И.В. СЕРГИЕНКО, Е.Ф. ГАЛБА, В.С. ДЕЙНЕКА

УДК 512.64 : 519.61

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И РАЗЛОЖЕНИЯ ВЗВЕШЕННЫХ ПСЕВДООБРАТНЫХ МАТРИЦ, ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ И РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЗАДАЧ. II. ВЫРОЖДЕННЫЕ ВЕСА[1]

Ключевые слова: *взвешенные псевдообратные матрицы с вырожденными весами, взвешенные нормальные псевдорешения с вырожденными весами, представления взвешенных псевдообратных матриц, разложения взвешенных псевдообратных матриц, регуляризация, итерационные методы, задачи наименьших квадратов с ограничениями.*

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1], посвященной взвешенной псевдоинверсии с положительно- определенными весами, приведен обзор литературы по различным видам псевдоинверсии и указан ряд приложений взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений. Настоящая статья посвящена взвешенной псевдоинверсии с вырожденными весами, и основное внимание будет уделено соответствующим публикациям. Определение взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными (положительно-полуопределенными) весами впервые было дано в [2], где авторы устанавливают необходимые и достаточные условия существования единственной взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными весами. В ряде работ (например, [3–5]) исследовалась ML-взвешенная псевдоинверсия. При некоторых предположениях ML-взвешенные псевдообратные матрицы и взвешенные псевдообратные матрицы с вырожденными весами, определенные в [2], совпадают. В дальнейшем, если не оговорено противное, в настоящей работе будет рассматриваться взвешенная псевдоинверсия, определенная в [2].

Статья носит обзорный характер и написана главным образом на основе статей авторов, посвященных развитию теории взвешенной псевдоинверсии в направлении исследования свойств взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами, получению и исследованию представлений и разложений взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами, а также использованию полученных представлений и разложений взвешенных псевдообратных матриц для построения и исследования итерационных методов и регуляризованных задач для вычисления взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами, взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами, для решения задач наименьших квадратов с ограничениями.

Работа состоит из семи разделов. Разд. 1 носит вспомогательный характер. В нем приведены определения, обозначения, введены матричные и векторные нормы, рассмотрены свойства взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами и симметризуемых матриц с вырожденными симметризаторами. В разд. 2 даны представления взвешенных псевдообратных матриц в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых и симметричных матриц. Устанавливается связь взвешенных псевдообратных матриц со взве-

[1] Начало в № 1, 2008 г.

шенными нормальными псевдорешениями. Разд. 3 посвящен получению и исследованию разложениий взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные ряды и матричные степенные произведения с положительными показателями степеней. Разд. 4 посвящен тем же вопросам, что и третий раздел, но разложения имеют отрицательные показатели степеней. Кроме того, получены многочленные предельные представления взвешенных псевдообратных матриц, построены и исследованы регуляризованные задачи для вычисления приближений к взвешенным псевдообратным матрицам и взвешенным нормальным псевдорешениям с вырожденными весами. В разд. 5 предложены и исследованы итерационные процессы с различными скоростями сходимости для вычисления приближений к решению указанных выше задач. В разд. 6 приведены формулы представления взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными весами через псевдообратную матрицу Мура–Пенроуза и частные виды взвешенных псевдообратных матриц. Разд. 7 посвящен адаптации методов вычисления взвешенных нормальных псевдорешений для построения алгоритмов решения задач наименьших квадратов с ограничениями.

Отметим, что в статье далее предполагается вещественность используемых скаляров, векторов, матриц и пространств.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ, ВЕКТОРНЫЕ И МАТРИЧНЫЕ НОРМЫ, СИММЕТРИЗУЕМЫЕ МАТРИЦЫ С ВЫРОЖДЕННЫМИ СИММЕТРИЗАТОРАМИ

Введем необходимые для дальнейшего изложения обозначения и определения. Пусть $\mathbf{R}^{m\times n}$ — множество действительных матриц размера $m\times n$. Приведем определение взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами [2]. Пусть $A\in\mathbf{R}^{m\times n}$, $X\in\mathbf{R}^{n\times m}$; $B\in\mathbf{R}^{m\times m}$ и $C\in\mathbf{R}^{n\times n}$ — симметричные положительно-полуопределенные матрицы. Тогда взвешенная псевдообратная матрица к матрице A определяется как матрица $X=A^{+}_{BC}$, удовлетворяющая четырем условиям:

$$AXA=A,\quad XAX=X,\quad (BAX)^T=BAX,\quad (XAC)^T=XAC. \tag{1}$$

В [2] установлено, что система матричных уравнений (1) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда выполняются соотношения для рангов матриц

$$rk\,(BA)=rk\,(A),\quad rk\,(AC)=rk\,(A), \tag{2}$$

где $rk\,(L)$ — ранг матрицы L.

Обозначим A^{+}_{EE} псевдообратную матрицу Мура-Пенроуза [6, 7] к матрице A, которая определяется как единственная матрица, удовлетворяющая условиям (1) при $B=C=E$, где E — единичная матрица.

Обозначим $\mathbf{R}^n$ n-мерное векторное пространство над полем действительных чисел, где векторы суть матрицы размера $n\times 1$. Пусть H — симметричная положительно-определенная или же положительно-полуопределенная матрица. Обозначим $\mathbf{R}^n(H)$ евклидово пространство в случае положительно-определенной метрики или псевдоевклидово пространство в случае неотрицательной метрики, введенной скалярным произведением $(u,v)_H=(Hu,v)_E$, где $(u,v)_E=u^T v$. Норму (полунорму) в $\mathbf{R}^n(H)$ введем соотношением $\|u\|_H=(u,u)_H^{1/2}$. В случае положительно-полуопределенной матрицы H через $\overline{\mathbf{R}}^n(H)\subset\mathbf{R}^n(H)$ и

$\overline{\mathbf{R}}^n(H_{EE}^+) \subset \mathbf{R}^n(H_{EE}^+)$ будем обозначать подпространство векторов u, удовлетворяющих условию

$$HH_{EE}^+ u = H^{1/2} H_{EE}^{+1/2} u = u, \tag{3}$$

где $H_{EE}^{+\,1/2} = (H^{1/2})_{EE}^+$.

В дальнейшем для положительно-полуопределенных матриц H будем пользоваться обозначением $H_{EE}^{+\,p} = (H^p)_{EE}^+$, где p — целое или дробное число.

Так как нуль-пространства матриц H, H_{EE}^+, HH_{EE}^+ и $H^{1/2}H_{EE}^{+1/2}$ совпадают [8], то полунормы $||\cdot||_H$, $||\cdot||_{H_{EE}^+}$ для векторов в $\mathbf{R}^n(H)$, $\mathbf{R}^n(H_{EE}^+)$ становятся нормами в $\overline{\mathbf{R}}^n(H)$, $\overline{\mathbf{R}}^n(H_{EE}^+)$.

Определим норму прямоугольной матрицы [9]. Пусть $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, H — симметричная положительно-определенная или положительно-полуопределенная матрица порядка m, V — симметричная положительно-определенная или положительно-полуопределенная матрица порядка n и x — произвольный вектор из $\mathbf{R}^n$. Предполагаем выполнение условий

$$rk\,(HA) = rk\,(A), \quad rk\,(AV) = rk\,(A)\,. \tag{4}$$

Если H и V — положительно-определенные матрицы, то условия в (4) заведомо выполняются.

Для множества матриц A, удовлетворяющих (4), норму введем соотношением

$$||A||_{HV} = \sup_{x\neq 0} \frac{||H^{1/2}AVx||_{E_m}}{||x||_{E_n}}, \tag{5}$$

где $x \in \mathbf{R}^n$, а нижний индекс при единичной матрице означает ее размерность. При таком определении норма матрицы A равна

$$||A||_{HV} = [\lambda_{\max}(VA^T HAV)]^{1/2}, \tag{6}$$

где $\lambda_{\max}(L)$ — максимальное собственное значение матрицы L.

В [9] показано, что функция $||\cdot||_{HV}$, определенная формулой (5), при выполнении условий (4) является аддитивной матричной нормой. Если условия (или одно из условий) (4) не выполняются, то формула (5) определяет полунорму матрицы A.

Пусть $A \in \mathbf{R}^{m\times p}$, $B \in \mathbf{R}^{p\times n}$, а $H \in \mathbf{R}^{m\times m}$, $V \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $M \in \mathbf{R}^{p\times p}$ — симметричные положительно-полуопределенные матрицы, причем удовлетворяется одно из условий

$$AMM_{EE}^+ = AM_{EE}^+M = A, \quad MM_{EE}^+B = M_{EE}^+MB = B.$$

Тогда (см. [10])

$$||AB||_{HV} \le ||A||_{HM}\,||B||_{M_{EE}^{+2}V}\,.$$

Далее определим матричную норму для квадратной матрицы [11]. Пусть A — произвольная квадратная матрица порядка n, а H — симметричная положительно-полуопределенная матрица того же порядка и эти матрицы удовлетворяют условиям

$$rk\,(HA) = rk\,(AH) = rk\,(A). \tag{7}$$

Норму матрицы A определим соотношением

$$\|A\|_H = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_H}{\|x\|_H} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|H^{1/2} A H_{EE}^{+1/2} H^{1/2} x\|_E}{\|H^{1/2} x\|_E}, \tag{8}$$

где x — произвольный вектор из $\overline{\mathbf{R}}^n(H)$.

При таком определении норма матрицы A равна

$$\|A\|_H = [\lambda_{\max}(H_{EE}^{+1/2} A^T H A H_{EE}^{+1/2})]^{1/2}. \tag{9}$$

Пусть A и B — квадратные матрицы одного порядка, причем выполняется одно из условий

$$AHH_{EE}^{+} = A, \quad HH_{EE}^{+} B = B, \tag{10}$$

где H — симметричная положительно-полуопределенная матрица того же порядка, что и матрицы A и B. Тогда

$$\|AB\|_H \leq \|A\|_H \|B\|_H, \tag{11}$$

т.е. функция $\|\cdot\|_H$, определенная формулой (8), при выполнении условия (7) и одного из условий (10) является мультипликативной матричной нормой. Из (8) следует $\|Ax\|_H \leq \|A\|_H \|x\|_H$, $x \in \overline{\mathbf{R}}^n(H)$, т.е. введенная соотношением (8) матричная норма согласована с векторной нормой.

Замечание 1. Из (6) и (9) следует, что введенная соотношением (8) матричная норма для квадратных матриц, удовлетворяющих условиям (7), является частным случаем матричной нормы, введенной для прямоугольных матриц формулой (5), которая удовлетворяет условиям (4), если в (5) положить, что A является квадратной матрицей, $V = H_{EE}^{+1/2}$ и $x \in \overline{\mathbf{R}}^n(H)$. Поэтому для нормы $\|A\|_H$, введенной соотношением (8), можно пользоваться обозначением $\|A\|_{HH_{EE}^{+1/2}}$.

Определим симметризуемые матрицы с положительно-полуопределенными симметризаторами [11].

Определение 1. Квадратную матрицу U будем называть симметризуемой слева или справа с помощью симметричных положительно-полуопределенных матриц M и N, если выполняются соответственно условия $MU = U^T M$, $rk(MU) = rk(U)$; $UN = NU^T$, $rk(UN) = rk(U)$.

Используя первое равенство в (1) и условия (2), можно показать, что

$$rk(BAX) = rk(AX), \quad rk(XAC) = rk(XA).$$

Тогда третье условие в (1) вместе с первым условием в (2) и четвертое условие в (1) вместе со вторым условием в (2) будут соответственно свидетельствовать, что матрица AX симметризуема слева симметризатором B, а матрица XA симметризуема справа симметризатором C.

В ряде работ определялись симметризуемые матрицы и изучались их свойства. В качестве симметризаторов в основном выступают положительно-определенные матрицы. Краткая их характеристика дана в [1]. В работах [12, 13] изучались H-симметричные матрицы, при этом H предполагается симметричной невырожденной знаконеопределенной матрицей.

В работах [9, 10] соответственно изучались свойства матрицы-произведения симметризуемой справа матрицы вырожденным симметризатором на произвольную прямоугольную матрицу и свойства матрицы-произведения произвольной прямоугольной матрицы на симметризуемую слева вырожденным симметризатором матрицу. Результаты этих исследований использовались при установлении скорости сходимости итерационных процессов. Сформулируем их в виде лемм.

Лемма 1. Пусть матрица $Y \in \mathbf{R}^{n \times m}$ удовлетворяет условию $C^{1/2} C_{EE}^{+1/2} Y = Y$; симметризуемая справа положительно-полуопределенным симметризатором C матрица $L \in \mathbf{R}^{n \times n}$ удовлетворяет условию $C^{1/2} C_{EE}^{+1/2} L = L$; LY — матрица, удовлетворяющая первому условию в (4) с $H = C_{EE}^{+}$; V — произвольная симметричная положительно-определенная или положительно-полуопределенная матрица порядка m, удовлетворяющая второму условию в (4) для матрицы LY. Тогда для матрицы $LY \neq 0$ имеет место соотношение

$$||LY||_{C_{EE}^{+} V} \leq ||L||_{C_{EE}^{+} C^{1/2}} ||Y||_{C_{EE}^{+} V} = \rho(L) ||Y||_{C_{EE}^{+} V},$$

где $\rho(L)$ — спектральный радиус матрицы L.

Лемма 2. Пусть матрица $Y \in \mathbf{R}^{n \times m}$ удовлетворяет условию $YB^{1/2} B_{EE}^{+1/2} = Y$; симметризуемая слева положительно-полуопределенным симметризатором B матрица $L \in \mathbf{R}^{m \times m}$ удовлетворяет условию $LB_{EE}^{+1/2} B^{1/2} = L$; YL — матрица, удовлетворяющая второму условию в (4) с $V = B_{EE}^{+1/2}$; H — произвольная симметричная положительно-определенная или же положительно-полуопределенная матрица порядка n, удовлетворяющая первому условию в (4) для матрицы YL. Тогда для матрицы $YL \neq 0$ имеет место соотношение

$$||YL||_{HB_{EE}^{+1/2}} \leq ||Y||_{HB_{EE}^{+1/2}} ||L||_{BB_{EE}^{+1/2}} = \rho(L) ||Y||_{HB_{EE}^{+1/2}}.$$

Для доказательства сходимости итерационных процессов в работе [14] установлено ряд свойств симметризуемых матриц, которые устанавливают следующие леммы.

Лемма 3. Пусть A и B — симметризуемые слева (справа) матрицы одним и тем же вырожденным симметризатором. Для того чтобы матрицы AB или BA были симметризуемы слева (справа) тем же симметризатором, необходимо и достаточно, чтобы матрицы A и B были перестановочны.

Отметим, что в работах [14, 15] приведены следствия из леммы 3, в которых рассмотрены некоторые ее частные случаи.

Лемма 4. Пусть для матриц A и B выполняются равенства $CA = A^T C$, $BC = CB^T$, где A и B — невырожденные матрицы, C — симметричная положительно-определенная или положительно-полуопределенная матрица. Тогда эти же равенства выполняются для матриц A^{-1} и B^{-1} соответственно.

Лемма 5. Для симметризуемой слева матрицы L вырожденным симметризатором B при выполнении условия $LB_{EE}^{+1/2} B^{1/2} = L$ имеет место равенство

$$||L^n||_B \equiv ||L^n||_{BB_{EE}^{+1/2}} = ||L||_B^n \equiv ||L||_{BB_{EE}^{+1/2}}^n = [\rho(L)]^n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

а для симметризуемой справа матрицы L вырожденным симметризатором C при выполнении условия $C^{1/2} C_{EE}^{+1/2} L = L$ имеет место равенство

$$||L^n||_{C_{EE}^{+}} \equiv ||L^n||_{C_{EE}^{+} C^{1/2}} = ||L||_{C_{EE}^{+}}^n \equiv ||L||_{C_{EE}^{+} C^{1/2}}^n = [\rho(L)]^n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

При исследовании взвешенных псевдообратных матриц часто используется утверждение о равенстве рангов некоторых матриц, связанных со взвешенной псевдообратной с вырожденными весами к матрице A (см. [10]).

Лемма 6. Ранги матриц A, A_{BC}^{+}, $A_{BC}^{+}A$, AA_{BC}^{+}, $CA^{T}BA$, $A^{T}BAC$, $C_{EE}^{+1/2}A_{BC}^{+}AC^{1/2}$, $C^{1/2}A^{T}BAC^{1/2}$, $B^{1/2}AA_{BC}^{+}B_{EE}^{+1/2}$, $B^{1/2}ACA^{T}B^{1/2}$ при выполнении условий (2) совпадают.

2. ВЗВЕШЕННОЕ ПСЕВДООБРАЩЕНИЕ И ВЗВЕШЕННОЕ НОРМАЛЬНОЕ ПСЕВДОРЕШЕНИЕ. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЗВЕШЕННЫХ ПСЕВДООБРАТНЫХ МАТРИЦ ПОСРЕДСТВОМ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ СИММЕТРИЗУЕМЫХ МАТРИЦ

Как указывалось выше, вопрос существования единственной взвешенной псевдообратной матрицы с положительно-полуопределенными весами рассмотрен в работе [2], где установлено, что система матричных уравнений (1) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда выполняются соотношения (2) для рангов матриц. В работах [16, 10] дано представление взвешенной псевдообратной матрицы в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых и симметричных матриц.

Теорема 1. Матрица A_{BC}^{+}, удовлетворяющая условиям (1), (2), представима в виде

$$A_{BC}^{+}=CSA^{T}B, \tag{12}$$

где $S=f\,(A^{T}BAC)$ — многочлен от матрицы $A^{T}BAC$ вида

$$S=-\alpha_{k}^{-1}[(A^{T}BAC)^{k-1}+\alpha_{1}(A^{T}BAC)^{k-2}+\ldots+\alpha_{k-1}E], \tag{13}$$

α_{p}, $p=1,\ldots,n$, — коэффициенты характеристического многочлена

$$f\,(\lambda)=\lambda^{n}+\alpha_{1}\lambda^{n-1}+\ \ldots+\alpha_{n}=\det\,[\lambda E-A^{T}BAC],$$

а α_{k} — последний, отличный от нуля коэффициент этого многочлена.

Следствие 1. Из (12), (13) вытекает, что взвешенная псевдообратная матрица с вырожденными весами A_{BC}^{+} имеет также представления

$$A_{BC}^{+}=S_{1}CA^{T}B=CA^{T}BS_{2}=C^{1/2}S_{3}C^{1/2}A^{T}B=CA^{T}B^{1/2}S_{4}B^{1/2},$$

где S_{1}, S_{2} — многочлены от симметризуемых матриц, а S_{3}, S_{4} — многочлены от симметричных матриц:

$$S_{1}=-\alpha_{k}^{-1}[(CA^{T}BA)^{k-1}+\alpha_{1}(CA^{T}BA)^{k-2}+\ldots+\alpha_{k-1}E],$$

$$S_{2}=-\alpha_{k}^{-1}[(ACA^{T}B)^{k-1}+\alpha_{1}(ACA^{T}B)^{k-2}+\ldots+\alpha_{k-1}E],$$

$$S_{3}=-\alpha_{k}^{-1}[(C^{1/2}A^{T}BAC^{1/2})^{k-1}+\alpha_{1}(C^{1/2}A^{T}BAC^{1/2})^{k-2}+\ldots+\alpha_{k-1}E],$$

$$S_{4}=-\alpha_{k}^{-1}[(B^{1/2}ACA^{T}B^{1/2})^{k-1}+\alpha_{1}(B^{1/2}ACA^{T}B^{1/2})^{k-2}+\ldots+\alpha_{k-1}E].$$

Следствие 2. Из (12), (13) вытекает, что симметризуемые идемпотентные матрицы $A_{BC}^{+}A$ и AA_{BC}^{+} имеют следующие представления:

$$A_{BC}^{+}A=CSA^{T}BA=f\,(CA^{T}BA)=$$

$$= -\alpha_k^{-1}[(CA^T BA)^k + \alpha_1 (CA^T BA)^{k-1} + \ldots + \alpha_{k-1} CA^T BA],$$

$$AA_{BC}^+ = ACSA^T B = f\,(ACA^T B) =$$

$$= -\alpha_k^{-1}[(ACA^T B)^k + \alpha_1 (ACA^T B)^{k-1} + \ldots + \alpha_{k-1} ACA^T B].$$

Следствие 3. Имеют место равенства $SA^T BACA^T = A^T BACSA^T = A^T$, $A^T BAA_{BC}^+ = A^T B$, $A_{BC}^+ ACA^T B = CA^T B$.

Поскольку каждая из матриц $A^T BAC$, $CA^T BA$, $ACA^T B$ есть произведение двух симметричных положительно-полуопределенных матриц, то их собственные значения неотрицательные и вещественные [17].

Относительно матриц $A_{BC}^+ A$ и $CA^T BA$ (AA_{BC}^+ и $ACA^T B$) имеет место утверждение [9, 15].

Лемма 7. Матрицы $A_{BC}^+ A$ и $CA^T BA$ (AA_{BC}^+ и $ACA^T B$) коммутируют, имеют полную общую систему собственных векторов и их нуль-пространства совпадают.

Формула (12) использовалась при исследовании свойств взвешенных псевдообратных матриц с положительно-полуопределенными весами, в том числе при обосновании разложений взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные ряды [9, 11, 18, 19], в матричные степенные произведения [14, 15], при получении и исследовании предельных представлений взвешенных псевдообратных матриц [10].

Замечание 2. Пусть $rk\,(A) = 1$ и выполняются условия (2). Тогда согласно лемме 6 $rk\,(A^T BAC) = 1$ и на основании (12), (13) получаем формулу $A_{BC}^+ = [\mathrm{tr}\,(A^T BAC)]^{-1} CA^T B$, где $\mathrm{tr}\,(L)$ — след матрицы L, для вычисления взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными весами к матрице A, когда ранг последней равен единице.

Далее установим связь взвешенного псевдообращения матриц со взвешенным нормальным псевдорешением систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и решением по методу взвешенных наименьших квадратов. Пусть

$$Ax = f, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad f \in \mathbf{R}^m \tag{14}$$

есть СЛАУ с произвольной матрицей $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$.

Определение 2.Вектор x^+, который является решением задачи: найти

$$\min_{x \in \overline{\mathbf{R}}^n (C_{EE}^+) \cap \Omega} \|x\|_{C_{EE}^+}, \quad \Omega = \operatorname{Arg} \min_{x \in \mathbf{R}^n} \|Ax - f\|_B, \tag{15}$$

где B и C_{EE}^+ — симметричные положительно-полуопределенные матрицы, называется взвешенным нормальным псевдорешением с вырожденными весами системы (14).

Определение 3. Вектор $x^{(1,3)}$, который является решением задачи: найти $\min\limits_{x \in \mathrm{R}^n} \|Ax - f\|_B$, где B — симметричная положительно-полуопределенная матрица, называется решением по методу взвешенных наименьших квадратов с вырожденным весом B системы (14).

Обозначим $Y = A_B^{(1,3)} \in \mathrm{R}^{n \times m}$ матрицу, удовлетворяющую условиям $AYA = A$, $(BAY)^T = BAY$, $rk\,(BA) = rk\,(A)$, где $B \in \mathrm{R}^{m \times m}$ — симметричная положительно-полуопределенная матрица, и укажем некоторые свойства решений по методу взвешенных наименьших квадратов и взвешенных нормальных псевдорешений [11].

Лемма 8. Вектор $x^{(1,3)} = A_B^{(1,3)} f$ удовлетворяет условию

$$|| Ax^{(1,3)} - f||_B = \min_{x \in \mathbf{R}^n} || Ax - f||_B. \tag{16}$$

Согласно лемме 8 вектор $x^{(1,3)} = A_B^{(1,3)} f$ минимизирует взвешенную норму невязки системы (14), т.е. является решением по методу взвешенных наименьших квадратов с вырожденным весом этой СЛАУ. Но такое решение в общем случае неединственно. Множество решений по методу взвешенных наименьших квадратов устанавливает следующее утверждение.

Лемма 9.Множество векторов, удовлетворяющих (16), определяется формулой $x^{(1,3)} = A_B^{(1,3)} f + (E - A^{(1)} A) y$, где y — произвольный вектор из $\mathbf{R}^n$, $A^{(1)}$ — матрица, удовлетворяющая первому условию в (1).

Теорема 2 [11]. Вектор $x^{+} = A_{BC}^{+} f$ является единственным решением задачи (15), т.е. взвешенным нормальным псевдорешением с вырожденными весами системы (14).

3. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЗВЕШЕННЫХ ПСЕВДООБРАТНЫХ МАТРИЦ В МАТРИЧНЫЕ СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ СТЕПЕНЕЙ

В ряде работ .(например, [20–22]), посвященных взвешенной псевдоинверсии с положительно-определенными весами, для исследования сходимости матричных степенных рядов и матричных степенных произведений к взвешенной псевдообратной матрице используется аппарат взвешенного сингулярного разложения матриц, построенный в [23]. Для этих же целей при исследовании взвешенной псевдоинверсии с вырожденными весами (и с положительно-определенными [24]) использовано представление взвешенных псевдообратных матриц в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых матриц, приведенное в разд. 2, спектральное разложение симметричных матриц и свойство псевдообращения по Муру–Пенроузу для произведения двух матриц [8]. Имеет место следующая теорема [11].

Теорема 3. Для $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, симметричных положительно-полуопределенных матриц B и C, удовлетворяющих (2), и для действительного числа σ такого, что

$$0 < \sigma < 2[\lambda_{\max}(C^{1/2} A^T BAC^{1/2})]^{-1}, \tag{17}$$

справедливо соотношение

$$A_{BC}^{+} = \sigma \sum_{k=0}^{\infty} (E - \sigma C^{1/2} A^T BAC^{1/2})^k C^{1/2} A^T B. \tag{18}$$

Следствие 4. Из формулы (18) вытекает справедливость следующих соотношений:

$$A_{BC}^{+} = \sigma \sum_{k=0}^{\infty} (E - \sigma CA^T BA)^k CA^T B = \sigma \sum_{k=0}^{\infty} C (E - \sigma A^T BAC)^k A^T B =$$
$$= \sigma \sum_{k=0}^{\infty} CA^T (E - \sigma BACA^T)^k B = \sigma \sum_{k=0}^{\infty} CA^T B (E - \sigma ACA^T B)^k =$$
$$= \sigma \sum_{k=0}^{\infty} CA^T B^{1/2} (E - \sigma B^{1/2} ACA^T B^{1/2})^k B^{1/2}.$$

Замечание 3. Верхняя оценка для σ согласно формуле (17) определяется максимальным собственным значением матрицы $C^{1/2} A^T BAC^{1/2}$. Поскольку ненулевые собственные значения матрицы-произведения при перестановке матриц-сомножителей не изменяются [25], то верхняя оценка для σ может определяться максимальными собственными значениями нескольких видов матриц: $CA^T BA$, $BACA^T$, $B^{1/2} ACA^T B^{1/2}$, $ACA^T B$.Относительно разложений взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в матричные степенные произведения в [14] доказана следующая теорема.

Теорема 4. Для произвольной матрицы $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, симметричных положительно-полуопределенных матриц $B \in \mathbf{R}^{m \times m}$ и $C \in \mathbf{R}^{n \times n}$, удовлетворяющих условиям (2), и для действительного числа σ такого, что

$$0 < \sigma < 2d_{\max}^{-2}, \tag{19}$$

где $d_{\max}$ — максимальное сингулярное число матрицы $B^{1/2} AC^{1/2}$, имеет место следующее разложение взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в матричное степенное произведение:

$$A_{BC}^{+} = \sigma C^{1/2} \prod_{k=0}^{\infty} \{E + (E - \sigma C^{1/2} A^T BAC^{1/2})^{2^k} \} C^{1/2} A^T B. \tag{20}$$

Следствие 5. Из (20) вытекает справедливость следующих соотношений:

$$A_{BC}^{+} = \sigma C \prod_{k=0}^{\infty} \{E + (E - \sigma A^T BAC)^{2^k} \} A^T B =$$

$$= \sigma \prod_{k=0}^{\infty} \{E + (E - \sigma CA^T BA)^{2^k} \} CA^T B =$$

$$= \sigma CA^T B \prod_{k=0}^{\infty} \{E + (E - \sigma ACA^T B)^{2^k} \} = \sigma CA^T \prod_{k=0}^{\infty} \{E + (E - \sigma BACA^T)^{2^k} \} B =$$

$$= \sigma CA^T B^{1/2} \prod_{k=0}^{\infty} \{E + (E - \sigma B^{1/2} ACA^T B^{1/2})^{2^k} \} B^{1/2}.$$

Замечание 4. Верхняя оценка для σ определяется согласно формуле (19) максимальным сингулярным числом матрицы $B^{1/2} AC^{1/2}$. Тогда из определения сингулярних чисел (см., например, [26]) и замечания 3 следует, что вместо $d_{\max}^2$ можно взять любое из максимальных собственных значений матриц: $CA^T BA$, $BACA^T$, $C^{1/2} A^T BAC^{1/2}$, $B^{1/2} ACA^T B^{1/2}$, $ACA^T B$.

4. РАЗЛОЖЕНИЯ, МНОГОЧЛЕННЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВЗВЕШЕННЫХ ПСЕВДООБРАТНЫХ МАТРИЦ И РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЗАДАЧ

В этом разделе предлагаются и исследуются разложения взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в матричные степенные ряды и матричные степенные произведения с отрицательными показателями степеней и произвольными положительными параметрами. Устанавливается связь этих разложений с многочленными предельными представлениями взвешенных псевдообратных матриц. Для этого использовано представление взвешенных псевдообратных матриц в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых матриц, приведенное в разд. 2, и свойство псевдообращения по Муру–Пенроузу для произведения двух матриц [8]. Имеет место следующая теорема [19].

Теорема 5. Для произвольной матрицы $A \neq 0 \in \mathbf{R}^{m \times n}$, симметричных положительно-полуопределенных матриц $B \in \mathbf{R}^{m \times m}$ и $C \in \mathbf{R}^{n \times n}$, удовлетворяющих условиям (2), и для действительного числа $0 < \delta < \infty$ имеют место соотношения

$$A_{BC}^{+} = \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} C^{1/2} (C^{1/2} A^T BAC^{1/2} + \delta E)^{-k} C^{1/2} A^T B =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} (CA^T BA + \delta E)^{-k} CA^T B = \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} C (A^T BAC + \delta E)^{-k} A^T B =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} CA^T B^{1/2} (B^{1/2} ACA^T B^{1/2} + \delta E)^{-k} B^{1/2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} CA^T B (ACA^T B + \delta E)^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} CA^T (BACA^T + \delta E)^{-k} B, \quad (21)$$

причем

$$|| A_{BC}^{+} - A_{\delta, p}^{+} ||_{C_{EE}^{+} V} \leq \delta^p [\lambda_{\min}^{*} (C^{1/2} A^T BAC^{1/2}) + \delta]^{-p} || A_{BC}^{+} ||_{C_{EE}^{+} V}, \quad (22)$$

где $A_{\delta, p}^{+} = \sum_{k=1}^{p} \delta^{k-1} C^{1/2} (C^{1/2} A^T BAC^{1/2} + \delta E)^{-k} C^{1/2} A^T B$, $p = 1, 2, \ldots$, V — любая положительно-определенная или положительно-полуопределенная матрица, которая удовлетворяет второму условию в (4) для матрицы $A_{BC}^{+} - A_{\delta, p}^{+}$, $\lambda_{\min}^{*}(L)$ — минимальное ненулевое собственное значение матрицы L.

Следствие 6. Имеет место оценка

$$|| A_{BC}^{+} - A_{\delta, p}^{+} ||_{C_{EE}^{+} V} \leq \delta^p [\lambda_{\max}^{*} (CA^T BA) + \delta]^{-p} || A_{BC}^{+} ||_{C_{EE}^{+} V}, \quad (23)$$

где

$$A_{\delta, p}^{+} = \sum_{k=1}^{p} \delta^{k-1} (CA^T BA + \delta E)^{-k} CA^T B, \quad 0 < \delta < \infty, \quad p = 1, 2, \ldots$$

Замечание 5. Из положительно-полуопределенных матриц в (22) можно положить $V = B_{EE}^{+1/2}$, где матрица B входит в определение взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными весами, поскольку из [19] имеем $rk\,[(A_{BC}^{+} - A_{\delta, p}^{+}) B_{EE}^{+1/2}] = rk\,(A_{BC}^{+} - A_{\delta, p}^{+})$.

Из оценки (23) для любого $p = 1, 2, \ldots$ имеем следующее предельное представление взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами

$$A_{BC}^{+} = \lim_{\delta \to +0} \sum_{k=1}^{p} \delta^{k-1} (CA^T BA + \delta E)^{-k} CA^T B. \quad (24)$$

Замечание 6. В формулах (23), (24) вместо частичной суммы бесконечных матричных степенных рядов можно взять частичные суммы других матричных степенных рядов, определенных соотношением (21).

Для получения формул разложения взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные произведения использовались матричные тождества, которые устанавливают следующие леммы [19].

Лемма 10. Для любых матриц $P \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $W \in \mathbf{R}^{n \times m}$ и действительного числа $0 < \delta < \infty$ имеет место тождество

$$\prod_{k=0}^{n-1} \{E+\delta^{2^k}(P+\delta E)^{-(2^k)}\}(P+\delta E)^{-1} W =$$

$$= \sum_{k=1}^{2^n} \delta^{k-1}(P+\delta E)^{-k} W, \quad n=1,2,\ldots \tag{25}$$

Лемма 11. Для любых матриц $L \in \mathbf{R}^{m\times m}$, $M \in \mathbf{R}^{n\times m}$ и действительного числа $0<\delta<\infty$ имеет место тождество

$$M(L+\delta E)^{-1} \prod_{k=0}^{n-1} \{E+\delta^{2^k}(L+\delta E)^{-(2^k)}\} =$$

$$= M \sum_{k=1}^{2^n} \delta^{k-1}(L+\delta E)^{-k}, \quad n=1,2,\ldots \tag{26}$$

При выполнении предположений теоремы 5 в силу (21) и (25) имеем следующее разложение взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в матричное степенное произведение

$$A_{BC}^{+} = \prod_{k=0}^{\infty} \{E+\delta^{2^k}(CA^T BA+\delta E)^{-(2^k)}\}(CA^T BA+\delta E)^{-1} CA^T B, \quad 0<\delta<\infty. \tag{27}$$

Обозначим

$$A_{\delta,n}^{+} = \prod_{k=0}^{n-1} \{E+\delta^{2^k}(CA^T BA+\delta E)^{-(2^k)}\}(CA^T BA+\delta E)^{-1} CA^T B, \quad n=1,2,\ldots \tag{28}$$

Тогда в силу тождества (25) и соотношения (23) получим

$$\| A_{BC}^{+} - A_{\delta,n}^{+}\|_{C_{EE}^{+}V} \le \delta^{2^n}[\lambda_{\min}^{*}(CA^T BA)+\delta]^{-(2^n)} \| A_{BC}^{+}\|_{C_{EE}^{+}V}. \tag{29}$$

Из оценки (29) для любого $n=1,2,\ldots$ имеем следующее предельное представление взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами:

$$A_{BC}^{+} = \lim_{\delta\to+0} \prod_{k=0}^{n-1} \{E+\delta^{2^k}(CA^T BA+\delta E)^{-(2^k)}\}(CA^T BA+\delta E)^{-1} CA^T B. \tag{30}$$

При выполнении предположений теоремы 5 в силу (21) и (26) имеем разложение взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в матричное степенное произведение

$$A_{BC}^{+} = CA^T B(ACA^T B+\delta E)^{-1} \prod_{k=0}^{\infty} \{E+\delta^{2^k}(ACA^T B+\delta E)^{-(2^k)}\}, \quad 0<\delta<\infty. \tag{31}$$

Обозначим

$$A_{\delta,n}^{+} = CA^T B(ACA^T B+\delta E)^{-1} \prod_{k=0}^{n-1} \{E+\delta^{2^k}(ACA^T B+\delta E)^{-(2^k)}\}, \quad n=1,2,\ldots \tag{32}$$

Тогда в силу тождества (26), соотношения (23) и замечания 6 получим

$$\| A_{BC}^{+} - A_{\delta,n}^{+}\|_{C_{EE}^{+}V} \le \delta^{2^n}[\lambda_{\min}^{*}(ACA^T B)+\delta]^{-(2^n)} \| A_{BC}^{+}\|_{C_{EE}^{+}V}. \tag{33}$$

Из оценки (33) для любого $n=1,2,\ldots$ имеем следующее предельное представление взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами

$$A_{BC}^{+} = \lim_{\delta \to +0} CA^T B\,(ACA^T B + \delta E)^{-1} \prod_{k=0}^{n-1} \{E + \delta^{2^k} (ACA^T B + \delta E)^{-(2^k)}\}. \quad (34)$$

Определение 4 [19]. Предельные представления (24), (30), (34) называются многочленными предельными представлениями взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами.

При $p = 1$ из (24) и замечания 6 имеем одночленные предельные представления взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами, исследованные в работе [10]. Разложения взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в матричные степенные ряды и матричные степенные произведения при $\delta \equiv 1$ исследованы соответственно в работах [11] и [14].

Из предельных представлений взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами следует, что при достаточно малом параметре δ матрицы A_{BC}^{+} и $A_{\delta,p}^{+}$, $A_{\delta,n}^{+}$ могут как угодно мало отличаться одна от другой и на основании предложенных в настоящем разделе предельных представлений можно вычислять приближения к взвешенным псевдообратным матрицам по формулам, определяющим $A_{\delta,p}^{+}$ и $A_{\delta,n}^{+}$. Оценки близости взвешенных псевдообратных матриц и их приближенных значений даны формулами (22), (23), (29), (33).

На основе предельных представлений взвешенных псевдообратных матриц можно также предложить регуляризованные задачи для вычисления взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами. Сначала рассмотрим регуляризованную задачу для нахождения взвешенного нормального псевдорешения СЛАУ (14), исходя из формулы (24). На основе этой формулы и теоремы 2 получим СЛАУ для вычисления приближения к взвешенному нормальному псевдорешению системы (14) при достаточно малом δ

$$(CA^T BA + \delta E)^p x = \sum_{k=1}^{p} \delta^{k-1} (CA^T BA + \delta E)^{p-k} CA^T Bf. \quad (35)$$

Так как матрица $CA^T BA$ — произведение двух симметричных положительно-полуопределенных матриц, то ее собственные значения неотрицательны и вещественны [17]. Тогда матрица $(CA^T BA + \delta E)^p$ при $\delta > 0$ невырождена и, следовательно, существует единственное решение системы (35). Оценку погрешности приближенного решения устанавливает следующая теорема [19].

Теорема 6. Пусть x^+ — взвешенное нормальное псевдорешение с положительно-полуопределенными весами системы (14), а $x_{\delta,p}$ — решение системы (35), тогда справедлива оценка

$$\| x^+ - x_{\delta,p} \|_{C_{EE}^+} \le \delta^p [\lambda_{\min}^{*} (CA^T BA) + \delta]^{-p} \| A_{BC}^{+} \|_{C_{EE}^+ E_m} \| f \|_{E_m}. \quad (36)$$

Далее для получения регуляризованной задачи нахождения приближения к взвешенному нормальному псевдорешению СЛАУ (14) используем формулу (30), на основании которой получим СЛАУ для вычисления приближения к взвешенному нормальному псевдорешению с вырожденными весами системы (14) при достаточно малом δ

$$\prod_{k=0}^{n-1} (CA^T BA + \delta E)^{2^k} (CA^T BA + \delta E) x =$$

$$= \prod_{k=0}^{n-1} \{(CA^T BA + \delta E)^{2^k} + \delta^{2^k} E\} CA^T Bf. \quad (37)$$

Оценку погрешности приближенного решения устанавливает следующая теорема [19].

Теорема 7. Пусть x^+ — взвешенное нормальное псевдорешение с вырожденными весами системы (14), а $x_{\delta,n}$ — решение системы (37), тогда справедлива оценка

$$||x^+ - x_{\delta,n}||_{C_{EE}^+} \le \delta^{2^n} [\lambda_{\min}^* (CA^T BA) + \delta]^{-(2^n)} || A_{BC}^+ ||_{C_{EE}^+ E_m} ||f||_{E_m} . \qquad (38)$$

Регуляризованные задачи для вычисления взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами на основе одночленных предельных представлений (при $p=1$) исследовались в работе [10], а с положительно-определенными весами — в [27]. Предполагается, что регуляризованные задачи будут решаться известными прямыми методами.

Рассмотрим другой вид разложений взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные ряды и матричные степенные произведения, исследованые соответственно в работах [18] и [15]. Они могут быть альтернативой рассмотренным выше разложениям. Математическим аппаратом исследования служило представление взвешенных псевдообратных матриц в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых матриц, приведенное в разд. 2, и свойство псевдообращения по Муру–Пенроузу для произведения двух матриц [8]. Имеет место следующая теорема [18].

Теорема 8. Для произвольной матрицы $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, симметричных положительно-полуопределенных матриц $B \in \mathbf{R}^{m \times m}$ и $C \in \mathbf{R}^{n \times n}$, удовлетворяющих условиям (2), и для действительного числа $0 < \alpha < \infty$ имеют место следующие разложения взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в матричные степенные ряды:

$$A_{BC}^+ = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} C^{1/2} (E + \alpha C^{1/2} A^T BAC^{1/2})^{-k} C^{1/2} A^T B =$$

$$= \alpha \sum_{k=1}^{\infty} (E + \alpha CA^T BA)^{-k} CA^T B = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} C\,(E + \alpha A^T BAC)^{-k} A^T B =$$

$$= \alpha \sum_{k=1}^{\infty} CA^T B^{1/2} (E + \alpha B^{1/2} ACA^T B^{1/2})^{-k} B^{1/2} =$$

$$= \alpha \sum_{k=1}^{\infty} CA^T B\,(E + \alpha ACA^T B)^{-k} = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} CA^T (E + \alpha BACA^T)^{-k} B. \qquad (39)$$

В работе [15] доказана следующая теорема.

Теорема 9. Для произвольной матрицы $A \ne 0 \in \mathbf{R}^{m \times n}$, симметричных положительно-полуопределенных матриц $B \in \mathbf{R}^{m \times m}$ и $C \in \mathbf{R}^{n \times n}$, удовлетворяющих условиям (2), и для действительного числа $0 < \alpha < \infty$ имеют место разложения взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в матричные степенные произведения

$$A_{BC}^+ = \alpha C^{1/2} (E + \alpha C^{1/2} A^T BAC^{1/2})^{-1} \times$$
$$\times \prod_{k=0}^{\infty} \{E + (E + \alpha C^{1/2} A^T BAC^{1/2})^{-(2^k)}\} C^{1/2} A^T B =$$

$$= \alpha (E + \alpha CA^T BA)^{-1} \prod_{k=0}^{\infty} \{E + (E + \alpha CA^T BA)^{-(2^k)}\} CA^T B =$$

$$= \alpha C (E + \alpha A^T BAC)^{-1} \prod_{k=0}^{\infty} \{E + (E + \alpha A^T BAC)^{-(2^k)}\} A^T B =$$

$$= \alpha CA^T B^{1/2} (E + \alpha B^{1/2} ACA^T B^{1/2})^{-1} \times$$

$$\times \prod_{k=0}^{\infty} \{E + (E + \alpha B^{1/2} ACA^T B^{1/2})^{-(2^k)}\} B^{1/2} =$$

$$= \alpha CA^T B (E + \alpha ACA^T B)^{-1} \prod_{k=0}^{\infty} \{E + (E + \alpha ACA^T B)^{-(2^k)}\} =$$

$$= \alpha CA^T (E + \alpha BACA^T)^{-1} \prod_{k=0}^{\infty} \{E + (E + \alpha BACA^T)^{-(2^k)}\} B, \qquad (40)$$

причем

$$|| A_{BC}^{+} - A_{\alpha, n}^{+} ||_{C_{EE}^{+} E_m} \le [1 + \alpha \lambda_{\min}^{*} (C^{1/2} A^T BAC^{1/2})]^{-(2^n)} || A_{BC}^{+} ||_{C_{EE}^{+} E_m}, \qquad (41)$$

где

$$A_{\alpha, n}^{+} = \alpha C^{1/2} (E + \alpha C^{1/2} A^T BAC^{1/2})^{-1} \times$$

$$\times \prod_{k=0}^{n-1} \{E + (E + \alpha C^{1/2} A^T BAC^{1/2})^{-(2^k)}\} C^{1/2} A^T B, \ n = 1, 2, \ldots$$

Следствие 7. В формуле (41) вместо имеющегося конечного числа сомножителей бесконечного матричного степенного произведения можно взять конечное число сомножителей других матричных степенных произведений, определенных соотношением (40), например

$$A_{\alpha, n}^{+} = \alpha (E + \alpha CA^T BA)^{-1} \times$$

$$\times \prod_{k=0}^{n-1} \{E + (E + \alpha CA^T BA)^{-(2^k)}\} CA^T B, \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (42)$$

Следствие 8. Из (41), (42) для любого $n = 1, 2, \ldots$ имеем следующее предельное представление взвешенной псевдообратной матрицы

$$A_{BC}^{+} = \lim_{\alpha \to \infty} \alpha (E + \alpha CA^T BA)^{-1} \prod_{k=0}^{n-1} \{E + (E + \alpha CA^T BA)^{-(2^k)}\} CA^T B. \qquad (43)$$

Отметим, что в силу (42), оценки (41) и матричного тождества (25) имеем

$$|| A_{BC}^{+} - A_{\alpha, p}^{+} ||_{C_{EE}^{+} E_m} \le [1 + \alpha \lambda_{\min}^{*} (C^{1/2} A^T BAC^{1/2})]^{-p} || A_{BC}^{+} ||_{C_{EE}^{+} E_m}, \qquad (44)$$

где $A_{\alpha, p}^{+} = \alpha \sum_{k=1}^{p} C^{1/2} (E + \alpha C^{1/2} A^T BAC^{1/2})^{-k} C^{1/2} A^T B$ или $A_{\alpha, p}^{+}$ равна любой из частичных сумм матричных степенных рядов в разложениях взвешенной псевдообратной матрицы согласно формуле (39).

Из (44) для любого $p = 1, 2, \ldots$ имеем следующее предельное представление взвешенной псевдообратной матрицы:

$$A_{BC}^{+} = \lim_{\alpha \to \infty} \alpha \sum_{k=1}^{p} (E + \alpha CA^T BA)^{-k} CA^T B. \qquad (45)$$

Из предельных представлений (43), (45) взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами и оценок (41), (44) следует, что при достаточно большом параметре α матрицы A^{+}_{BC} и $A^{+}_{\delta,p}$, $A^{+}_{\delta,n}$ могут как угодно мало отличаться одна от другой и на основании предложенных предельных представлений можно вычислять приближения к взвешенным псевдообратным матрицам. Оценки близости взвешенных псевдообратных матриц и их приближенных значений определены формулами (41), (44).

На основе предельных представлений (43), (45) взвешенных псевдообратных матриц можно также предложить регуляризованные задачи для вычисления взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами. Так, на основе формулы (45) и теоремы 2 получим СЛАУ для вычисления приближения к взвешенному нормальному псевдорешению системы (14) при достаточно большом α

$$(E+\alpha CA^{T}BA)^{p}x=\alpha\sum_{k=1}^{p}(E+\alpha CA^{T}BA)^{p-k}CA^{T}Bf. \tag{46}$$

Таким образом, СЛАУ (46) может служить альтернативой для СЛАУ (35) при вычислении приближения к взвешенному нормальному псевдорешению.

Замечание 7.Формулы (39) и (40) можно формально получить из формул (21), (27), если в них принять $\delta=\alpha^{-1}$ при $\alpha\to 0$.

5. ПОСТРОЕНИЕ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Опишем методику построения итерационных процессов для вычисления взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами, основанную на разложениях взвешенных псевдообратных матриц, описанных в разд. 3 и 4. Причем согласно определению (см., например, [14]) здесь будут построены итерационные процессы с различными порядками скоростей сходимости.

Рассмотрим построение итерационных процессов на основании разложений с положительными показателями степеней, описанных в разд. 3. Сначала для построения итерационного процесса вычисления взвешенных псевдообратных матриц используем разложение (см. следствие 4) $A^{+}_{BC}=\sigma\sum_{k=0}^{\infty}(E-\sigma CA^{T}BA)^{k}CA^{T}B$, на основе которого для вычисления приближения к A^{+}_{BC} получим итерационный процесс [9]

$$X_0=\sigma CA^{T}B,\quad X_{k+1}=X_k+\sigma CA^{T}B\,(E-AX_k),\quad k=0,1,\ldots \tag{47}$$

Оценку близости k-го приближения по формулам (44) к A^{+}_{BC} устанавливает следующая теорема [9].

Теорема 10. Итерационный процесс (47) при σ, определенным соотношением (17), сходится, причем имеет место оценка

$$\| A^{+}_{BC}-X_{k+1}\|_{C^{+}_{EE}V}\le q^{k+1}\| A^{+}_{BC}-X_0\|_{C^{+}_{EE}V}\ ,$$

где $q=\rho\,(A^{+}_{BC}A-\sigma CA^{T}BA)<1$, матрица C входит в определение взвешенной псевдообратной матрицы согласно (1), (2), а $V\in\mathbf{R}^{m\times m}$ — произвольная симметричная положительно-определенная или положительно-полуопределенная матрица, удовлетворяющая второму условию в (4) для матрицы $A^{+}_{BC}-X_{k+1}$.

Далее для построения итерационного процесса используем разложение взвешенной псевдообратной матрицы в матричное степенное произведение (см. следствие 5) $A_{BC}^{+} = \sigma \prod_{k=0}^{\infty} \{E + (E - \sigma CA^T BA)^{2^k}\} CA^T B$, на основе которого для вычисления A_{BC}^{+} получим итерационный процесс

$$X_0 = \sigma CA^T B, \quad X_k = X_{k-1} + (E - \sigma CA^T BA)^{2^{k-1}} X_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{48}$$

Оценку близости k-го приближения по формулам (48) к A_{BC}^{+} устанавливает следующая теорема [14].

Теорема 11. Итерационный процесс (48) при параметре σ, определенным соотношением (17), сходится, причем имеет место оценка

$$\| A_{BC}^{+} - X_k \|_{C_{EE}^{+} V} \le q^{2^k} \| A_{BC}^{+} - X_0 \|_{C_{EE}^{+} V} ,$$

где q и матрицы C и V определены в теореме 10.

Рассмотрим методику построения итерационных процессов для вычисления взвешенных нормальных псевдорешений. Положим $x_k = X_k f$, где матрицы X_k определены формулами (47). Тогда для вычисления приближения к $x^{+} = A_{BC}^{+} f$ получим итерационный процесс

$$x_0 = \sigma CA^T Bf, \quad x_{k+1} = x_k + \sigma CA^T B (f - Ax_k), \quad k = 0, 1, \ldots \tag{49}$$

Имеет место следующая теорема [11].

Теорема 12.Итерационный процесс (49) при σ, определенным соотношением (17), сходится в $\overline{\mathbf{R}}^n (C_{EE}^{+})$, причем имеет место оценка

$$\| x^{+} - x_{k+1} \|_{C_{EE}^{+}} \le q^{k+1} \| x^{+} - x_0 \|_{C_{EE}^{+}} ,$$

где q и матрица C определены в теореме 10.

Для вычисления x^{+} на основании (48) получим итерационный процесс [14]

$$x_0 = \sigma CA^T Bf, \quad x_k = x_{k-1} + (E - \sigma CA^T BA)^{2^{k-1}} x_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{50}$$

Теорема 13. Итерационный процесс (50) при σ, определенным соотношением (17), сходится в $\overline{\mathbf{R}}^n (C_{EE}^{+})$, причем имеет место оценка

$$\| x^{+} - x_k \|_{C_{EE}^{+}} \le q^{2^k} \| x^{+} \|_{C_{EE}^{+}} ,$$

где q и матрица C определены в теореме 10.

В работе [14] предложен и исследован итерационный метод p-го порядка скорости сходимости ($p \ge 2$) для вычисления взвешенных псевдообратных матриц

$$X_0 = \sigma CA^T B, \quad X_{k+1} = X_k + X_k \sum_{i=1}^{p-1} \Psi_k^i, \quad \Psi_k = E - AX_k, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{51}$$

Теорема 14. Итерационный процесс (51) при σ, определенным соотношением (17), сходится, причем имеет место оценка

$$\| A_{BC}^{+} - X_{k+1} \|_{C_{EE}^{+} V} \leq q^{p^{k+1} - 1} \| A_{BC}^{+} - X_0 \|_{C_{EE}^{+} V} ,$$

где q и матрицы C и V приведены в теореме 10.

Замечание 8. Согласно формуле (17) и замечанию 3 для реализации итерационных процессов (47)–(51) необходимо знать максимальное собственное значение матрицы $CA^T BA$ или его оценку сверху. Так как собственные значения этой матрицы неотрицательные, то $\rho(CA^T BA) = \lambda_{\max}(CA^T BA)$. Но для любой матричной нормы $\rho(L) \leq \| L \|$ (см. [17]), так что можно σ выбирать в пределах $0 < \sigma < 2 \| CA^T BA \|^{-1}$, где $\| L \|$ — любая матричная норма матрицы L. Далее, так как $\lambda_i(CA^T BA) \geq 0$, то $\lambda_{\max}(CA^T BA) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$. Но $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \operatorname{tr}(CA^T BA)$, так что итерационный параметр σ можно выбирать в пределах $0 < \sigma < 2 [\operatorname{tr}(CA^T BA)]^{-1}$.

Отметим, что оптимальное значение параметра σ определяется формулой [9]

$$\sigma_0 = 2 [\lambda_{\min}^{*}(CA^T BA) + \lambda_{\max}(CA^T BA)]^{-1}.$$

Теперь рассмотрим методику построения итерационных процессов на основании разложений с отрицательными показателями степеней [19], описанных в разд. 4. Вначале используем одно из разложений (21) взвешенной псевдообратной матрицы в матричный степенной ряд $A_{BC}^{+} = \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} (CA^T BA + \delta E)^{-k} CA^T B$, на основании которого для вычисления приближения к A_{BC}^{+} получим итерационный процесс

$$X_0 = 0, \quad X_k = (CA^T BA + \delta E)^{-1} (\delta X_{k-1} + CA^T B), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{52}$$

Оценка близости k-го приближения по формулам (52) к A_{BC}^{+} определяется формулой (23), где следует положить $p = k$. Для построения итерационного процесса с более высокой скоростью сходимости используем разложение (27) взвешенной псевдообратной матрицы в матричное степенное произведение, на основании которого для вычисления A_{BC}^{+} получим итерационный процесс

$$X_0 = (CA^T BA + \delta E)^{-1} CA^T B,$$

$$X_k = X_{k-1} + \delta^{2^{k-1}} (CA^T BA + \delta E)^{-(2^{k-1})} X_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{53}$$

Оценка близости k-го приближения по формулам (53) к A_{BC}^{+} определяется формулой (29), где следует положить $n = k$.

Теперь рассмотрим методику построения итерационных процессов для вычисления взвешенных нормальных псевдорешений. Положим $x_k = X_k f$, где матрицы X_k определены формулами (52). Тогда для вычисления приближения к $x^{+} = A_{BC}^{+} f$ получим итерационный процесс

$$x_0 = 0, \quad x_k = (CA^T BA + \delta E)^{-1} (\delta x_{k-1} + CA^T Bf), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{54}$$

Оценка близости k-го приближения по формулам (54) к x^+ определяется формулой (36), где следует положить $p = k$.

Итерационный процесс (54) можем переписать в виде

$$x_0 = 0, \quad \delta x_k + CA^T BAx_k = \delta x_{k-1} + CA^T Bf, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{55}$$

Для реализации итерационного процесса (54) необходимо один раз вычислить обратную матрицу к матрице $CA^T BA + \delta E$, а для реализации итерационного процесса (55) следует на каждой итерации решать систему линейных алгебраических уравнений. Вопрос выбора итерационного метода, по-видимому, будет зависеть не столько от объема вычислительной работы, сколько от величины погрешности, вносимой вычислительным процессом.

Отметим, что положив в (55) $B = C = E$, получим итерационный процесс, предложенный и исследованый в [28] при решении некорректных задач для операторных уравнений и названный авторами итерационным методом регуляризации. В работах [29, 30] предложены и исследованы итерационные методы регуляризации при решении задач связанного псевдообращения и 2-связного псевдообращения для операторных уравнений.

Для построения следующего итерационного процесса с более высокой скоростью сходимости снова положим $x_k = X_k f$, где матрицы X_k теперь определены формулами (53). Тогда для вычисления приближения к $x^+ = A^+_{BC} f$ получим итерационный процесс

$$x_0 = (CA^T BA + \delta E)^{-1} CA^T Bf,$$

$$x_k = x_{k-1} + \delta^{2^{k-1}} (CA^T BA + \delta E)^{-(2^{k-1})} x_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{56}$$

Оценка близости k-го приближения по формулам (56) к x^+ определяется формулой (38), где следует положить $n = k$.

Замечание 9. Из оценок (23), (29), (36), (38) следует, что погрешность приближения к точному решению задач зависит от количества итераций и параметра δ. Очевидно, что параметр δ необходимо выбирать по-возможности наименьшим. Но его величина ограничивается в сторону уменьшения необходимой точностью вычисления обратной матрицы к матрице $CA^T BA + \delta E$.

Замечание 10. На основании разложения взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные ряды для вычисления приближения к взвешенному нормальному псевдорешению получены регуляризованная задача (35) и итерационный процесс (54). Причем если $k = p$ и значение параметра δ во всех случаях одинаково, то теоретически имеем одну и ту же оценку близости приближенного решения, полученного двумя методами, к точному решению. Вопрос выбора метода вычисления приближенного решения задачи, по-видимому, будет зависеть не столько от объема вычислительной работы, сколько от величины погрешности, вносимой вычислительным процессом. Аналогично можно судить о методах, полученных на основании разложения взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные произведения.

Рассмотрим вопрос построения итерационных процессов на основании разложений (39), (40), предложенных и исследованных соответственно в работах [18] и [15]. Сначала для этой цели используем одно из разложений (39) взвешенной псевдообратной матрицы в матричный степенной ряд $A^+_{BC} = \alpha \sum\limits_{k=1}^{\infty} (E + \alpha CA^T BA)^{-k} CA^T B$, на основании которого для вычисления приближения к A_{BC}^{+} получим итерационный процесс [18]

$$X_0 = 0; \quad X_{k+1} = \Psi^{-p} X_k + \alpha \sum_{i=1}^{p} \Psi^{-i} CA^T B, \quad \Psi = E + \alpha CA^T BA, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{57}$$

Теорема 15. Итерационный процесс (57) при $0 < \alpha < \infty$ сходится, причем имеет место оценка

$$|| A_{BC}^{+} - X_{k+1} ||_{C_{EE}^{+} V} \le q^{p(k+1)} || A_{BC}^{+} ||_{C_{EE}^{+} V}, \tag{58}$$

где $q = \rho [A_{BC}^{+} A (E + \alpha CA^T BA)^{-1}] = [1 + \alpha \lambda_{\min}^{*} (CA^T BA)]^{-1} < 1$, $\lambda_{\min}^{*} (L)$ определено в теореме 5, а матрицы C и V — в теореме 10.

Далее для построения итерационного процесса будем использовать другое из разложений (39) взвешенной псевдообратной матрицы в матричный степенной ряд $A_{BC}^{+} = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} CA^T B (E + \alpha CA^T BA)^{-k}$, на основании которого получим итерационный процесс [18]

$$X_0 = 0, \quad X_{k+1} = X_k \Psi^{-p} + \alpha CA^T B \sum_{i=1}^{p} \Psi^{-i}, \quad \Psi = E + \alpha ACA^T B, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{59}$$

Теорема 16.Итерационный процесс (59) при $0 < \alpha < \infty$ сходится, причем имеет место оценка

$$|| A_{BC}^{+} - X_{k+1} ||_{HB_{EE}^{+1/2}} \le q^{p(k+1)} || A_{BC}^{+} ||_{HB_{EE}^{+1/2}}, \tag{60}$$

где $q = \rho (AA_{BC}^{+} \Psi^{-1}) = [1 + \alpha \lambda_{\min}^{*} (ACA^T B)]^{-1} < 1$, $\lambda_{\min}^{*} (L)$ определено в теореме 5, $H \in \mathbf{R}^{n \times n}$ — произвольная симметричная положительно-определенная или положительно-полуопределенная матрица, удовлетворяющая первому условию в (4) для матрицы $A_{BC}^{+} - X_{k+1}$, матрица B входит в определение взвешенной псевдообратной матрицы согласно третьему условию в (1) и первому условию в (2).

Замечание 11. Поскольку неотрицательные собственные значения матрицы-произведения при перестановке матриц-сомножителей не изменяются [25], то значения q, определенные в теоремах 15 и 16, совпадают. В формуле (58) матрицей $V \in \mathbf{R}^{m \times m}$ может быть произвольная симметричная положительно-полуопределенная матрица, удовлетворяющая второму условию в (4) для матрицы $A_{BC}^{+} - X_{k+1}$, а в формуле (60) матрицей $H \in \mathbf{R}^{n \times n}$ — произвольная симметричная положительно-полуопределенная матрица, удовлетворяющая первому условию в (4) для матрицы $A_{BC}^{+} - X_{k+1}$. Нетрудно убедиться, что в силу формул (12), (57) матрица $B_{EE}^{+1/2}$ удовлетворяет второму условию в (4) для матрицы $A_{BC}^{+} - X_{k+1}$, где матрицы X_{k+1} определены формулой (57), а матрица C_{EE}^{+} в силу формул (12), (59) удовлетворяет первому условию в (4) для матрицы $A_{BC}^{+} - X_{k+1}$, где матрицы X_{k+1} определены формулой (59). Тогда если в (58) положить $V = B_{EE}^{+1/2}$, а в (60) положить $H = C_{EE}^{+}$, то формулы (58), (60) будут идентичны.

Рассмотрим итерационный процесс для вычисления взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами. Положим $x_k = X_k f$, где матрицы X_k определены формулами (57). Тогда для вычисления приближения к $x^+ = A_{BC}^+ f$ получим итерационный процесс [18]

$$x_0 = 0,\ x_{k+1} = \Psi^{-p} x_k + \alpha \sum_{i=1}^{p} \Psi^{-i} CA^T Bf,\ \Psi = E + \alpha CA^T BA,\ k = 0, 1, \ldots \tag{61}$$

Теорема 17. Итерационный процесс (61) при $0 < \alpha < \infty$ сходится в $\overline{\mathbf{R}}^n (C_{EE}^+)$, причем имеет место оценка

$$\| x^+ - x_{k+1} \|_{C_{EE}^+} \le q^{p(k+1)} \| x^+ \|_{C_{EE}^+},$$

где q и матрица C определены соответственно в теоремах 15 и 10.

Итерационный процесс (61) можем переписать в виде

$$x_0 = 0,\quad \Psi^p x_{k+1} = x_k + \alpha \sum_{i=0}^{p-1} \Psi^i CA^T Bf,\quad \Psi = E + \alpha CA^T BA,\quad k = 1, 2, \ldots$$

Для реализации этого итерационного процесса необходимо на каждой итерации решать систему линейных алгебраических уравнений, а для реализации итерационного процесса (61) необходимо один раз вычислить обратную матрицу к матрице $CA^T BA + \delta E$. Вопрос выбора итерационного метода, по-видимому, будет зависеть не столько от объема вычислительной работы, сколько от величины погрешности, вносимой вычислительным процессом.

Далее рассмотрим методику построения итерационных процессов на основании разложений в матричные степенные произведения [15]. Сначала для этой цели используем одно из разложений (40) взвешенной псевдообратной матрицы в матричное степенное произведение

$$A_{BC}^+ = \alpha (E + \alpha CA^T BA)^{-1} \prod_{k=0}^{\infty} \{E + (E + \alpha CA^T BA)^{-(2^k)}\} CA^T B =$$

$$= \alpha \prod_{k=0}^{\infty} \{E + (E + \alpha CA^T BA)^{-(2^k)}\} (E + \alpha CA^T BA)^{-1} CA^T B,$$

на основании которого для вычисления A_{BC}^+ получим итерационный процесс [15]

$$X_0 = \alpha (E + \alpha CA^T BA)^{-1} CA^T B,$$

$$X_k = X_{k-1} + (E + \alpha CA^T BA)^{-(2^{k-1})} X_{k-1},\quad k = 1, 2, \ldots \tag{62}$$

Теорема 18. Итерационный процесс (62) при $0 < \alpha < \infty$ сходится, причем имеет место оценка

$$\| A_{BC}^+ - X_k \|_{C_{EE}^+ V} \le q^{2^k} \| A_{BC}^+ \|_{C_{EE}^+ V},$$

где q определено в теореме 15, а матрицы C и V — в теореме 10.

Далее для построения итерационного процесса используем другое из разложений (40) взвешенной псевдообратной матрицы в матричное степенное произведение

$$A_{BC}^{+} = \alpha CA^T B\,(E + \alpha ACA^T B)^{-1} \prod_{k=0}^{\infty} \{E + (E + \alpha ACA^T B)^{-(2^k)}\},$$

на основании которого для вычисления приближения к A_{BC}^{+} получим итерационный процесс [15]

$$X_0 = \alpha CA^T B\,(E + \alpha ACA^T B)^{-1},$$

$$X_k = X_{k-1} + X_{k-1}(E + \alpha ACA^T B)^{-(2^{k-1})}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{63}$$

Теорема 19.Итерационный процесс (63) при $0 < \alpha < \infty$ сходится, причем имеет место оценка

$$\| A_{BC}^{+} - X_k \|_{HB_{EE}^{+\,1/2}} \le q^{2^k} \| A_{BC}^{+} \|_{HB_{EE}^{+\,1/2}},$$

где q и матрицы H и B определены в теореме 16.

Рассмотрим итерационный процесс для вычисления взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами. Положим $x_k = X_k f$, где матрицы X_k определены формулами (62). Тогда для вычисления приближения к $x^{+} = A_{BC}^{+} f$ получим итерационный процесс [15]

$$x_0 = \alpha\,(E + \alpha CA^T BA)^{-1} CA^T Bf,$$

$$x_k = x_{k-1} + (E + \alpha CA^T BA)^{-(2^{k-1})} x_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad 0 < \alpha < \infty. \tag{64}$$

Теорема 20. Итерационный процесс (64) сходится в $\overline{\mathbf{R}}^n (C_{EE}^{+})$, причем имеет место оценка

$$\| x^{+} - x_k \|_{C_{EE}^{+}} \le q^{2^k} \| x^{+} \|_{C_{EE}^{+}},$$

где q и матрица C определены соответственно в теоремах 15 и 10.

Теперь положим $x_k = X_k f$, где матрицы X_k определены формулами (63). Тогда для вычисления приближения к x^{+} получим итерационный процесс

$$y_0 = (E + \alpha ACA^T B)^{-1} f, \quad y_k = \{E + (E + \alpha ACA^T B)^{-(2^{k-1})}\} y_{k-1},$$

$$x_k = \alpha CA^T B y_k, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad 0 < \alpha < \infty. \tag{65}$$

Теорема 21. Итерационный процесс (65) сходится в $\overline{\mathbf{R}}^n (C)$, причем имеет место оценка

$$\| x^{+} - x_k \|_C \le q^{2^k} \| A_{BC}^{+} \|_{CB_{EE}^{+1/2}} \| A \|_{BC_{EE}^{+1/2}} \| x^{+} \|_C,$$

где q определено в теореме 16, а матрицы B и C входят в определение взвешенной псевдообратной матрицы согласно (1), (2).

Замечание 12. Из определения значения q в теоремах 15 и 16 следует, что оно уменьшается с увеличением параметра α. И для ускорения сходимости итерационных процессов необходимо выбирать α достаточно большим. Но с увеличением параметра α будет расти обусловленность матрицы $E + \alpha CA^T BA$, с которой связана точность вычисления обратной матрицы к матрице $E + \alpha CA^T BA$. Поэтому выбор параметра α имеет большое значение при построении и реализации итерационных процессов.

Замечание 13. Как отмечалось выше (замечания 9, 12), в итерационных процессах для вычисления взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений с параметром δ для ускорения сходимости итераций этот параметр необходимо выбирать по-возможности наименьшим, а с параметром α — выбирать этот параметр по-возможности наибольшим. Их величины ограничиваются допустимой величиной вычислительной погрешности. Итерационные методы с учетом таких свойств можно назвать итерационными регуляризующими процессами или итерированными методами регуляризации.

Замечание 14. Как следует из оценок (22), (23), (29), (33), (36), (38), (41), (44), (58), (60), сходимости решений регуляризованных задач и итерационных процессов в значительной степени зависят от первого отличного от нуля собственного значения любой из матриц $CA^T BA$, $BACA^T$, $C^{1/2} A^T BAC^{1/2}$, $B^{1/2} ACA^T B^{1/2}$, $ACA^T B$.

Обзор литературы по прямым и итерационным методам вычисления взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений приведен в работе [1]. Здесь отметим статьи [31-34], в которых есть ряд алгоритмических результатов, использующих взвешенную псевдоинверсию с вырожденными весами, и рассмотрены вопросы параллельных вычислений для предложенных алгоритмов.

6. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВЗВЕШЕННЫХ ПСЕВДООБРАТНЫХ МАТРИЦ ЧЕРЕЗ ДРУГИЕ ПСЕВДООБРАТНЫЕ МАТРИЦЫ

Приведем формулы для представления взвешенной псевдообратной матрицы с положительно-полуопределенными весами через псевдообратную матрицу Мура–Пенроуза и частные виды взвешенных псевдообратных матриц [35].

Теорема 22. Пусть $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, а $B \in \mathbf{R}^{m\times m}$ и $C \in \mathbf{R}^{n\times n}$ — симметричные положительно-полуопределенные матрицы, которые удовлетворяют условиям (2). Тогда взвешенная псевдообратная матрица, определенная условиями (1), (2), представляется в виде

$$A^+_{BC} = C^{1/2} (B^{1/2} AC^{1/2})^+_{EE} B^{1/2}, \tag{66}$$

$$A^+_{BC} = C^{1/2} (C^{1/2} A^T BAC^{1/2})^+_{EE} C^{1/2} A^T B, \tag{67}$$

$$A^+_{BC} = CA^T B^{1/2} (B^{1/2} ACA^T B^{1/2})^+_{EE} B^{1/2}, \tag{68}$$

$$A^+_{BC} = CA^T B\, (ACA^T B)^+_{BB^+_{EE}}, \tag{69}$$

$$A^+_{BC} = CA^T (BACA^T)^+_{B^+_{EE}B}, \tag{70}$$

$$A^+_{BC} = (CA^T BA)^+_{C^+_{EE}C}\, CA^T B, \tag{71}$$

$$A^+_{BC} = C\, (A^T BAC)^+_{CC^+_{EE}}\, A^T B, \tag{72}$$

$$A^+_{BC} = (A^T BA)^+_{CC}\, A^T B, \tag{73}$$

$$A^+_{BC} = CA^T (ACA^T)^+_{BB}. \tag{74}$$

Для доказательства теоремы 22 используются предельные представления псевдообратной матрицы Мура-Пенроуза [8] и взвешенной псевдообратной матрицы [10], представление взвешенной псевдообратной матрицы в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых матриц (12), а также следствие 3.

Таким образом, для взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными весами получено ее представление через псевдообратные матрицы Мура-Пенроуза для прямоугольной матрицы (формула (66)) и двух видов симметричных матриц (формулы (67), (68)), а также через частные виды взвешенных псевдообратных матриц для четырех видов симметризуемых матриц (формулы (69)–(72)) и двух видов симметричных матриц (формулы (73), (74)). Отметим, что формула (66) другим способом получена в [2]. Формулы (66)–(68) можно использовать, например, для вычисления взвешенных псевдообратных матриц с помощью пакета прикладных программ, если в последнем имеются программы вычисления псевдообратной матрицы Мура-Пенроуза и корня квадратного из симметричной положительно-полуопределенной матрицы.

7. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

В ряде работ (например, [5, 36]) решение некоторых задач наименьших квадратов с ограничениями, а также *L*-псевдорешение [37], *Lg*-псевдорешение [38] представляются с помощью *ML*-взвешенных псевдообратных матриц.

Приведем определение *ML*-взвешенных псевдообратных матриц. Пусть $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $M \in \mathbf{R}^{q \times m}$, $L \in \mathbf{R}^{p \times n}$, тогда *ML*-взвешенная псевдообратная матрица A_{ML}^{+} к матрице A определяется соотношением [5, 26, 36]

$$A_{ML}^{+} = (E - (LP)_{EE}^{+} L)(MA)_{EE}^{+} M, \quad P = E - (MA)_{EE}^{+} MA. \tag{75}$$

Вектор $x = A_{ML}^{+} f$ является решением следующей задачи: найти

$$\min_{x \in \Omega} ||x||_{L^T L}, \quad \Omega = \operatorname{Arg} \min_{x \in \mathbf{R}^n} || Ax - f ||_{M^T M}. \tag{76}$$

В общем случае решение задачи (76) является неединственным. В работах [5, 26, 36] определено условие, при котором решение этой задачи будет единственным.

Определим взвешенную псевдообратную матрицу к матрице A с положительно-полуопределенными весами B и C_{EE}^{+} как матрицу, удовлетворяющую системе матричных уравнений

$$AXA = A, \quad XAX = X, \quad (BAX)^T = BAX, \quad (XAC_{EE}^{+})^T = XAC_{EE}^{+}, \tag{77}$$

при выполнении условий

$$rk\,(BA) = rk\,(A), \quad rk\,(AC_{EE}^{+}) = rk\,(A). \tag{78}$$

В работе [11] установлено, что *ML*-взвешенная псевдообратная матрица (75) при выполнении условий

$$B = M^T M, \quad C_{EE}^{+} = (L^T L)_{EE}^{+}, \quad rk\,(M^T MA) = rk\,(A), \quad rk\,(A\,(L^T L)_{EE}^{+}) = rk\,(A),$$

$$(Bu, u)_{E_m} \geq 0, \quad (C_{EE}^{+} v, v)_{E_n} \geq 0 \quad \# \, u \neq 0 \in \mathbf{R}^m, \quad v \neq 0 \in \mathbf{R}^n \tag{79}$$

является взвешенной псевдообратной матрицей, определенной соотношениями (77), (78).

Нам необходимо построить методы решения задач наименьших квадратов с ограничениями и задачи вычисления *L*-псевдорешения (*Lg*-псевдорешения). Для этого будем использовать построенные и исследованные в разд. 4 и 5 соответственно регуляризованные задачи и итерационные методы для вычисления взвешенных нормальных псевдорешений и условия (79), при которых *ML*-взвешенные псевдообратные матрицы совпадают со взвешенными псевдообратными матрицами с вырожденными весами.

В настоящей статье рассмотрим только задачу наименьших квадратов с ограничениями в виде линейных равенств и задачу наименьших квадратов с ограничениями в виде квадратичных неравенств. Постановки и методы решения других задач наименьших квадратов с ограничениями можно найти в работах [5, 10, 11, 14, 21].

Вначале рассмотрим задачу наименьших квадратов с ограничениями в виде линейных равенств [5, 26, 36]

$$\min_{f \in \Omega} ||Kf - g||_E , \quad \Omega = \{f \mid Lf = h\}. \tag{80}$$

Предполагается, что система $Lf = h$ совместная и

$$N(K) \cap N(L) = \{0\}, \tag{81}$$

где $N(Q)$ — нуль-пространство матрицы Q. Тогда существует [5] единственное решение задачи (80). Кроме того, предположим, что матрица $K^T K$ вырождена и для нее выполняется условие $rk(L(K^T K)^+_{EE}) = rk(L)$. Тогда в силу (79) решение задачи (80) определяется формулой [5]

$$f_* = L^+_{EC^+_{EE}} h + (KP_L)^+_{EE} g, \quad C = K^T K, \quad P_L = E - L^+_{EE} L. \tag{82}$$

Таким образом, решение задачи (80), (81) представляет собой сумму $f_* = f_*^{(1)} + f_*^{(2)}$ нормальных псевдорешений двух задач: нахождение взвешенного нормального псевдорешения системы $Lf^{(1)} = h$ с положительно-определенным весом E и вырожденным весом $C^+_{EE} = (K^T K)^+_{EE}$ (или нахождение ML-взвешенного нормального псевдорешения этой системы с $M = E$ и $L = K$) и нахождение нормального псевдорешения системы $KP_L = g$. Тогда на основании регуляризованных задач, построенных в разд. 4 для вычисления взвешенных нормальных псевдорешений, можно получить регуляризованные задачи для вычисления приближения к $f_*^{(1)}$ и $f_*^{(2)}$. Так, например, на основании теоремы 7 для приближенного вычисления $f_*^{(1)}$ при достаточно малом δ ($\delta \to 0$, $\delta > 0$) имеем СЛАУ

$$\prod_{k=0}^{n-1} (C^+_{EE} L^T L + \delta E)^{2^k} (C^+_{EE} L^T L + \delta E) f^{(1)} =$$

$$= \prod_{k=0}^{n-1} \{(C^+_{EE} L^T L + \delta E)^{2^k} + \delta^{2^k} E\} C^+_{EE} L^T h, \quad C^+_{EE} = (K^T K)^+_{EE}, \tag{83}$$

а для вычисления $f_*^{(2)}$ имеем СЛАУ ($\delta \to 0$, $\delta > 0$)

$$\prod_{k=0}^{n-1} ((KP_L)^T KP_L + \delta E)^{2^k} ((KP_L)^T KP_L + \delta E) f^{(2)} =$$

$$= \prod_{k=0}^{n-1} \{((KP_L)^T KP_L + \delta E)^{2^k} + \delta^{2^k} E\} (KP_L)^T g, \quad P_L = E - L^+_{EE} L. \tag{84}$$

На основании итерационных процессов, построенных в разд. 5, можно получить итерационные процессы для вычисления приближения к $f_*^{(1)}$ и $f_*^{(2)}$. Так, например, на основании итерационного процесса регуляризации (56) для приближенного вычисления $f_*^{(1)}$ имеем итерационный регуляризующий процесс ($\delta \to 0,\ \delta > 0$)

$$f_0^{(1)} = (C_{EE}^+ L^T L + \delta E)^{-1} C_{EE}^+ L^T h, \quad f_k^{(1)} =$$

$$= \{E + \delta^{2^{k-1}} (C_{EE}^+ L^T L + \delta E)^{-(2^{k-1})}\} f_{k-1}^{(1)},$$

$$C_{EE}^+ = (K^T K)_{EE}^+, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{85}$$

а для вычисления $f_*^{(2)}$ — итерационный регуляризующий процесс ($\delta \to 0$, $\delta > 0$)

$$f_0^{(2)} = ((KP_L)^T KP_L + \delta E)^{-1} (KP_L)^T g, \quad f_k^{(2)} = \{E + \delta^{2^{k-1}} ((KP_L)^T KP_L +$$

$$+ \delta E)^{-(2^{k-1})}\} f_{k-1}^{(2)}, \quad P_L = E - L_{EE}^+ L, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{86}$$

Методы решения задачи (80) предлагались в ряде работ. Так, в [26, 39] предложен и исследован метод взвешивания, в работе [40] — итерационный метод взвешивания, в [10, 19, 27] — регуляризованные задачи, в работах [11, 14] — итерационные методы, в [18, 19, 21, 29] — итерационные методы регуляризации, в [41] разработаны компьютерно-алгебраические процедуры для решения задачи (80).

Рассмотрим задачу наименьших квадратов с ограничениями в виде квадратичных неравенств [5]

$$\min_{f \in \Omega} \|Kf - g\|_E, \quad \Omega = \{f \mid \|f\|_N \le \omega\}, \quad N = L^T L, \tag{87}$$

а также частный случай этой задачи

$$\min_{f \in \Omega^*} \|Ax - b\|_E, \quad \Omega^* = \{x \mid \|x\|_E = \omega\}. \tag{88}$$

В [5] показано, что при $0 \le \omega < \|K_{EN}^+ g\|_N$, где $N = L^T L$, и выполнении условий (81) задача (87) имеет единственное решение, которое будет определяться с помощью ML-взвешенных псевдообратных матриц, что при выполнении условий (79) даст формулу для вычисления этого решения

$$f_* = L_{EC_{EE}^+}^+ x_* + (KP_L)_{EE}^+ g, \quad C = K^T K, \quad P_L = E - L_{EE}^+ L, \tag{89}$$

где x_* есть решение задачи (88) при

$$A = KL_{EC}^+, \quad P_L = E - L_{EE}^+ L, \quad Q_N = E - KP_L (KP_L)_{EE}^+, \quad b = Q_N g. \tag{90}$$

Для решения задачи (88) разработаны эффективные методы (см., например, [42, 43]). Тогда, если решение задачи (88) с учетом (90) получено, то решение задачи (87) представляется согласно (89) суммой $f_* = f_*^{(1)} + f_*^{(2)}$ из взвешенного нормального псевдорешения задачи $Lf^{(1)} = x_*$ с весами E и $C_{EE}^+ = (K^T K)_{EE}^+$ и нормального псевдорешения задачи $KP_L f^{(2)} = g$. Следовательно, для приближенного вычисления f_* можно использовать (с точностью до обозначения) регуляризованные задачи (83), (84) и итерационные процессы (85), (86).

В заключение отметим, что L-псевдорешение [37], Lg-псевдорешение [38], связанное нормальное псевдорешение [29] при некоторых предположениях также представляются суммой взвешенного нормального псевдорешения и обычного нормального псевдорешения (см. [36]), для приближенного решения которых можно использовать (с точностью до обозначений) СЛАУ (83), (84) и итерационные процессы (85), (86).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф., Дейнека В.С. Представления и разложения взвешенных псевдообратных матриц, итерационные методы и регуляризация задач. 1. Положительно-определенные веса // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 1. — С. 47–73.
2. Ward J.F., Boullion T.L., Lewis T.O. Weighted pseudoinverses with singular weights // SIAM J. Appl. Math. — 1971. — **21**, N 3. — P. 480–482.
3. Mitra S.K., Rao C.R. Projections under seminorms and generalized Moore-Penrose inverses // Linear Algebra and Appl. — 1974. — **9**. — P. 155–167.
4. Elden L. Perturbation theory for the least squares problem with linear equality constraints // SIAM J. Numer. Anal. — 1980. — **17**, N 3. — P. 338–350.
5. Elden L. A weighted pseudoinverse generalized singular values and constrained least squares problems // BIT. — 1982. — **22**, N 4. — P. 487–502.
6. Moore E.H. On the reciprocal of the general algebraic matrix // Abstract. Bull. Amer. Math. Soc. — 1920. — **26**. — P. 394–395.
7. Penrose R. A generalized inverse for matrices // Proc. Cambridge Phil. Soc. — 1955. — **51**, N 3. — P. 406–413.
8. Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. — М.: Наука, 1977. — 223 с.
9. Галба Е.Ф., Молчанов И.Н., Скопецкий В.В. Итерационные методы для вычисления взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными весами // Кибернетика и системный анализ. — 1999. — № 5. — С. 150–169.
10. Галба Е.Ф., Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Предельные представления взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами и регуляризация задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2004. — **44**, № 11. — С. 1928–1946.
11. Галба Е.Ф. Итерационные методы для вычисления взвешенного нормального псевдорешения с вырожденными весами // Там же. — 1999. — **39**, № 6. — С. 882–896.
12. Lancaster P., Rozsa P. Eigenvectors of H-self-adjoint matrices // Z. Angew. Math. und Mech. — 1984. — **64**, N 9. — S. 439–441.
13. Икрамов Х.Д. Об алгебраических свойствах классов псевдоперестановочных и H-самосопряженных матриц // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1992. — **32**, № 8. — С. 155–169.
14. Галба Е.Ф., Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Итерационные методы высоких скоростей сходимости для вычисления взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами // Там же. — 2005. — **45**, № 10. — С. 1731–1755.

15. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф., Дейнека В.С. Разложение взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами в матричные степенные произведения и итерационные методы // Укр. мат. журн. — 2007. — **59**, № 9. — С. 1269–1289.

16. Галба Е.Ф. Взвешенное псевдообращение матриц с вырожденными весами // Там же. — 1994. — **46**, № 10. — С. 1323–1327.

17. Ланкастер П. Теория матриц. — М.: Наука, 1982. — 270 с.

18. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф., Дейнека В.С. Разложение в ряды взвешенных псевдообратных матриц и итерационные методы для вычисления взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 1. — С. 32–62.

19. Галба Е.Ф., Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Разложения и многочленные предельные представления взвешенных псевдообратных матриц // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2007. — **47**, № 5. — С. 747–766.

20. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф., Дейнека В.С. Разложение взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные произведения // Укр. мат. журн. — 2004. — **56**, № 11. — С. 1539–1556.

21. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф., Дейнека В.С. Разложение взвешенных псевдообратных матриц с положительно-определенными весами в матричные степенные произведения и итерационные методы // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 1. — С. 45–64.

22. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф., Дейнека В.С. Итерационные методы с различными скоростями сходимости для вычисления взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений с положительно-определенными весами // Там же. — 2004. — № 5. — С. 20–44.

23. Галба Е.Ф. Взвешенное сингулярное разложение и взвешенное псевдообращение матриц // Укр. мат. журн. — 1996. — **48,** № 10. — С. 1426–1430.

24. Галба Е.Ф. Итерационные методы для вычисления взвешенной псевдообратной матрицы // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1996. — **36**, № 6. — С. 28–39.

25. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. — М.: Мир, 1989. — 656 с.

26. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов. — М.: Наука, 1986. — 232 с.

27. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф., Дейнека В.С. Предельные представления взвешенных псевдообратных матриц с положительно-определенными весами и регуляризация задач // Кибернетика и системный анализ. — 2003. — № 6. — С. 46–65.

28. Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю. Итерационные процедуры в некорректных задачах. — М.: Наука, 1986. — 183 с.

29. Архаров Е.В., Шафиев Р.А. Методы регуляризации задачи связанного псевдообращения с приближенными данными // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2003. — **43**, № 3. — С. 347–353.

30. Уваров В.Е., Шафиев Р.А. Итерационный метод регуляризации задачи 2-связного псевдообращения для операторного уравнения // Там же. — 2006. — **46**, № 10. — С. 1735–1743.

31. Censor Y., Gordon D., Gordon R. Component averaging: an efficient iterative parallel algorithm for large and sparse unstructured problems // Parallel Comput. — 2001. — **27**, N 6. — P. 777–808.

32. C e n s o r Y . , G o r d o n D . , G o r d o n R . BICAV: an inherently parallel algorithm for sparse systems with pixel-dependent weighting // IEEE Transactions on Medical Imaging. — 2001. — **20**. — P. 1050–1060.

33. C e n s o r Y . , E l f v i n g T . Block-iterative algorithms with diagonally skaled oblique projections for the linear feasibility problem // SIAM J. Matrix. Anal. — 2002. — **24**, N 1. — P. 40–58.

34. C e n s o r Y . , E l f v i n g T . Iterative algorithms with seminorm-induced oblique projections // Abstr. Appl. Anal. — 2003. — N 7. — P. 387–406.

35. Г а л б а Е . Ф . Представление взвешенной псевдообратной матрицы через другие псевдообратные матрицы // Доп. НАН УкраВни. — 1997. — № 4. — С. 12–17.

36. В а а р м а н н О . Обобщенные обратные отображения. — Таллин: Валгус, 1988. — 120 с.

37. М о р о з о в В . А . Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. — М.: Наука, 1987. — 240 с.

38. М е л е ш к о В . И . Применение рекуррентных оптимальных оценок с псевдообращением в задачах идентификации // Автоматика и телемеханика. — 1978. — № 9. — С. 79–89.

39. S t e w a r t G . W . On the weighting method for least squares problems with linear equality constraints // BIT. — 1997. — **37**. — P. 961–967.

40. V a n L o a n C . On the method of weighting for equality-constrained least- squares problems // SIAM J. Numer. Anal. — 1985. — **22**, N 5. — P. 851–864.

41. И к р а м о в Х . Д . , М а т и н ф а р М . О компьютерно-алгебраических процедурах для линейной задачи наименьших квадратов с линейными связями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2004. — **44**, № 2. — С. 206–212.

42. G o l u b G . H . Some modified eigenvalue problems // SIAM Rev. — 1973. — **15**, N 2. — P. 318–334.

43. G o l u b G . H . , v o n M a t t V . Quadratically constrained least squares and quadratic problems // Numer. Math. — 1991. — **59**, N 6. — P. 561–580.

Поступила 02.11.2007