученной оценкой.

Справедливость теоремы 3 естественным образом следует из леммы 1 и свойств конечной последовательности оценок предельного множества диссипативной системы (5), которые не могут ухудшаться в силу процедуры пересечения множеств вида (13) (с заменой 1 на k и 0 на $k-1$).

Теорема 4 (об условиях асимптотической устойчивости диссипативной системы). Пусть в системе (5) вектор-функция $\Phi(X_n, L, F_n, n)$ равномерно непрерывна в окрестности точки $X_n \equiv 0\ \forall\, n \geq N_0$ ($N_0 > n_0$ — некоторое целое число) при известных значениях постоянных параметров и внешних возмущениях как заданных функций времени. Кроме того, выполнены условиях теоремы 3 и, начиная с некоторого конечного $k = K_0 = \text{const}$, функции $\upsilon^{(k)}(X_n, n)$ и $\tau_k(X_n, n)$ для всех $k \geq K_0$ равномерно непрерывны в окрестности точки $X_n \equiv 0\ \forall\, n \geq N_0$, а также разность множеств $\Pi_X^{(k-1)}$ и $\Pi_X^{(k)}$, определяемых согласно неравенству вида (12) (с заменой 1 на k), при этом не является множеством меры нуль и существует

$$\lim_{k \to \infty} \mu_k = 0. \tag{15}$$

Тогда система (5) асимптотически устойчива в конечной области Ω_X или в целом, в зависимости от того, какого вида свойство диссипативности установлено с помощью теоремы 1 или теоремы 2 для данной системы.

Справедливость теоремы 4 следует из установления свойства диссипативности с помощью теоремы 3 и предполагаемого монотонного улучшения оценок предельного множества $\Pi_X^{(k)}$ с выполнением условия (15). Естественно, что при этом требуется равномерная непрерывность соответствующих функций в окрестности точки $X_n \equiv 0\ \forall\, n \geq N_0$.

Обобщим полученные результаты на случай неопределенных параметров системы и неточно известных внешних возмущений.

Теорема 5 (о робастной диссипативности). Пусть для системы (5) при выполнении условий (2) и (3) определено множество скалярных положительно-определенных функций Ляпунова $\upsilon^{(0)}(X_n, L, n)$ (т.е. каждому элементу L множества Ω_L соответствует элемент множества функций Ляпунова [6, 7]) в некоторой конечной области $\Omega_X^{(0)}$ фазового пространства $E^m = \{X_n\}$, являющейся объединением по L подмножеств, выделяемых неравенствами вида (7)

$$\bigcup_{L \in \Omega_L} \{ \inf_{n \geq N_0} [\upsilon^{(0)}(X_n, L, n)] \leq \mu^{(0)}(L) \}\ , \tag{16}$$

где $\mu^{(0)}(L) > 0\ \forall\forall\, L \in \Omega_L$ — некоторый числовой параметр, N_0 — некоторый конечный момент времени, причем элементы множества функций Ляпунова таковы, что выполняется неравенство

$$\max_{F_n \in \Omega_F^{(n)}} \max_{L \in \Omega_L} \{\Delta \upsilon_n^{(0)} + \tau_0(X_n, L, n)\, [\upsilon^{(0)}(X_n, L, n) - \mu_0(L)]\} < 0\ \forall\, n \geq N_0 \tag{17}$$

для всех $(X_n \neq 0) \in \Omega_X^{(0)}$, для некоторого множества кусочно-непрерывных функций $0 < \tau_0(X_n, L, n) < 1 \; \forall \; (X_n \neq 0) \in \Omega_X^{(0)}$, $L \in \Omega_L$, $n \geq N_0$, и некоторого множества числовых параметров $0 < \mu_0(L) < \mu^{(0)}(L)$, а множество $\Pi_X^{(0)}$, задаваемое объединением по L подмножеств, выделяемых неравенствами вида (9)

$$\bigcup_{L \in \Omega_L} \{ \inf_{n = N_0} \upsilon^{(0)}(X_n, L, n) \leq \mu_0(L) \}, \tag{18}$$

принадлежит множеству Ω_X, выделяемому пересечением по L подмножеств, задаваемых неравенствами вида (10)

$$\bigcup_{L \in \Omega_L} \{ \sup_{n \geq N_0} [\upsilon^{(0)}(X_n, L, n)] \leq \mu^{(0)}(L) \}. \tag{19}$$

Тогда система (5) при выполнении условий (2) и (3) робастно диссипативна в Ω_X, а множество $\Pi_X^{(0)}$ является оценкой ее предельного множества.

Теорема 6 (о робастной диссипативности в целом). Пусть для системы (5) при выполнении условий (2) и (3) определено в фазовом пространстве $E^m = \{X_n\}$ множество скалярных положительно-определенных функций Ляпунова $\upsilon^{(0)}(X_n, L, n)$, которые для всех L из (2) при $\| X_n \| \to \infty$ допускают бесконечно большой низший предел. Причем во всем фазовом пространстве E^m выполнялось бы неравенство вида (17) для всех $n \geq N_0$ (N_0 — некоторый конечный момент времени) и $X_n \neq 0$, некоторого множества чисел $\mu_0(L) > 0$ и некоторого множества кусочно-непрерывных функций $0 < \tau_0(X_n, L, n) < 1 \; \forall \; X_n \neq 0$, $n \geq N_0$. Тогда такая система (5) диссипативна в целом, а множество $\Pi_X^{(0)}$ вида (18) является оценкой ее предельного множества.

Справедливость утверждений теоремы 5 и теоремы 6 прежде всего следуют из того факта, что выполнение условий соответственно теоремы 1 и теоремы 2 при каждом элементе L из (2) и всех F_n из (3) для всего объединения соответствующих подмножеств в фазовом пространстве системы гарантирует их выполнение для каждого такого подмножества отдельно. С другой стороны, если гарантируется, что фазовые траектории диссипативной системы для каждого элемента L из (2) и для всех F_n из (3) попадают за конечное время и остаются в дальнейшем в некотором подмножестве фазового пространства, то это обеспечивает существование такого максимального по L из (2), но конечного момента времени, что для любого L из (2) и для всех F_n из (3) фазовые траектории попадут в объединение таких подмножеств и в дальнейшем будут ему принадлежать. Естественно, при этом требуется, чтобы в некоторой окрестности этого объединенного множества выполнялись для любого L из (2) и для всех F_n из (3) условия теоремы 1. Последнее для случая робастной диссипативности в области обеспечивается, если множество $\Pi_X^{(0)}$ вида (18) принадлежит множеству Ω_X вида (19).

При наличии неопределенности также сохраняется возможность уточнения первоначально полученной оценки предельного множества диссипативной системы, используя последовательность функций Ляпунова.

Лемма 2.Пусть для системы (5) выполнены условия теоремы 5 или теоремы 6, т.е. установлено свойство робастной диссипативности (в некоторой конечной области Ω_X фазового пространстве E^m или в целом) и получена оценка предельного множества $\Pi_X^{(0)} \subset \Omega_X$. Кроме того, на множестве $\Pi_X^{(0)}$ определено такое новое множество скалярных положительно-определенных функций Ляпунова $v^{(1)}(X_n, L, n)$, что выполняется неравенство

$$\max_{F_n \in \Omega_F^{(n)}} \max_{L \in \Omega_L} \{\Delta v_n^{(1)} + \tau_1(X_n, L, n)[v^{(1)}(X_n, L, n) - \mu_1(L)]\} < 0 \ \forall n \geq N_0 \qquad (20)$$

для всех $(X_n \neq 0) \in \Pi_X^{(0)}$, некоторого числового параметра $0 < \mu_1(L) < \mu^{(0)}(L)$ и некоторой кусочно-непрерывной функции $0 < \tau_1(X_n, L, n) < 1$ $\forall (X_n \neq 0) \in \Pi_X^{(0)}$, $n \geq N_0$. Тогда из неравенства (20) получим (аналогично (18)) дополнительную апостериорную оценку предельного множества $\hat{\Pi}_X^{(1)} \subset \Omega_X$, что задается в фазовом пространстве как объединение по L подмножеств

$$\bigcup_{L \in \Omega_L} \{ \inf_{n \geq N_0} [v^{(1)}(X_n, L, n)] \leq \mu_1(L)\}, \qquad (21)$$

а результирующей оценкой предельного множества диссипативной системы (5) является множество $\hat{\Pi}_X^{(1)}$, определяемое согласно (21) и (13). Эта оценка будет улучшенной при выполнении условия (14).

Справедливость утверждения леммы 2 следует из определения свойства робастной диссипативности и выполнения условий теоремы 5 или теоремы 6, а также полной аналогии между (18)–(21). Очевидно, что результирующая оценка предельного множества робастной диссипативной системы определяется как пересечение двух полученных ранее (согласно (13)), аналогично как в лемме 1.

При наличии неопределенности значений параметров и возмущений процесс получения оценок вида (21) и уточнения оценок вида (13) также можно продолжить.

Теорема 7. Пусть для системы (5) при выполнении условий (2) и (3) существует последовательность множеств скалярных функций типа Ляпунова $v^{(k)}(X_n, L, n)$ $(k = 0,1,2,\ldots, K, K = \text{const})$ таких, что множество функций $v^{(0)}(X_n, L, n)$ удовлетворяют условиям теоремы 4, множество функций $v^{(1)}(X_n, L, n)$ — условиям леммы 2, а множество функций $v^{(k)}(X_n, L, n)$ при $k > 1$ позволяет получать новые оценки предельного множества $\Pi_X^{(k)}$ аналогично лемме 2, но с заменой 1 на k и 0 на $k-1$. Тогда получим последовательность неухудшающихся оценок предельного множества $\Pi_X^{(k)}$ $(k > 0)$ робастной диссипативной системы (5), что задаются выражениями вида (21) и (13), но с заменой 1 на k и 0 на $k-1$. При этом множество $\Pi_X^{(K)}$ будет наименьшей полученной оценкой.

Справедливость теоремы 7 естественным образом следует из леммы 2 и свойств конечной последовательности оценок предельного множества робастной диссипативной системы (5), которые не могут ухудшаться в силу процедуры пересечения множеств вида (13) (с заменой 1 на k и 0 на $k-1$). Хотя наличие аддитивных неопределенных внешних возмущений в общем случае не позволяет обеспечить асимптотическую устойчивость системы (5), но при их отсутствии лишь для неопределенных параметров и мультипликативных возмущений такое возможно.

Теорема 8 (об условиях асимптотической робастной устойчивости робастной диссипативной системы). Пусть при условиях теоремы 7, начиная с некоторого конечного $k = K_0$, все элементы множества функций $\upsilon^{(k)}(X_n, L, n)$ и $\tau_k(X_n, L, n)$ при выполнении условий (2) и (3) равномерно непрерывны в окрестности точки $X \equiv 0$, а разность множеств $\Pi_X^{(k-1)}$ и $\Pi_X^{(k)}$ не является множеством меры нуль и выполняется (15). Тогда система (5) асимптотически робастно устойчива в конечной области Ω_X или в целом, в зависимости от того, какого вида свойство робастной диссипативности установлено с помощью теоремы 7 для данной системы.

Справедливость теоремы 8 следует из установления свойства робастной диссипативности с помощью теоремы 7 и предполагаемого монотонного улучшения оценок предельного множества $\Pi_X^{(k)}$ с выполнением условия (15). Естественно, что при этом требуется равномерная непрерывность соответствующих элементов множеств функций в окрестности точки $X_n \equiv 0 \# n \geq N_0$.

ПРИМЕР АНАЛИЗА ДИССИПАТИВНОСТИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим дискретную систему вида

$$X_{n+1} = AX_n + Bf_n,\ n = 0,1,2,\ldots,\ X_0 = X^{(0)}, \tag{22}$$

где A — $m \times m$-квадратная числовая матрица, наибольшее по модулю собственное значение которой $\lambda_{\max}(A)$ лежит строго внутри единичного круга, т.е.

$$|\lambda_{\max}(A)| < 1, \tag{23}$$

причем B — m-мерный числовой вектор, а f_n — скалярная функция дискретного времени, характеризующая действие внешнего возмущения и удовлетворяющая ограничению

$$|f_n| < \delta = \text{const}\ \forall\ n \geq 0. \tag{24}$$

Предположим вначале для простоты изложения, что параметры системы — коэффициенты матрицы A и числа-компоненты вектора B известны, а неопределены лишь значения внешнего возмущения, удовлетворяющие (24). Выберем функцию Ляпунова в виде

$$\upsilon^{(0)}(X_n) = X_n^T P X_n. \tag{25}$$

Обозначим

$$\omega(X_n) = \Delta\upsilon_n^{(0)} + \tau_0[\upsilon^{(0)}(X_n) - \mu_0], \tag{26}$$

где $0 < \tau_0 < 1$ и $\mu_0 > 0$ — некоторые числа.

Тогда получим

$$\omega(X_n) = X_n^T[A^T PA - (1-\tau_0)P]X_n + 2X_n^T A^T PB f_n - \tau_0\mu_0 + B^T PB f_n^2. \tag{27}$$

Выберем число τ_0 из условия

$$0 < \tau_0 < 1 - |\lambda_{\max}(A)|^2, \tag{28}$$

чтобы собственные значения матрицы $\widetilde{A} = A/\sqrt{1-\tau_0}$ лежали строго внутри единичного круга, а матрицу P определим из уравнения типа Ляпунова

$$A^T PA - (1-\tau_0)P = -Q, \tag{29}$$

где $Q = Q^T > 0$ — некоторая симметричная квадратная положительно-определенная числовая матрица, нормированная к 1, т.е. $||Q|| = 1$. Тогда $P = P^T > 0$, а значит, функция Ляпунова вида (25) положительно определена во всем фазовом пространстве E^m и допускает бесконечно большой низший предел при $||X_n|| \to \infty$.

Выбор матрицы P из (29) позволяет выражение (27) переписать в виде

$$\omega(X_n) = X_n^T Q X_n + 2X_n^T A^T PB\, f_n - \tau_0 \mu_0 + B^T PB\, f_n^2.$$

Отсюда с учетом ограничения (24) и оценки вида

$$X_n^T Q X_n \geq (X_n^T A^T PB)^2 / (B^T PAQ^{-1} A^T PB)$$

следует, что

$$\omega(X_n) < -(X_n^T A^T PB)^2 / (B^T PAQ^{-1} A^T PB) + 2\delta |X_n^T A^T PB| - \tau_0\, \mu_0 + B^T PB\, \delta^2.$$

Выбрав

$$\mu_0 = \tau_0^{-1} (B^T PB + B^T PAQ^{-1} A^T PB)\, \delta^2, \tag{30}$$

получим, что $\omega(X_n) < 0\ \forall\ X_n \neq 0$ и для всех значений внешнего возмущения f_n, удовлетворяющих условию (24). Отсюда согласно теореме 6 справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Пусть заданная числовая матрица A коэффициентов системы (22) такова, что ее собственные значения лежат строго внутри единичного круга, т.е. выполнено (23), а значения неопределенного возмущения удовлетворяют ограничению (24). Тогда система (22) робастно диссипативна в целом, а оценка ее предельного множества вида (19) выделяется неравенством

$$X_n^T P X_n \leq \mu_0, \tag{31}$$

где число μ_0 задается выражением (30), в котором $Q = Q^T > 0$ — некоторая симметричная квадратная положительно-определенная числовая матрица, нормированная к 1, т.е. $||Q|| = 1$, число $0 < \tau_0 < 1 - |\lambda_{\max}(A)|^2$, т.е. такое, что собственные значения матрицы $\widetilde{A} = A / \sqrt{1 - \tau_0}$ лежат строго внутри единичного круга, а матрица P определена из уравнения типа Ляпунова (29).

Естественно, что свобода выбора допустимых значений матрицы Q и числа τ_0 позволяет уточнить оценки предельного множества. Согласно теореме 7 справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. Если для системы (22) при выполнении условий (23) и (24) справедливо утверждение 1, то наименьшая оценка предельного множества этой системы, получаемая с помощью функции Ляпунова вида (25), определяется следующим образом:

$$\Pi_X^{(\min)} = \bigcap_{||Q||=1,\, Q=Q^T>0}\ \bigcap_{0<\tau_0<1-|\lambda_{\max}(A)|^2} \{X_n^T P(Q, \tau_0)\, X_n \leq \mu_0(Q, \tau_0)\}. \tag{32}$$

Действительно, будем выбирать функции Ляпунова вида (25), но с различными матрицами P, определяемыми из уравнений типа Ляпунова (29), с допустимыми разными матрицами $Q = Q^T > 0$ и числами τ_0. Тогда для разных матриц P и чисел μ_0 получим последовательность оценок предельного множества системы (22) вида (31). Каждая из этих оценок гарантирована, т.е. фазовые траектории при любых начальных условиях за конечное время попадают в пределы такой оценки и в дальнейшем не покидают их. Значит, они должны оставаться в общей части всех этих оценок, задаваемой выражением (32).

Рассмотрим теперь тот общий случай, когда о векторе параметров L системы (22), составленного из коэффициентов матрицы A и компонент вектора B, известно лишь, что его значения принадлежат некоторому стационарному замкнутому множеству Ω_L в пространстве параметров $E^s = \{L\}$, т.е. выполняется (2). При этом будем предполагать, что существует наибольшее по модулю согласно (2) возможное собственное значение матрицы A, удовлетворяющее условию (23). Тогда выбор функции Ляпунова в виде (25) с матрицей P, удовлетворяющей матричному уравнению типа Ляпунова (29), где число τ_0 удовлетворяет условию (28), делает ее зависящей от неизвестных значений вектора параметров L, т. е. неопределенных коэффициентов матрицы A и компонент вектора B системы (22).

В этом случае применение теоремы 6 позволяет доказать следующее утверждение.

Утверждение 3. Пусть о числовой матрице A и числовом векторе B системы (22) известно лишь, что составленный из их коэффициентов и компонент вектор параметров L принадлежит некоторому стационарному замкнутому множеству Ω_L в пространстве параметров $E^s = \{L\}$, т.е. выполняется (2). При этом выполняются условия (23) и (24). Тогда система (22) робастно диссипативна в целом, а оценка ее предельного множества вида (21) задается в фазовом пространстве как объединение по L подмножеств

$$\bigcup_{L \in \Omega_L} \{X_n^T P(A, B, Q, \tau_0) X_n \le \mu_0(A, B, Q, \tau_0)\}, \tag{33}$$

где числовой параметр $\mu_0(A, B, Q, \tau_0)$ задается выражением (30), в котором $Q = Q^T > 0$ — некоторая симметричная квадратная положительно-определенная числовая матрица, нормированная к 1, т.е. $||Q|| = 1$, число $0 < \tau_0 < 1 - |\lambda_{\max}(A)|^2$ такое, что собственные значения матрицы $\widetilde{A} = A / \sqrt{1 - \tau_0}$ лежат строго внутри единичного круга, а матрица P определена из уравнения типа Ляпунова (29).

Естественно, что и при наличии неопределенности параметров системы (22) можно воспользоваться результатом теоремы 7 и утверждения 2 для улучшения оценки предельного множества диссипативной системы, полученной в рамках утверждения 3.

Утверждение 4. Если для системы (22) при выполнении условий (23) и (24) справедливо утверждение 3, то наименьшая оценка предельного множества этой системы, получаемая с помощью функции Ляпунова вида (25), определяется следующим образом:

$$\Pi_X^{(\min)} = \bigcap_{||Q||=1, Q=Q^T>0} \; \bigcap_{0<\tau_0<1-|\lambda_{\max}(A)|^2} \; \bigcup_{L \in \Omega_L} \{X_n^T P(A, B, Q, \tau_0) X_n \le$$
$$\le \mu_0(A, B, Q, \tau_0)\}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дано обобщенное понятие робастной диссипативности в области фазового пространства исследуемой дискретной системы и в целом, т.е. во всем фазовом пространстве. Соответственно сформулированы и доказаны теоремы анализа этого свойства с помощью метода функций Ляпунова. Показано, что применение специально построенной последовательности множеств функций Ляпунова (когда каждому элементу L множества Ω_L соответствует элемент множества функций Ляпунова) может улучшить исходную оценку предельного множества диссипативной системы. Доказана возможность установления в предельном случае свойства асимптотической робастной устойчивости.

Рассмотрен содержательный пример применения приведенных теорем для анализа робастной диссипативности дискретной системы при наличии неопределенности как внешнего аддитивного возмущения, так и ее числовых параметров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бромберг П.В. Устойчивость и автоколебания импульсных систем регулирования. — М.: Оборонгиз. — 1953. — 384 с.
2. Kalman R. E., Bertram J. E. Control systems analysis and design via the Second Nethod of Liapunov. II, Discrete-time systems // Transactions of the ASME, ser. D. Journ. of Basic Engineer. — 1960. — **82**, N 2.
3. Кунцевич В.М., Чеховой Ю.Н. Нелинейные системы управления с частотно- и широтно-импульсной модуляцией. — Киев: Технiка. — 1970. — 340 с.
4. Методы исследования нелинейных систем автоматического управления / Под ред. Р.А. Нелепина. — М.: Наука, 1975. — 448 с.
5. Кунцевич В.М., Лычак М.М. Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова. — М.: Наука, 1977. — 400 с.
6. Зелык Я.И., Лычак М.М. Компьютерная технология интервально-множественного анализа в MATLAB // Кибернетика и системный анализ. — 2004. — № 1. — С. 122–139.
7. Кунцевич В.М., Лычак М.М. Элементы теории эволюции множеств и устойчивость этих процессов // Кибернетика. — 1983. — № 1. — С. 105–111.
8. Кунцевич В.М., Лычак М.М. Синтез оптимальных и адаптивных систем управления. Игровой подход. — Киев: Наук. думка, 1985. — 248 с.
9. Лычак М.М. Новый подход к исследованию устойчивости нелинейных динамических систем // Автоматика. — 1980. — № 1. — С. 38–45.
10. Лычак М.М. Критерии устойчивости, основанные на оценках диссипативности // Проблемы управления и информатики. — 1997. — № 5. — С. 61–68.

Поступила 14.08.2007