УДК 519.8

Т.Т. ЛЕБЕДЕВА, Т.И. СЕРГИЕНКО*

РАЗНЫЕ ТИПЫ УСТОЙЧИВОСТИ ВЕКТОРНОЙ ЗАДАЧИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ ОПТИМИЗАЦИИ: ОБЩИЙ ПОДХОД

Ключевые слова: *многокритериальная целочисленная оптимизация, устойчивость по векторному критерию и ограничениям, возмущения исходных данных.*

Исследование проблемы устойчивости многокритериальных (векторных) задач дискретной оптимизации осуществляется в основном в двух направлениях. Одно из них, так называемое теоретическое направление, ориентировано (см., например, [1–4]) на получение результатов «качественного» характера, а именно на определение и исследование условий, при которых множеству оптимальных решений (множеству Парето, Слейтера или Смейла) присуще то или иное свойство, характеризующее определенным образом устойчивость задачи к малым возмущениям исходных данных. Другой известный подход, называемый конструктивным, направлен (см., например, [5–7]) на получение и изучение количественных характеристик допустимых возмущений исходных данных векторных задач дискретной оптимизации, в частности радиуса устойчивости. Предлагаемая статья относится к теоретическому направлению исследований и посвящена вопросам поиска единого подхода к исследованию разных типов устойчивости векторных задач целочисленной оптимизации, а именно отысканию понятий, которые могут составить общую основу описания различных типов устойчивости, и формулировке с помощью этих понятий необходимых и достаточных условий устойчивости.

Рассмотрим многокритериальную задачу дискретной оптимизации вида

$$Q(F, X): \max \{F(x) \mid x \in X\},$$

где $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_l(x))$ — векторный критерий, f_i, $i \in N_l$, — действительные функции, $f_i : R^n \to R^1$, $N_l = \{1, \ldots, l\}$, $l \geq 2$ — количество частных критериев, $X \subset Z^n$, Z^n — множество всех целочисленных векторов в R^n, $2 \leq |X| < \infty$.

Задачу $Q(F, X)$ рассматриваем как задачу поиска элементов одного из следующих множеств: $\mathrm{P}(F, X)$ — множества Парето-оптимальных (эффективных) решений, $\mathrm{Sl}(F, X)$ — множества оптимальных по Слейтеру (слабо эффективных) решений, $\mathrm{Sm}(F, X)$ — множества оптимальных по Смейлу (строго эффективных) решений. В случае, когда речь идет конкретно о задаче поиска элементов одного из указанных множеств, воспользуемся обозначениями $Q_{\mathrm{P}}(F, X)$, $Q_{\mathrm{Sl}}(F, X)$, $Q_{\mathrm{Sm}}(F, X)$ соответственно. Согласно [8, 9]

$$\mathrm{P}(F, X) = \{x \in X \mid \pi(x, F, X) = \varnothing\}, \ \mathrm{Sl}(F, X) = \{x \in X \mid \sigma(x, F, X) = \varnothing\},$$
$$\mathrm{Sm}(F, X) = \{x \in X \mid \eta(x, F, X) = \varnothing\},$$

где $\pi(x, F, X) = \{y \in X \mid F(y) \geq F(x), F(y) \neq F(x)\}$, $\sigma(x, F, X) = \{y \in X \mid F(y) > F(x)\}$, $\eta(x, F, X) = \{y \in X \mid y \neq x, F(y) \geq F(x)\}$.

Легко видеть, что $\mathrm{Sm}(F, X) \subset \mathrm{P}(F, X) \subset \mathrm{Sl}(F, X)$ и $\forall x \in X : \sigma(x, F, X) \subset \subset \pi(x, F, X) \subset \eta(x, X, F)$.

Отметим, что из конечности допустимой области X вытекают непустота множества Парето $\mathrm{P}(F, X)$ и его внешняя устойчивость [8], которая означает, что для любой допустимой точки $x \in X$ найдется эффективное решение $y \in P(F, X)$, удовлетворяющее неравенству $F(y) \geq F(x)$.

Пусть $u = (u_1, u_2)$ — набор исходных данных задачи $Q(F, X)$, являющийся элементом некоторого пространства U исходных данных задачи, которое можно представить как декартово произведение $U = U_1 \times U_2$ пространства U_1 исходных данных для описания векторного критерия F и пространства U_2 исходных данных для описания допустимого множества X. Например, если частные критерии задачи представлены квадратичными функциями $f_i(x) = \langle x, D_i x \rangle + \langle c_i, x \rangle$, $i \in N_l$, то полагаем $u_1 = (D, C) \in U_1 = R^{n \times n \times l} \times R^{l \times n}$, где $D_i \in R^{n \times n}$, $c_i = (c_{i1}, \dots, c_{in}) \in R^n$, $D = (D_1, \dots, D_l) \in R^{n \times n \times l}$, $C = [c_{ij}] \in R^{l \times n}$. Рассматривая в качестве допустимой области непустое конечное множество

$$X = X(A, b) = G(A, b) \cap Z^n, \tag{1}$$

где $G(A, b) = \{x \in R^n \mid Ax \leq b\}$ — выпуклый многогранник, $A = [a_{ij}] \in R^{m \times n}$, $b = (b_1, \dots, b_m) \in R^m$, полагаем $u_2 = (A, b) \in U_2 = R^{m \times n} \times R^m$.

Дальнейшие выкладки связаны с поиском общего подхода к исследованию разных типов устойчивости задачи $Q_{\mathrm{P}}(F, X)$ относительно возмущений исходных данных для векторного критерия, возмущений исходных данных для описания ограничений задачи, а также возмущений всех исходных данных задачи. Терминами «устойчивость», «устойчивая задача», «устойчиво принадлежит» будем пользоваться для обозначения понятия устойчивости относительно возмущений исходных данных при любом из указанных трех вариантов учета возмущений. Однако при необходимости особо выделить второй вариант будем пользоваться термином «устойчивость по векторному критерию», а для третьего варианта — термином «устойчивость по ограничениям».

Для набора $u = (u_1, u_2) \in U$ исходных данных задачи $Q(F, X)$ и любого числа $\delta > 0$ определим множество $O_\delta(u)$ возмущенных исходных данных задачи согласно формулам

$$O_\delta(u) = \{u(\delta) = (u_1(\delta), u_2(\delta)) \mid u_1(\delta) \in O_\delta(u_1), u_2(\delta) \in O_\delta(u_2)\},$$

если речь идет о возмущениях всех исходных данных задачи;

$$O_\delta(u) = \{u(\delta) = (u_1(\delta), u_2(\delta)) \mid u_1(\delta) = u_1, u_2(\delta) \in O_\delta(u_2)\},$$

если речь идет о возмущениях исходных данных только в ограничениях;

$$O_\delta(u) = \{u(\delta) = (u_1(\delta), u_2(\delta)) \mid u_1(\delta) \in O_\delta(u_1), u_2(\delta) = u_2\},$$

если речь идет только о возмущениях исходных данных векторного критерия. Здесь $O_\delta(u_i) = \{u_i(\delta) \in U_i \mid \|u_i(\delta) - u_i\|_i < \delta\}$, $\|\cdot\|_i$ — норма в пространстве U_i, $i = 1, 2$.

Символами $F_{u_1(\delta)}$ и $X_{u_2(\delta)}$ будем обозначать соответственно векторный критерий и допустимую область задачи при возмущенных исходных данных $u(\delta) = (u_1(\delta), u_2(\delta)) \in O_\delta(u)$.

Приведем определения пяти типов устойчивости векторной задачи целочисленной оптимизации согласно [2–4].

Определение 1. Задача $Q_{\mathrm{P}}(F, X)$ T_1-устойчива, если $\exists\, \delta > 0$ такое, что $\forall\, (u_1(\delta), u_2(\delta)) \in O_\delta(u)$ справедливо соотношение

$$\mathrm{P}(F, X) \mid \mathrm{P}(F_{u_1(\delta)}, X_{u_2(\delta)}) \neq \varnothing.$$

Определение 2. Задача $Q_{\mathrm{P}}(F, X)$ T_2-устойчива, если $\exists\, \delta > 0$ и $\exists\, x \in \mathrm{P}(F, X)$ такие, что $\forall\, (u_1(\delta), u_2(\delta)) \in O_\delta(u)$ выполняется принадлежность

$$x \in \mathrm{P}(F_{u_1(\delta)}, X_{u_2(\delta)}).$$

Определение 3. Задача $Q_{\mathrm{P}}(F, X)$ T_3-устойчива, если $\exists\, \delta > 0$ такое, что $\forall\, (u_1(\delta), u_2(\delta)) \in O_\delta(u)$ выполняется включение

$$\mathrm{P}(F_{u_1(\delta)}, X_{u_2(\delta)}) \subset \mathrm{P}(F, X).$$

Определение 4. Задача $Q_{\mathrm{P}}(F, X)$ T_4-устойчива, если $\exists\, \delta > 0$ такое, что $\forall\, (u_1(\delta), u_2(\delta)) \in O_\delta(u)$ выполняется включение

$$\mathrm{P}(F, X) \subset \mathrm{P}(F_{u_1(\delta)}, X_{u_2(\delta)}).$$

Определение 5.Задача $Q_{\mathrm{P}}(F, X)$ T_5-устойчива, если $\exists\, \delta > 0$ такое, что $\forall\, (u_1(\delta), u_2(\delta)) \in O_\delta(u)$ справедливо соотношение

$$\mathrm{P}(F, X) = \mathrm{P}(F_{u_1(\delta)}, X_{u_2(\delta)}).$$

Относительно устойчивости типа T_1 отметим, в частности, что задача $Q(F, X)$ со всеми линейными и квадратичными частными критериями всегда T_1-устойчива по векторному критерию [3, 5]. Для задачи $Q(F, X)$, в которой согласно формуле (1) $X = X(A, b)$, понятия T_1- и T_2-устойчивости по ограничениям эквивалентны [2]. Понятие T_1-устойчивости к возмущениям всех исходных данных задачи $Q_{\mathrm{P}}(F, X)$ с квадратичными частными критериями и допустимым множеством $X = X(A, b)$ эквивалентно понятию T_2-устойчивости по ограничениям [4].

Исследуем понятия T_2-, T_3-, T_4- и T_5-устойчивости задачи $Q_{\mathrm{P}}(F, X)$ и покажем, что их можно свести к двум более простым понятиям относительно устойчивости отдельных допустимых решений задачи, помогающим раскрыть природу действия возмущений в исходных данных задачи на множества допустимых, оптимальных и неоптимальных решений.

Обозначим $\mathrm{M} = \{X, \mathrm{P}(F, X), \mathrm{Sl}(F, X), \mathrm{Sm}(F, X), X \setminus \mathrm{P}(F, X), X \setminus \mathrm{Sl}(F, X), X \setminus \mathrm{Sm}(F, X)\}$ совокупность ряда подмножеств множества X. Пусть M — любой элемент из M. Выберем произвольно $\delta > 0$, $u(\delta) = (u_1(\delta), u_2(\delta)) \in O_\delta(u)$. Обозначим $M_{u(\delta)}$ подмножество множества $X_{u_2(\delta)}$ допустимых решений возмущенной задачи $Q(F_{u_1(\delta)}, X_{u_2(\delta)})$, соответствующее множеству M как подмножеству допустимого множества X задачи $Q(F, X)$. Например, если $M = X \setminus \mathrm{P}(F, X)$, то $M_{u(\delta)} = X_{u_2(\delta)} \setminus \mathrm{P}(F_{u_1(\delta)}, X_{u_2(\delta)})$.

Определение 6. Допустимое решение $x \in M$ задачи $Q_{\mathrm{P}}(F, X)$ устойчиво принадлежит множеству M, если $\exists\, \delta > 0$ такое, что $\forall\, u(\delta) \in O_\delta(u)$: $x \in M_{u(\delta)}$, и оно неустойчиво принадлежит множеству M в противном случае.

Очевидно, любая точка $x \in X$, которая устойчиво принадлежит некоторому множеству $M \in \mathrm{M}$, сохраняет это свойство и по отношению к произвольному множеству $M' \in \mathrm{M}$, удовлетворяющему включению $M \subset M'$. Если же некоторая точка y неустойчиво принадлежит множеству $M \in \mathrm{M}$, то она неустойчиво принадлежит и любому множеству $M'' \in \mathrm{M}$ при условии, что $y \in M'' \subset M$.

Множество всех точек, устойчиво принадлежащих множеству $M \in \mathrm{M}$, обозначим $\mathrm{Ker}(M)$ и назовем *ядром устойчивости множества* M. Таким образом,

$$\mathrm{Ker}\,(M) = \{x \in M \mid \exists\, \delta > 0\ \forall\, u(\delta) \in O_\delta(u)\ (x \in M_{u(\delta)})\}.$$

Очевидно, из включения $M' \subset M$, где M, $M' \in \mathrm{M}$, следует $\mathrm{Ker}\,(M') \subset \mathrm{Ker}\,(M)$.

Определение 7. Допустимое решение $x \in X$ задачи $Q_{\mathrm{P}}(F, X)$ устойчиво не принадлежит множеству $M \in \mathrm{M} \setminus \{X\}$, если $\exists\, \delta > 0$ такое, что $\forall\, u(\delta) \in O_\delta(u)$: $x \notin M_{u(\delta)}$.

Множество всех точек $x \in X$, устойчиво не принадлежащих некоторому множеству $M \in \mathrm{M} \setminus \{X\}$, обозначим $\Omega\,(M)$:

$$\Omega\,(M) = \{x \in X \mid \exists\, \delta > 0\ \forall\, u(\delta) \in O_\delta(u)\ (x \notin M_{u(\delta)})\}.$$

Очевидно,

$$\forall\, M \in \mathrm{M} \setminus \{X\} : \Omega\,(M) \subset X \setminus M. \qquad (2)$$

Из определений 6 и 7 вытекает, что $\forall\, M \in \mathrm{M} \setminus \{X\}$ справедливо включение

$$\mathrm{Ker}\,(X \setminus M) \subset \Omega\,(M). \qquad (3)$$

В частном случае, когда рассматриваются вопросы устойчивости по векторному критерию и, следовательно $\forall\, \delta > 0$, $\forall\, u(\delta) \in O_\delta(u)$: $X_{u_2(\delta)} = X$, тогда каждое решение $x \in X$, устойчиво не принадлежащее некоторому множеству M, будет устойчиво принадлежать его дополнению $X \setminus M$. В этом случае $\mathrm{Ker}\,(X \setminus M) = \Omega\,(M)$.

Очевидна справедливость следующих утверджений, связывающих понятия T_2- и T_4-устойчивости задачи $Q_{\mathrm{P}}(F, X)$ с понятием допустимого решения задачи, которое устойчиво принадлежит множеству $\mathrm{P}\,(F, X)$.

Теорема 1. Задача $Q_{\mathrm{P}}(F, X)$ T_2-устойчива тогда и только тогда, когда среди ее допустимых решений найдется хотя бы одно решение, которое устойчиво принадлежит множеству Парето:

$$\mathrm{Ker}\,(\mathrm{P}\,(F, X)) \neq \varnothing.$$

Теорема 2. Задача $Q_{\mathrm{P}}(F, X)$ T_4-устойчива тогда и только тогда, когда все ее Парето-оптимальные решения устойчиво принадлежат множеству Парето:

$$\mathrm{Ker}\,(\mathrm{P}\,(F, X)) = \mathrm{P}\,(F, X). \qquad (4)$$

Далее проанализируем понятие T_3-устойчивости задачи $Q_{\mathrm{P}}(F, X)$, связав его с понятием допустимого решения, которое устойчиво не принадлежит множеству $\mathrm{P}\,(F, X)$.

Напомним, что задача $Q_{\mathrm{P}}(F, X)$ называется *тривиальной*, если для нее выполняется условие $\mathrm{P}\,(F, X) = X$, и *нетривиальной* — в противном случае.

Очевидно, тривиальная задача $Q_{\mathrm{P}}(F, X)$ T_3-устойчива по векторному критерию. Если же $X = X\,(A, b)$ в соответствии с формулой (1), то тривиальная задача $Q_{\mathrm{P}}(F, X)$ T_3-устойчива относительно любого из трех рассматриваемых в данной работе вариантов учета возмущений исходных данных: в векторном критерии, в ограничениях, всех исходных данных. Последнее утверждение вытекает из следующей леммы.

Лемма 1 [1,2]. Пусть $X = X\,(A, b)$. Существует число $\delta > 0$ такое, что для любого элемента $u_2(\delta)$ множества $Q_\delta(u_2) = \{u_2(\delta) \in U_2 \mid \| u_2(\delta) - u_2 \| < \delta\}$ возмущенных исходных данных для описания ограничений задачи $Q\,(F, X)$ справедливо включение $X_{u_2(\delta)} \subset X$.

Действительно, согласно лемме 1 для тривиальной задачи $Q_{\mathrm{P}}(F, X)$ с допустимой областью $X\,(A, b)$ найдется такое число $\delta > 0$, что $\forall\, u(\delta) = (u_1(\delta), u_2(\delta)) \in O_\delta(u) : \mathrm{P}\,(F_{u_1(\delta)}, X_{u_2(\delta)}) \subset X_{u_2(\delta)} \subset X = \mathrm{P}\,(F, X)$.

Для нетривиальной задачи $Q_{\mathrm{P}}(F, X)$ получен следующий результат.

Теорема 3. Пусть $\mathrm{P}(F, X) \neq X$. Необходимым условием T_3-устойчивости задачи $Q_{\mathrm{P}}(F, X)$ является совпадение множества ее неэффективных допустимых решений с множеством всех допустимых точек, устойчиво не принадлежащих множеству Парето:

$$X \setminus \mathrm{P}(F, X) = \Omega(\mathrm{P}(F, X)). \tag{5}$$

Если $X = X(A, b)$, то (5) является и достаточным условием T_3-устойчивости задачи $Q_{\mathrm{P}}(F, X)$.

Доказательство. Необходимость. Согласно определению 3 для каждой T_3-устойчивой задачи $Q_{\mathrm{P}}(F, X)$ $\exists\ \delta > 0$ такое, что $\forall\, u(\delta) = (u_1(\delta), u_2(\delta)) \in$ $\in O_\delta(u): \mathrm{P}(F_{u_1(\delta)}, X_{u_2(\delta)}) \subset \mathrm{P}(F, X)$. Отсюда с учетом очевидного включения $\mathrm{P}(F, X) \subset X$ вытекает

$$X \setminus \mathrm{P}(F, X) \subset X \setminus \mathrm{P}(F_{u_1(\delta)}, X_{u_2(\delta)}). \tag{6}$$

Таким образом, все допустимые решения задачи, не являющиеся Парето-оптимальными, устойчиво не принадлежат множеству Парето, т.е. $X \setminus \mathrm{P}(F, X) \subset$ $\subset \Omega(\mathrm{P}(F, X))$. Принимая также во внимание соотношения (2), приходим к равенству (5).

Достаточность. Пусть $X = X(A, b)$. Предположим, что условие (5) выполняется и, следовательно, произвольная точка x из $X \setminus \mathrm{P}(F, X)$ устойчиво не принадлежит $\mathrm{P}(F, X)$. Тогда в соответствии с определением 7 найдется число $\delta = \delta(x) > 0$ такое, что $\forall\, u(\delta) = (u_1(\delta), u_2(\delta)) \in O_\delta(u)$: $x \notin \mathrm{P}(F_{u_1(\delta)}, X_{u_2(\delta)})$. Учитывая конечность множества $X \setminus \mathrm{P}(F, X)$, можно выбрать число $\delta_0 = \min\{\delta(x) \mid x \in X \setminus \mathrm{P}(F, X)\}$. При $\delta = \delta_0$ приходим к включению (6), справедливому для любого набора исходных данных $u(\delta) \in O_\delta(u)$. С другой стороны, опираясь на лемму 1, делаем вывод о существовании такого числа $\delta' > 0$, что $\forall\, u(\delta') = (u_1(\delta'), u_2(\delta')) \in O_{\delta'}(u)$: $\mathrm{P}(F_{u_1(\delta')}, X_{u_2(\delta')}) \subset X_{u_2(\delta')} \subset X$. Легко видеть, что положив $\delta = \min\{\delta_0, \delta'\}$ и выбрав любой набор исходных данных $u(\delta) = (u_1(\delta), u_2(\delta))$ из $O_\delta(u)$, можно перейти от включения (6) к включению $\mathrm{P}(F_{u_1(\delta)}, X_{u_2(\delta)}) \subset \mathrm{P}(F, X)$, что и свидетельствует о T_3-устойчивости задачи $Q_{\mathrm{P}}(F, X)$. Доказательство завершено.

Из определений 3–5 вытекает, что задача $Q_{\mathrm{P}}(F, X)$ T_5-устойчива тогда и только тогда, когда она является одновременно T_3-устойчивой и T_4-устойчивой. Учитывая теоремы 2 и 3, а также выводы, сделанные выше относительно T_3-устойчивости тривиальной задачи, получаем следующие необходимые и достаточные условия T_5-устойчивости задачи $Q_{\mathrm{P}}(F, X)$, указывающие на взаимосвязь этого типа устойчивости с устойчивостью допустимых решений, принадлежащих двум непересекающимся множествам: $\mathrm{P}(F, X)$ и $X \setminus \mathrm{P}(F, X)$.

Теорема 4. Тривиальная задача $Q_{\mathrm{P}}(F, X)$ T_5-устойчива по векторному критерию тогда и только тогда, когда выполняется условие (4).

Теорема 5. Пусть $X = X(A, b)$. Тривиальная задача $Q_{\mathrm{P}}(F, X)$ T_5-устойчива тогда и только тогда, когда выполняется условие (4).

Теорема 6. Пусть $X = X(A, b)$. Нетривиальная задача $Q_{\mathrm{P}}(F, X)$ T_5-устойчива тогда и только тогда, когда выполняются условия (4) и (5).

Таким образом, изучение условий T_2-, T_3-, T_4- и T_5-устойчивости задачи $Q_{\mathrm{P}}(F, X)$ может быть сведено к исследованию двух подмножеств допустимого множества X, а именно:

— $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{P}\,(F, X))$, состоящего из точек, устойчиво принадлежащих множеству Парето;

— $\Omega\,(\mathrm{P}\,(F, X))$, состоящего из допустимых решений задачи, устойчиво не принадлежащих множеству Парето.

На наш взгляд, разрешение вопросов о непустоте ядра устойчивости множества Парето $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{P}\,(F, X))$ и его совпадении со всем множеством Парето, а также о совпадении множества $X \setminus \mathrm{P}\,(F, X)$ с множеством $\Omega\,(\mathrm{P}\,(F, X))$ может составить основу исследований устойчивости задач вида $Q_{\mathrm{P}}\,(F, X)$, проводимых в русле так называемого теоретического направления. Нетрудно видеть, что выводы, аналогичные изложенным выше относительно задачи $Q_{\mathrm{P}}\,(F, X)$, имеют место и для задач $Q_{\mathrm{Sl}}\,(F, X)$, $Q_{\mathrm{Sm}}\,(F, X)$.

Принимая во внимание результаты, описанные в статьях [2–4], можно предложить следующие формулы, касающиеся некоторых частных случаев.

При исследовании устойчивости задачи $Q\,(F, X)$ в том случае, когда учитываются лишь возмущения исходных данных, относящиеся к векторному критерию $F = (f_1, \ldots, f_l)$, где $f_i : R^n \to R^1$, $i \in N_l$, — вогнутые квадратичные функции, получены следующие соотношения:

$$\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Sl}\,(F, X)) = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{P}\,(F, X)) = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Sm}\,(F, X)) = \mathrm{Sm}\,(F, X),$$

$$\Omega\,(\mathrm{Sl}\,(F, X)) = \Omega\,(\mathrm{P}\,(F, X)) = \Omega\,(\mathrm{Sm}\,(F, X)) = X \setminus \mathrm{Sl}\,(F, X).$$

Для задачи $Q\,(F, X)$, в которой учитываются возмущения исходных данных лишь в ограничениях, описывающих допустимое множество $X = X\,(A, b)$ с помощью формулы (1), справедливы такие соотношения:

$$\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Sl}\,(F, X)) = \mathrm{Sl}\,(F, X) \cap \mathrm{int}\, G\,(A, b),$$

$$\mathrm{Ker}\,(\mathrm{P}\,(F, X)) = \mathrm{P}\,(F, X) \cap \mathrm{int}\, G\,(A, b),$$

$$\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Sm}\,(F, X)) = \mathrm{Sm}\,(F, X) \cap \mathrm{int}\, G\,(A, b),$$

$$\Omega\,(\mathrm{Sl}\,(F, X)) = \{x \in X \setminus \mathrm{Sl}\,(F, X) \mid \sigma\,(x, F, X) \cap \mathrm{int}\, G\,(A, b) \neq \varnothing\},$$

$$\Omega\,(\mathrm{P}\,(F, X)) = \{x \in X \setminus \mathrm{P}\,(F, X) \mid \pi\,(x, F, X) \cap \mathrm{int}\, G\,(A, b) \neq \varnothing\},$$

$$\Omega\,(\mathrm{Sm}\,(F, X)) = \{x \in X \setminus \mathrm{Sm}\,(F, X) \mid \eta\,(x, F, X) \cap \mathrm{int}\, G\,(A, b) \neq \varnothing\}.$$

При изучении устойчивости задачи $Q\,(F, X)$ с учетом возмущений, которым подвергаются все ее исходные данные, относящиеся и к векторному критерию $F = (f_1, \ldots, f_l)$ со всеми частными критериями, заданными в виде вогнутых квадратичных функций, и к ограничениям, описывающим допустимое множество $X = X\,(A, b)$ с помощью формулы (1), получены соотношения

$$\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Sl}\,(F, X)) = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{P}\,(F, X)) = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Sm}\,(F, X)) = \mathrm{Sm}\,(F, X) \cap \mathrm{int}\, G\,(A, b),$$

$$\Omega\,(\mathrm{P}\,(F, X)) = \{x \in X \setminus \mathrm{Sl}\,(F, X) \mid \sigma\,(x, F, X) \cap \mathrm{int}\, G\,(A, b) \neq \varnothing\}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье изучена взаимосвязь устойчивости задачи векторной целочисленной оптимизации с устойчивостью оптимальных и неоптимальных решений этой задачи. Показано, что исследование различных типов устойчивости задачи поиска Парето-оптимальных решений может быть сведено к изучению двух множеств: множества точек, устойчиво принадлежащих множеству Парето, и множества допустимых точек, устойчиво не принадлежащих множеству Парето. Полученные результаты касаются вопросов устойчивости относительно возмущений всех исходных данных задачи, относительно возмущений исходных данных для векторного критерия и относительно возмущений исходных данных в ограничениях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. — Киев: Наук. думка, 1995. — 170 с.
2. Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И. Сравнительный анализ различных типов устойчивости по ограничениям векторной задачи целочисленной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. — 2004. — № 1. — С. 63–70.
3. Лебедева Т.Т., Семенова Н.В., Сергиенко Т.И. Устойчивость векторных задач целочисленной оптимизации: взаимосвязь с устойчивостью множеств оптимальных и неоптимальних решений // Там же. — 2005. — № 4. — С. 90–100.
4. Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И. Устойчивость по векторному критерию и ограничениям векторной целочисленной задачи квадратичного программирования // Там же. — 2006. — № 5. — С. 63–72.
5. Emelichev V.A., Girlich E., Nikulin Yu.V., Podkopaev D.V. Stability and regularization of vector problems of integer linear programming // Optimization. — 2002. — **51**, N 4. — P. 645–676.
6 Емеличев В.А., Кузьмин К.Г. О радиусе устойчивости эффективного решения векторной задачи целочисленного линейного программирования в метрике Гельдера // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 4. — С. 175–181.
7. Emelichev V.A., Kuz'min K.G. On a type of stability of multicriteria integer linear programming problem in case of monotone norm // J. of Computer and Systems Sciences International. — 2007. — **46**, N 5. — P. 714–720.
8. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. — М.: Наука, 1982. — 256 с.
9. Smale S. Global analysis and economics, V. Pareto theory with constraints // J. Math. Econ. — 1974. — N 1. — P. 213–221.

Поступила 01.11.2007