УДК 519.8

В.А. ЕМЕЛИЧЕВ, К.Г. КУЗЬМИН

КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ВЕКТОРНЫХ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ «НА УЗКИЕ МЕСТА» В ТЕРМИНАХ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ

Ключевые слова: *векторная комбинаторная задача, критерий «узкого места», множество Парето, устойчивость задачи по векторному критерию, возмущающая матрица*.

При исследовании различных типов устойчивости векторных дискретных задач оптимизации возникает проблема получения условий, при которых множество решений задачи обладает некоторым наперед заданным свойством инвариантности по отношению к внешним воздействиям на исходные данные задачи. В работах [1–3] (см. также [4, 5]) получены необходимые и достаточные условия пяти известных типов устойчивости (T_1–T_5-устойчивости) векторных целочисленных задач линейного и квадратичного программирования. В настоящей статье приводятся аналогичные результаты для векторных комбинаторных задач с нелинейными частными критериями «узкого места» (MINMAX).

Особенность изложенных здесь необходимых и достаточных условий устойчивости заключается в том, что они формулируются в терминах нескольких видов бинарных отношений, заданных на системе подмножеств конечного множества. Отметим, что язык бинарных отношений широко используется в моделях многокритериального выбора (см., например, [6–10]).

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ И СВОЙСТВА

Рассмотрим следующую модель векторной (n-критериальной) комбинаторной задачи. Пусть заданы множество $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, $m \geq 2$, и система подмножеств $T \subseteq 2^E \setminus \{\varnothing\}$, $|T| \geq 2$. Следуя [11–15], элементы множества T будем называть траекториями. Пусть частными критериями вектор-функции $f(t, A) = (f_1(t, A_1), f_2(t, A_2), \ldots, f_n(t, A_n))$ являются минимаксные критерии

$$f_i(t, A_i) = \max_{j \in N(t)} a_{ij} \to \min_{t \in T}, \; i \in N_n,$$

где $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, $N(t) = \{j \in N_m : e_j \in t\}$, A_i — i-я строка матрицы $A = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times m}$.

Под векторной (n-критериальной) траекторной задачей $Z^n(A)$, $n \geq 1$, будем понимать задачу поиска множества Парето (множества эффективных траекторий)

$$P^n(A) = \{t \in T : \forall t' \in T \setminus \{t\} \; (t \underset{A}{\overline{\succ}} t')\},$$

где $\underset{A}{\overline{\succ}}$ — как обычно, отрицание бинарного отношения $\underset{A}{\succ}$:

$$t \underset{A}{\succ} t' \;\Leftrightarrow\; f(t, A) \geq f(t', A) \;\&\; f(t, A) \neq f(t', A).$$

Отметим, что в схему скалярных (однокритериальных) траекторных задач (с линейными, минимаксными и другими критериями) вкладываются многие экстремальные комбинаторные задачи, в частности, задачи на графах (о коммивояжере, паросочетаниях, остовах и др.), задачи булева программирования и некоторые задачи теории расписаний [11–15].

В соответствии с определениями [1–3, 5] задачу $Z^n(A)$ назовем:

- T_1-устойчивой, если $\exists\, \varepsilon > 0\ \ \forall B \in \mathcal{B}(\varepsilon)\ \ (P^n(A) \bigcap P^n(A+B) \neq \varnothing)$;
- T_2-устойчивой, если $\exists\, \varepsilon > 0\ \exists\, t^0 \in P^n(A)\ \ \forall B \in \mathcal{B}(\varepsilon)\ \ (t^0 \in P^n(A+B))$;
- T_3-устойчивой, если $\exists\, \varepsilon > 0\ \forall B \in \mathcal{B}(\varepsilon)\ \ (P^n(A+B) \subseteq P^n(A))$;
- T_4-устойчивой, если $\exists\, \varepsilon > 0\ \forall B \in \mathcal{B}(\varepsilon)\ \ (P^n(A) \subseteq P^n(A+B))$;
- T_5-устойчивой, если $\exists\, \varepsilon > 0\ \forall B \in \mathcal{B}(\varepsilon)\ \ (P^n(A) = P^n(A+B))$.

Здесь $\mathcal{B}(\varepsilon) = \{B \in \mathbf{R}^{n \times m} : ||B|| < \varepsilon\}$ — множество возмущающих матриц, $||B|| = \max\{|b_{ij}| : (i,j) \in N_n \times N_m\}$.

В терминологии [1–3, 5] все перечисленные типы устойчивости являются устойчивостью по векторному критерию.

Для любых траекторий t и t' введем ряд бинарных отношений:

$$t \underset{A}{\succcurlyeq} t' \Leftrightarrow f(t, A) \geq f(t', A),$$

$$t \underset{A}{\equiv} t' \Leftrightarrow f(t, A) = f(t', A),$$

$$t \underset{A}{>} t' \Leftrightarrow \forall i \in N_n \ \ (f_i(t, A_i) > f_i(t', A_i)),$$

$$t \underset{A}{\vdash} t' \Leftrightarrow \forall i \in N_n \ \ (f_i(t, A_i) = f_i(t', A_i) \Rightarrow N_i(t, A_i) \supseteq N_i(t', A_i)),$$

$$t \underset{A}{\vDash} t' \Leftrightarrow \forall i \in N_n \ \ (f_i(t, A_i) > f_i(t' \setminus t, A_i)),$$

$$t \underset{A}{\sim} t' \Leftrightarrow \forall i \in N_n \ \ (N_i(t, A_i) = N_i(t', A_i)),$$

$$t \underset{A}{\approx} t' \Leftrightarrow \forall i \in N_n \ \ (f_i(t \bigcup t', A_i) > f_i(\Delta(t, t'), A_i)),$$

где $N_i(t, A_i) = \operatorname{Arg\,max}\{a_{ij} : j \in N(t)\}$, $\Delta(t, t') = (t \bigcup t') \setminus (t \bigcap t')$, $f_i(\varnothing, A_i) = -\infty$.

Замечание 1. Очевидно, что при $t = t'$ соотношения $t \underset{A}{\succcurlyeq} t'$, $t \underset{A}{\equiv} t'$, $t \underset{A}{\vdash} t'$, $t \underset{A}{\vDash} t'$, $t \underset{A}{\sim} t'$ и $t \underset{A}{\approx} t'$ выполняются для любой матрицы $A \in \mathbf{R}^{n \times m}$.

Ввиду непрерывности функций $f_i(t, A_i)$ в пространстве $\mathbf{R}^m$ вытекают следующие свойства бинарных отношений.

Свойство 1. Если $t \underset{A}{\vDash} t'$, то существует такое число $\varepsilon > 0$, что для любой возмущающей матрицы $B \in \mathcal{B}(\varepsilon)$ справедливо соотношение $t \underset{A+B}{\vDash} t'$.

Свойство 2. Если $t \underset{A}{\approx} t'$, то найдется такое число $\varepsilon > 0$, что для всякой возмущающей матрицы $B \in \mathcal{B}(\varepsilon)$ выполняется соотношение $t \underset{A+B}{\approx} t'$.

Свойство 3. Если $t \underset{A}{\succ} t'$, то существует такое число $\varepsilon > 0$, что для каждой возмущающей матрицы $B \in \mathcal{B}(\varepsilon)$ имеет место соотношение $t \underset{A+B}{\not\equiv} t'$.

Свойство 4. Если $t \underset{A}{>} t'$, то существует такое число $\varepsilon > 0$, что для любой возмущающей матрицы $B \in \mathcal{B}(\varepsilon)$ имеет место соотношение $t \underset{A+B}{\succ} t'$.

Свойство 5. Пусть $t \in T$, $T' \subseteq T \setminus \{t\}$. Если для каждой траектории $t' \in T'$ верно соотношение

$$t \underset{A}{\overline{\succcurlyeq}} t', \tag{1}$$

то справедлива формула

$$\exists\, \varepsilon^0 > 0 \;\; \forall B \in \mathcal{B}(\varepsilon^0) \;\; \forall t' \in T' \;\; (t \underset{A+B}{\bar{\succ}} t'). \tag{2}$$

Действительно, при выполнении (1) найдется индекс $s \in N_n$ с условием $f_s(t, A_s) < f_s(t', A_s)$. Из этого неравенства, учитывая непрерывность функции $f_s(t, A_s)$ в пространстве $\mathbf{R}^m$, вытекает существование такого числа $\varepsilon(t') > 0$, что для любой возмущающей матрицы $B \in \mathcal{B}(\varepsilon(t'))$ верно отношение $t \underset{A+B}{\bar{\succcurlyeq}} t'$, а потому $t \underset{A+B}{\bar{\succ}} t'$. Отсюда, полагая $\varepsilon^0 = \min\{\varepsilon(t') : t' \in T'\}$, выводим (2).

Свойство 6. Если $t \underset{A}{\vDash} t'$, то $t \underset{A}{\succcurlyeq} t'$.

Свойство 7. Если $t \underset{A}{\vDash} t'$ и $t' \underset{A}{\vDash} t$, то $t \underset{A}{\sim} t'$.

Свойство 8. Если $t \underset{A}{\sim} t' \Leftrightarrow t \underset{A}{\approx} t' \Rightarrow t \underset{A}{\equiv} t'$.

Свойство 9. Если $t \underset{A}{\succcurlyeq} t'$, то $t' \underset{A}{\bar{\succ}} t$, $t \underset{A}{\vdash} t' \Leftrightarrow t \underset{A}{\vDash} t'$.

ЛЕММЫ

Далее будем использовать обозначение $\overline{P^n}(A) = T \setminus P^n(A)$.

Лемма 1. Пусть траектории t и t' таковы, что $t \underset{A}{\equiv} t'$ и $t' \underset{A}{\bar{\vdash}} t$. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется возмущающая матрица $B^0 \in \mathcal{B}(\varepsilon)$ с условием $t \in \overline{P^n}(A + B^0)$.

Доказательство. Из $t' \underset{A}{\bar{\vdash}} t$ вытекает существование таких индексов $p \in N_m$ и $s \in N_n$, что $p \in N_s(t, A_s) \setminus N_s(t', A_s)$. Наличие этих индексов позволяет конструировать искомую возмущающую матрицу $B^0 = [b_{ij}^0] \in \mathcal{B}(\varepsilon)$ с элементами $b_{ij}^0 = \begin{cases} \alpha, & \text{если } i = s,\ j = p, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$ где $0 < \alpha < \varepsilon$. Действительно, учитывая соотношение $t \underset{A}{\equiv} t'$, получаем

$$f_s(t, A_s + B_s^0) = a_{sp} + \alpha = f_s(t, A_s) + \alpha > f_s(t, A_s) = f_s(t', A_s) = f_s(t', A_s + B_s^0),$$

$$f_i(t, A_i + B_i^0) = f_i(t, A_i) = f_i(t', A_i) = f_i(t', A_i + B_s^0) \text{ при } i \neq s.$$

Поэтому имеем $t \underset{A+B^0}{\succ} t'$, т.е. $t \in \overline{P^n}(A + B^0)$. Здесь, как и прежде, B_i^0 — i-я строка матрицы B^0.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть траектория t^0 такова, что $\forall t \in P^n(A)$ $(t^0 \underset{A}{\bar{\succcurlyeq}} t \vee t^0 \underset{A}{\bar{\vdash}} t)$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists B^0 \in \mathcal{B}(\varepsilon) \;\; \forall t \in P^n(A) \;\; (t^0 \underset{A+B^0}{\bar{\succ}} t). \tag{3}$$

Доказательство. Полагая $\varepsilon > 0$, построим возмущающую матрицу $B^0 = [b_{ij}^0] \in \mathcal{B}(\varepsilon)$ по правилу

$$b_{ij}^0 = \begin{cases} \alpha, & \text{если } i \in N_n,\ j \in N_m \setminus N(t^0), \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $0 < \alpha < \varepsilon$. Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. $t^0 \underset{A}{\geqslant} t$. Тогда из условия леммы следует, что $t^0 \underset{A}{\overline{\vdash}} t$. Поэтому найдутся такие индексы $p \in N_m$ и $s \in N_n$, что

$$f_s(t^0, A_s) = f_s(t, A_s) \text{ и } p \in N_s(t, A_s) \setminus N_s(t^0, A_s).$$

Отсюда, ввиду строения возмущающей матрицы B^0, находим

$$f_s(t^0, A_s + B_s^0) = f_s(t^0, A_s) = f_s(t, A_s) = a_{sp} < a_{sp} + \alpha = f_s(t, A_s + B_s^0),$$

т.е. $t^0 \underset{A+B^0}{\overline{\succ}} t$.

Случай 2. $t^0 \underset{A}{\overline{\geqslant}} t$. Тогда найдется такой индекс $s \in N_n$, что $f_s(t^0, A_s) < f_s(t, A_s)$. Из этого неравенства с учетом строения возмущающей матрицы B^0 выводим

$$f_s(t^0, A_s + B_s^0) = f_s(t^0, A_s) < f_s(t, A_s) \leq f_s(t, A_s + B_s^0),$$

поэтому и в этом случае выполняется соотношение $t^0 \underset{A+B^0}{\overline{\succ}} t$.

Собирая все доказанное, убеждаемся в справедливости формулы (3).

Лемма 2 доказана.

КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

Теорема 1. Векторная траекторная задача $Z^n(A)$, $n \geq 1$, T_1-устойчива при любой матрице $A \in \mathbf{R}^{n \times m}$.

Доказательство. При $P^n(A) = T$ утверждение теоремы 1 очевидно.

Пусть $P^n(A) \neq T$, $t \in P^n(A)$. Тогда для любой траектории $t' \in \overline{P^n}(A)$ имеем $t \underset{A}{\overline{\geqslant}} t'$. Поэтому согласно свойству 5 верна формула

$$\exists \varepsilon > 0 \ \ \forall B \in \mathcal{B}(\varepsilon) \ \ \forall t' \in \overline{P^n}(A) \ \ (t \underset{A+B}{\overline{\succ}} t'). \tag{4}$$

Возможны два случая.

Случай 1. $t \in \overline{P^n}(A+B)$. Тогда благодаря внешней устойчивости множества Парето $P^n(A+B)$ (см., например, [8], с. 34) справедлива формула

$$\exists t^0 \in P^n(A+B) \ \ (t \underset{A+B}{\succ} t^0).$$

Отсюда и из (4) получаем, что $t^0 \in P^n(A)$. Таким образом, $t^0 \in P^n(A) \bigcap \bigcap P^n(A+B) \neq \varnothing$.

Случай 2. $t \in P^n(A+B)$. Тогда с очевидностью имеем $t \in P^n(A) \bigcap \bigcap P^n(A+B) \neq \varnothing$.

Собирая все доказанное, заключаем, что

$$\exists \varepsilon > 0 \ \ \forall B \in \mathcal{B}(\varepsilon) \ \ (P^n(A) \bigcap P^n(A+B) \neq \varnothing),$$

и поэтому задача $Z^n(A)$ T_1-устойчива, что и доказывает теорему 1.

Введем обозначения для множеств строго эффективных и слабо эффективных траекторий (множеств Смейла и Слейтера) соответственно:

$$Sm^n(A) = \{t \in T : \forall t' \in T \setminus \{t\} \ (t \underset{A}{\overline{\geqslant}} t')\},$$

$$Sl^n(A) = \{t \in T : \forall t' \in T \setminus \{t\} \ (t \underset{A}{\overline{>}} t')\}.$$

Очевидно, что $Sm^n(A) \subseteq P^n(A) \subseteq Sl^n(A)$ при всякой матрице $A \in \mathbf{R}^{n \times m}$.

Теорема 2. Для векторной траекторной задачи $Z^n(A)$, $n \geq 1$, следующие утверждения эквивалентны:

(i) задача $Z^n(A)$ T_2-устойчива;

(ii) $Sm^n(A) = \varnothing \Rightarrow \exists\, t^0 \in P^n(A)\ \ \forall t \underset{A}{\equiv} t^0\ \ (t \underset{A}{\vdash} t^0)$;

(iii) $Sm^n(A) = \varnothing \Rightarrow \exists\, t^0 \in P^n(A)\ \ \forall t \underset{A}{\equiv} t^0\ \ (t \underset{A}{\vDash} t^0)$.

Доказательство. (i)$\Rightarrow$(ii). Пусть задача $Z^n(A)$ T_2-устойчива. Допустим, что вопреки утверждению (ii) для любой траектории $t \in P^n(A)$ найдется траектория $t^* \underset{A}{\equiv} t$ с условием $t^* \underset{A}{\overline{\vdash}} t$. Тогда из леммы 1 следует, что для всякого числа $\varepsilon > 0$ существует возмущающая матрица $B \in \mathcal{B}(\varepsilon)$, при которой $t \in \overline{P^n}(A+B)$. Отсюда следует, что задача $Z^n(A)$ не является T_2-устойчивой, а это противоречит (i).

(ii)$\Rightarrow$(iii). Эта импликация следует из свойства 9, поскольку отношение $t \underset{A}{\equiv} t^0$ влечет $t \underset{A}{\succcurlyeq} t^0$.

(iii)$\Rightarrow$(i). При выполнении утверждения (iii) возможны два случая.

Случай 1. $Sm^n(A) \neq \varnothing$. Пусть $t^0 \in Sm^n(A)$. Тогда для любой траектории $t \in T \setminus \{t^0\}$ имеем $t^0 \underset{A}{\overline{\succcurlyeq}} t$. Поэтому согласно свойству 5 справедлива формула

$$\exists\, \varepsilon^0 > 0\ \ \forall B \in \mathcal{B}(\varepsilon^0)\ \ \forall t \in T \setminus \{t^0\}\ \ (t^0 \underset{A+B}{\overline{\succ}} t). \tag{5}$$

Отсюда $t^0 \in P^n(A+B)$, т.е. задача $Z^n(A)$ T_2-устойчива.

Случай 2. $Sm^n(A) = \varnothing$. Пусть $t^0 \in P^n(A)$, $t \in T \setminus \{t^0\}$. Тогда возможны две альтернативы.

1. $t \underset{A}{\equiv} t^0$. Тогда $t \underset{A}{\vDash} t^0$. Поэтому по свойству 1 существует такое число $\varepsilon(t) > 0$, что для любой возмущающей матрицы $B \in \mathcal{B}(\varepsilon(t))$ выполняется соотношение $t \underset{A+B}{\vDash} t^0$. Отсюда, применяя свойство 6, получаем $t \underset{A+B}{\succcurlyeq} t^0$, поэтому по свойству 9 $t^0 \underset{A+B}{\overline{\succ}} t$.

2. $t \underset{A}{\not\equiv} t^0$. Тогда $t^0 \underset{A}{\overline{\succcurlyeq}} t$. Поэтому, воспользовавшись свойством 5, убеждаемся в справедливости формулы

$$\exists\, \varepsilon(t) > 0\ \ \forall B \in \mathcal{B}(\varepsilon(t))\ \ (t^0 \underset{A+B}{\overline{\succ}} t).$$

Собирая все доказанное для случая 2 и полагая $\varepsilon^0 = \min\{\varepsilon(t) : t \in T \setminus \{t^0\}\}$, убеждаемся в справедливости формулы (5), которая свидетельствует о T_2-устойчивости задачи $Z^n(A)$.

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Для векторной траекторной задачи $Z^n(A)$, $n \geq 1$, следующие утверждения эквивалентны:

(i) задача $Z^n(A)$ T_3-устойчива;

(ii) $\forall t \in Sl^n(A)\ \ \exists\, t' \in P^n(A)\ \ (t \underset{A}{\succcurlyeq} t' \,\&\, t \underset{A}{\vdash} t')$;

(iii) $\forall t \in Sl^n(A)\ \ \exists\, t' \in P^n(A)\ \ (t \underset{A}{\succcurlyeq} t' \,\&\, t \underset{A}{\vDash} t')$.

Доказательство. (i)$\Rightarrow$(ii). Предположим, что задача $Z^n(A)$ T_3-устойчива, однако вопреки утверждению (ii) найдется такая траектория $t^0 \in Sl^n(A)$, что

$$\forall t \in P^n(A)\ (t^0 \underset{A}{\overline{\succcurlyeq}} t \vee t^0 \underset{A}{\overline{\vdash}} t). \tag{6}$$

Поэтому на основании леммы 2 имеет место (3). Кроме того, так как (ввиду замечания 1) $t^0 \underset{A}{\overline{\succcurlyeq}} t^0$ и $t^0 \underset{A}{\vdash} t^0$ при любой матрице $A \in \mathbf{R}^{n\times m}$, то из (6) вытекают включения $t^0 \in Sl^n(A) \setminus P^n(A) \subseteq \overline{P^n}(A)$. Таким образом, справедлива формула

$$\exists t^0 \in \overline{P^n}(A)\ \ \forall \varepsilon > 0\ \exists B^0 \in \mathcal{B}(\varepsilon)\ \ \forall t \in P^n(A)\ \ (t^0 \underset{A+B^0}{\overline{\succ}} t). \tag{7}$$

Если $t^0 \in P^n(A+B^0)$, то $P^n(A+B^0) \not\subseteq P^n(A)$. Если $t^0 \in \overline{P^n}(A+B^0)$, то в силу внешней устойчивости множества Парето $P^n(A+B^0)$ найдется траектория $t^* \in P^n(A+B^0)$ с условием $t^0 \underset{A+B^0}{\succ} t^*$. Поэтому траектория $t^* \in \overline{P^n}(A)$ ввиду (7). Таким образом, $P^n(A+B^0) \not\subseteq P^n(A)$.

Резюмируя, заключаем, что задача $Z^n(A)$ не является T_3-устойчивой, а это противоречит (i).

(ii)$\Rightarrow$(iii). Эта импликация вытекает непосредственно из свойства 9.

(iii)$\Rightarrow$(i). Если $\overline{P^n}(A) = \varnothing$, то утверждение (i) очевидно. Поэтому далее будем предполагать, что $\overline{P^n}(A) \neq \varnothing$. Пусть $t \in \overline{P^n}(A)$. Возможны два случая.

Случай 1. $t \in Sl^n(A)$. Тогда согласно утверждению (iii) найдется траектория $t' \in P^n(A)$ с условиями $t \underset{A}{\succ} t'$ и $t \underset{A}{\vDash} t'$. Отсюда на основании свойства 3 имеем

$$\exists \varepsilon' > 0\ \ \forall B \in \mathcal{B}(\varepsilon')\ \ (t \underset{A+B}{\not\equiv} t'),$$

и, последовательно применяя свойства 1 и 6, получаем

$$\exists \varepsilon'' > 0\ \ \forall B \in \mathcal{B}(\varepsilon'')\ \ (t \underset{A+B}{\succcurlyeq} t').$$

Резюмируя, заключаем, что

$$\exists \varepsilon > 0\ \ \forall B \in \mathcal{B}(\varepsilon)\ \ (t \underset{A+B}{\succ} t'), \tag{8}$$

где $\varepsilon = \min\{\varepsilon', \varepsilon''\}$.

Случай 2. $t \in T \setminus Sl^n(A)$. Тогда существует такая траектория $t' \in T \setminus \{t\}$, что $t \underset{A}{>} t'$. Поэтому из свойства 4 следует (8).

Таким образом, показано, что для каждой траектории $t \in \overline{P^n}(A)$ найдутся такие $t' \in T \setminus \{t\}$ и $\varepsilon = \varepsilon(t) > 0$, что $t \underset{A+B}{\succ} t'$ для всех $B \in \mathcal{B}(\varepsilon)$. Откуда, полагая $\varepsilon^* = \min\{\varepsilon(t) : t \in \overline{P^n}(A)\}$, выводим

$$\exists \varepsilon^* > 0\ \ \forall B \in \mathcal{B}(\varepsilon^*)\ \ \forall t \in \overline{P^n}(A)\ \ (t \in \overline{P^n}(A+B)).$$

Следовательно, задача $Z^n(A)$ T_3-устойчива.

Теорема 3 доказана.

Теорема 4. Для векторной траекторной задачи $Z^n(A)$, $n \geq 1$, следующие утверждения эквивалентны:

(i) задача $Z^n(A)$ T_4-устойчива;

(ii) $\forall t,\ t' \in P^n(A)$ $(t \underset{A}{\equiv} t' \Rightarrow t \underset{A}{\vdash} t')$;

(iii) $\forall t,\ t' \in P^n(A)$ $(t \underset{A}{\equiv} t' \Rightarrow t \underset{A}{\vDash} t')$;

(iv) $\forall t,\ t' \in P^n(A)$ $(t \underset{A}{\equiv} t' \Rightarrow t \underset{A}{\sim} t')$;

(v) $\forall t,\ t' \in P^n(A)$ $(t \underset{A}{\equiv} t' \Rightarrow t \underset{A}{\approx} t')$.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Предположим противное. Пусть вопреки утверждению (ii) найдутся такие траектории $t, t' \in P^n(A)$ с условием $t \underset{A}{\equiv} t'$, что $t \underset{A}{\overline{\vdash}} t'$. Тогда по лемме 1 для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такая возмущающая матрица $B \in \mathcal{B}(\varepsilon)$, что $t \in \overline{P^n}(A+B)$, и потому задача $Z^n(A)$ не является T_4-устойчивой.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Эта импликация с легкостью вытекает из свойства 9.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). В силу (iii) любые траектории $t, t' \in P^n(A)$, для которых верно соотношение $t \underset{A}{\equiv} t'$, связаны не только отношением $t \underset{A}{\vDash} t'$, но и отношением $t' \underset{A}{\vDash} t$. Поэтому из (iii) и свойства 7 следует (iv).

(iv) $\Rightarrow$ (v). Эта импликация очевидна благодаря свойству 8.

(v) $\Rightarrow$ (i). Пусть $t \in P^n(A)$ и $t' \in T$. Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. $t \underset{A}{\equiv} t'$. Тогда из (v) получаем $t \underset{A}{\approx} t'$. Поэтому, применяя свойство 2, имеем

$$\exists\, \varepsilon(t') > 0\ \ \forall B \in \mathcal{B}(\varepsilon(t'))\ \ (t \underset{A+B}{\approx} t').$$

Отсюда и из свойства 8 следует, что $t \underset{A+B}{\equiv} t'$. В результате заключаем, что

$$\exists \varepsilon_1 > 0\ \ \forall t' \underset{A}{\not\equiv} t\ \ \forall B \in \mathcal{B}(\varepsilon_1)\ \ (t \underset{A+B}{\overline{\succ}} t'), \tag{9}$$

где $\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon(t') : t' \underset{A}{\equiv} t\}$.

Случай 2. $t \underset{A}{\not\equiv} t'$. Тогда $t \underset{A}{\overline{\succcurlyeq}} t'$. Поэтому из свойства 5 получаем

$$\exists \varepsilon_2 > 0\ \ \forall t' \underset{A}{\not\equiv} t\ \ \forall B \in \mathcal{B}(\varepsilon_2)\ \ (t \underset{A+B}{\overline{\succ}} t').$$

Из этой формулы и из (9) следует, что всякая траектория $t \in P^n(A)$ остается эффективной в задаче $Z^n(A+B)$ при любой возмущающей матрице $B \in \mathcal{B}(\varepsilon)$, если $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Следовательно, задача $Z^n(A)$ T_4-устойчива.

Теорема 4 доказана.

Используя теоремы 3 и 4, получаем следующие необходимые и достаточные условия T_5-устойчивости задачи $Z^n(A)$.

Теорема 5. Для векторной траекторной задачи $Z^n(A)$, $n \geq 1$, следующие утверждения эквивалентны:

(i) задача $Z^n(A)$ T_5-устойчива;

(ii) для всякой траектории $t \in Sl^n(A)$ выполняется два утверждения:

1) $\exists t' \in P^n(A)$ $(t \underset{A}{\succcurlyeq} t' \,\&\, t \underset{A}{\vdash} t')$;

2) $\forall t'' \in P^n(A)$ $(t \underset{A}{\equiv} t'' \Rightarrow t \underset{A}{\vdash} t'')$;

(iii) для всякой траектории $t \in Sl^n(A)$ выполняются два утверждения:

1) $\exists t' \in P^n(A)\ (t \underset{A}{\succcurlyeq} t' \,\&\, t \underset{A}{\vDash} t')$;

2) $\forall t'' \in P^n(A)\ (t \underset{A}{\equiv} t'' \Rightarrow t \underset{A}{\vDash} t'')$.

СЛЕДСТВИЯ

Из теорем 2–5 с очевидностью вытекают следующие достаточные признаки соответствующих видов устойчивости, которые, как известно (см., например, [2–5]), для целочисленных задач с линейными и квадратичными частными критериями являются не только достаточными, но и необходимыми.

Следствие 1. Если $Sm^n(A) \neq \varnothing$, то векторная задача $Z^n(A)$, $n \geq 1$, T_2-устойчива.

Следствие 2. Если $P^n(A) = Sl^n(A)$, то векторная задача $Z^n(A)$, $n \geq 1$, T_3-устойчива.

Следствие 3 [13]. Если $Sm^n(A) = P^n(A)$, то векторная задача $Z^n(A)$, $n \geq 1$, T_4-устойчива.

Следствие 4. Если $Sm^n(A) = Sl^n(A)$, то векторная задача $Z^n(A)$, $n \geq 1$, T_5-устойчива.

Приведем также несколько простых достаточных условий различных типов устойчивости задачи $Z^n(A)$.

Следствие 5. Если $|P^n(A)| = 1$, то векторная задача $Z^n(A)$, $n \geq 1$, T_2- и T_4-устойчива.

Следствие 6. Если $P^n(A) = T$, то векторная задача $Z^n(A)$, $n \geq 1$, T_3-устойчива.

Следствие 7. Если каждая строка матрицы A состоит из попарно различных элементов, то векторная задача $Z^n(A)$, $n \geq 1$, $T_2 - T_5$-устойчива.

В скалярном случае ($n = 1$) теоремы 2–5 превращаются в следующие утверждения.

Следствие 8. Для скалярной задачи $Z^1(A)$ утверждения (i)–(iii) эквивалентны:

(i) задача $Z^1(A)$ T_2-устойчива;

(ii) $\exists t^0 \in P^1(A)\ \forall t \in P^1(A)\ (t \underset{A}{\vdash} t^0)$;

(iii) $\forall t^0 \in P^1(A)\ \forall t \in P^1(A)\ (t \underset{A}{\vDash} t^0)$.

В самом деле, любые две траектории $t, t' \in P^1(A)$ связаны отношением $t \underset{A}{\equiv} t'$, а условие $Sm^1(A) \neq \varnothing$ эквивалентно равенству $|P^1(A)| = 1$. Поэтому утверждения (ii) и (iii) теоремы 2 с очевидностью превращаются соответственно в утверждения (ii) и (iii) следствия 8 и тем самым доказывают последнее.

Так как $P^1(A) = Sl^1(A)$, то, выбирая в условиях (ii) и (iii) теоремы 3 траекторию t', равную t, и учитывая замечание 1, легко получаем следующее утверждение.

Следствие 9. Скалярная задача $Z^1(A)\, T_3$-устойчива при любом векторе $A \in \mathbf{R}^m$.

Из теоремы 4 и следствия 9 с очевидностью вытекает очередное следствие.

Следствие 10. Для скалярной задачи $Z^1(A)$ утверждения (i)–(vi) эквивалентны:

(i) задача $Z^1(A)$ T_4-устойчива;

(ii) задача $Z^1(A)$ T_5-устойчива;

(iii) $\forall t, t' \in P^1(A)\ (t \underset{A}{\vdash} t')$;

(iv) $\forall t, t' \in P^1(A)\ (t \underset{A}{\vDash} t')$;

(v) $\forall t, t' \in P^1(A)\ (t \underset{A}{\sim} t')$;

(vi) $\forall t, t' \in P^1(A)\ (t \underset{A}{\approx} t')$.

В результате проведенных исследований установлены необходимые и достаточные условия пяти известных типов устойчивости (T_1–T_5) по векторному критерию многокритериальной минимаксной траекторной задачи. Все они сформулированы в терминах нескольких видов бинарных отношений, заданных на множестве траекторий (допустимых решений задачи). В частности, оказалось, что известные необходимые и достаточные признаки различных типов устойчивости многокритериальных целочисленных задач линейного и квадратичного программирования (совпадение множеств Парето и Слейтера, множеств Парето и Смейла, непустота множества Смейла) являются лишь достаточными условиями соответствующих типов устойчивости векторных задач минимакса. Это свидетельствует о том, что задачи на «узкие места» чаще устойчивы, чем линейные и квадратичные.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И. Сравнительный анализ различных типов устойчивости по ограничениям векторной задачи целочисленной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. — 2004. — № 1. — С. 63–70.
2. Лебедева Т.Т., Семенова Н.В., Сергиенко Т.И. Устойчивость векторных задач целочисленной оптимизации: взаимосвязь с устойчивостью множеств оптимальных и неоптимальных решений // Там же. — 2005. — № 4. — С. 90–100.
3. Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И. Устойчивость по векторному критерию и ограничениям векторной целочисленной задачи квадратичного программирования // Там же. — 2006. — № 5. — С. 63–72.
4. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. — Киев: Наук. думка, 1995. — 170 с.
5. Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации. Проблемы, методы решения, исследования. — Киев: Наук. думка, 2003. — 261 с.
6. Айзерман М.А., Алексеров Ф.Т. Выбор вариантов: основы теории. — М.: Наука, 1990. — 240 с.
7. Березовский Б.А., Борзенко В.И., Кемпнер Л.Н. Бинарные отношения в многокритериальной оптимизации. — М.: Наука, 1981. — 149 с.
8. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. — М.: Наука, 1982. — 256 с.
9. Шоломов Л.А. Исследование отношений в критериальных пространствах и синтез операторов группового выбора // Математические вопросы кибернетики. — 1994. — Вып. 5. — С. 109–143.
10. Емеличев В.А., Пашкевич А.В. О параметризации принципа оптимальности в критериальном пространстве // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. — 2002. — **9,** № 1. — С. 21–32.
11. Леонтьев В.К., Гордеев Э.Н. Качественные исследования траекторных задач // Кибернетика. — 1986. — № 5. — С. 82–90.
12. Гордеев Э.Н., Леонтьев В.К. Общий подход к исследованию устойчивости решений в задачах дискретной оптимизации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1996. — **36,** № 1. — С. 66–72.
13. Емеличев В.А., Кравцов М.К., Подкопаев Д.П. О квазиустойчивости траекторных задач векторной оптимизации // Мат. заметки. — 1998. — **63,** вып. 1. — С. 21–27.
14. Гордеев Э.Н. Исследование устойчивости в оптимизационных задачах на матроидах в метрике l_1 // Кибернетика и системный анализ. — 2001. — № 2. — С. 132–144.
15. Бухтояров С.Е., Емеличев В.А., Степанишина Ю.В. Вопросы устойчивости векторных дискретных задач с параметрическим принципом оптимальности // Там же. — 2003. — № 4. — С. 155–166.

Поступила 20.07.2007