УДК 519.21

А.А. ФОМИН-ШАТАШВИЛИ, А.Д. ШАТАШВИЛИ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ЭФФЕКТИВНОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ОЦЕНОК В ЗАДАЧАХ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ. I

Ключевые слова: *экстраполяция, прогноз, мера, плотность Радона–Никодима, эволюционные дифференциальные уравнения, корреляционный оператор.*

Одной из важных проблем в теории случайных процессов является нахождение оптимальных оценок в задачах экстраполяции и фильтрации случайных процессов, что имеет весьма важное значение при решении многих актуальных прикладных задач науки и техники. Оптимальная экстраполяция случайного процесса — это предсказание значения случайного процесса в будущем наилучшим образом по наблюдениям его значений до настоящего момента времени.

Задача же оптимальной фильтрации заключается в следующем: пусть наблюдается некоторый случайный процесс, в котором одновременно содержатся или сочетаются полезный сигнал (один процесс) и случайный шум (второй процесс). Требуется отделить (отфильтровать) шум от сигнала и найти наилучшее (в определенном смысле) приближение для сигнала.

Решение задачи линейной экстраполяции и фильтрации, ранее данное А.Н. Колмогоровым [10, 11] и Н. Винером [1, 2], является оптимальным лишь для гауссовского процесса, а для общих процессов оптимально лишь в классе линейных оценок и может оказаться не наилучшим. Поэтому разработку методов эффективного решения соответствующих задач следует считать весьма важным как в теоретическом, так и практическом плане. Ряд исследований в этом направлении принадлежат Н. Винеру [1, 2], Л.А. Заде [9], В.С. Михалевичу [15–17], Р.Л. Стратоновичу [23, 24], А.Н. Ширяеву, Р.Ш. Липцеру, Б.И. Григелионису [12–14, 41–44, 6] и другим. Однако полученные ими результаты относятся в основном к различным классам марковских процессов.

В настоящее время можно считать, что по крайней мере в теоретическом плане теория линейной экстраполяции и фильтрации разработана полностью в работах А.Н. Колмогорова, Н. Винера, А.М. Яглома [1, 2, 10, 11, 45–48] и многих других авторов. Обстоятельное изложение этих результатов можно найти в монографии Ю.А. Розанова [18]. Как отмечалось ранее, линейная экстраполяция и фильтрация приводит к наилучшим оценкам для случая гауссовских процессов. В работах А.Д. Шаташвили [33–37] в том случае, когда процессы мало отличаются от гауссовских, для некоторого класса случайных процессов показано, что порядок отклонения наилучших оценок от линейных равен порядку отклонения рассматриваемого процесса от гауссовского.

Естественно, обобщение задач линейной экстраполяции и фильтрации негауссовских случайных процессов существенно осложняется необходимостью рассматривать все конечномерные распределения изучаемых процессов. Поэтому задачи нахождения оптимальных оценок могут решаться эффективно лишь в том случае, когда в замкнутой форме получена информация о всех конечномерных распределениях случайного процесса.

С абстрактной точки зрения оптимальное решение задач экстраполяции и фильтрации случайных процессов является довольно простым и выражается с помощью интегрирования в некотором функциональном пространстве по мере, зависящей от некоторого функционального параметра. Однако такое решение нельзя считать приемлемым до тех пор, пока нет конструктивных методов описания соответствующей операции интегрирования. Возможным подходом к решению этой сложной проблемы может служить определение плотности Радона–Никодима соответствующей меры изучаемого процесса в функциональном пространстве относительно хорошо изученной эталонной меры. Это позволяет операцию интегрирования проводить с учетом меры, порожденной эталонным вероятностным процессом, например винеровским или гауссовским. Эта идея впервые была использована А.Д. Шаташвили в работах [33–37]. Кроме того, плотности вероятностных мер для нахождения оптимальных оценок в задачах экстраполяции и фильтрации для двух марковских процессов были также использованы в работах В.С. Михалевича [15–17], Р.Л. Стратоновича [23, 24], А.Н. Ширяева, Р.Ш. Липцера и Б.И. Григелиониса [12–14, 41–44, 6] и некоторых других авторов, когда наблюдается одна компонента случайного процесса и находится оптимальная оценка для другой компоненты.

Для немарковских и негауссовских процессов результаты для оптимальных оценок в задачах экстраполяции и фильтрации впервые были получены А.Д. Шаташвили в [33–37]. В этих работах рассматривался класс случайных процессов, являющихся решениями дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx(t)}{dt} + \alpha f(t, x(t)) = \xi'(t) \tag{1}$$

или

$$\frac{d^m x(t)}{dt^m} + \alpha F(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(m-1)}(t)) = \xi^m(t) \tag{2}$$

и некоторых других уравнений подобного рода, где α — параметр, $\xi(t)$ — гауссов случайный процесс, функции $f(t, x)$ и $F(t, x, x_1, \ldots, x_n)$ обладают достаточно гладкими свойствами, обеспечивающими существование и единственность решений уравнений (1) и (2), а сами уравнения (1) и (2) рассматриваются в некоторых конечномерных евклидовых пространствах или сепарабельных гильбертовых пространствах. Основные результаты, изложенные в [33–35], были получены при наличии в явном виде плотности Радона–Никодима $\rho(z) = \frac{d\mu_x}{d\mu_\xi}(z)$, где μ_x и μ_ξ — меры, порожденные случайными процессами $x(t)$ и $\xi(t)$, с использованием стохастического интеграла Ито. В работах [20, 35, 36, 38–40] получены достаточные условия для существования $\rho(z)$ и в явном виде вычислены их выражения в терминах коэффициентов рассматриваемых уравнений и их характеристик.

В настоящей статье разработан один метод, с помощью которого будут вычислены условные математические ожидания, т.е. оптимальные оценки в задачах экстраполяции в смысле минимума среднеквадратического отклонения (см. [3, 4]). Эта непростая задача здесь сводится к простому и эффективному методу — вычислению безусловного математического ожидания некоторых известных функционалов от известных гауссовых траекторий или, что то же самое, к интегрированию известных функций по известной гауссовой мере (гауссовому распределению).

В некотором сепарабельном гильбертовом пространстве H рассматривается система эволюционных дифференциальных уравнений нелинейного и соответствующего ему линейного вида

$$\begin{gathered} \frac{dy(t)}{dt} - A(t)\,y(t) + A_1(t)\,y(t) + \alpha \cdot f(t,\, y(t)) = \xi(t), \\ 0 \le t \le a, \quad y(0) = \xi(0) = 0 \pmod{P}, \\ \frac{dx(t)}{dt} - A(t)x(t) + A_1(t)x(t) = \xi(t), \end{gathered} \tag{3}$$

$$0 \le t \le a, \quad x(0) = \xi(0) = 0 \pmod P, \tag{4}$$

где α — параметр, $\xi(t)$ — гауссов случайный процесс, определенный на отрезке $[0, a]$, нелинейная функция $f(t, y(t))$, определенная на отрезке $[0, a] \times H$, принимает свои значения из H, является интегрируемой функцией со своим квадратом по норме H для всех $y(t) \in H$ и дифференцируема по y, операторы $A(t)$ и $A_1(t)$ являются семействами неограниченных линейных операторов, при этом оператор $A(t)$ является производящим оператором для эволюционного семейства ограниченных операторов $U(t, s)$, а для оператора $A_1(t)$ семейство операторов $U_1(t, s) = U(t, s) A_1(s)$, $0 \le t, s \le a$ является ограниченным.

Системы (3) и (4) изучались одним из авторов данной работы, и совместно с Т.А. Фоминой [25–30] были получены достаточные условия для эквивалентности мер μ_y и μ_x и в явном виде вычислены плотности Радона-Никодима в терминах коэффициентов уравнений (3) и (4) с использованием расширенного стохастического интеграла, введенного А.В. Скороходом [19].

В настоящей статье, как и в работах [33–37], изучаются задачи оптимальной экстраполяции решения уравнения (3) с использованием распределений (или мер) гауссовского случайного процесса $x(t)$, являющегося решением уравнения (4). Результаты, полученные в этой работе, значительно обобщают результаты, полученные в [33–37], по крайней мере в двух случаях: во-первых, по условиям гладкости коэффициентов уравнений (3) и (4) и, во-вторых, при более широких условиях применения расширенного стохастического интеграла Скорохода к функции $f(t, y(t))$ в сравнении с условиями этой же функции с жесткими ограничениями на коэффициенты уравнения, обеспечивающими существование интеграла Ито. Легко видеть, что указанные выше обобщения в значительной степени расширяют область применения полученных оптимальных оценок и качественно улучшают методику их вычисления.

Как было показано в работах [26–30], между решениями $y(t)$ и $x(t)$ уравнений (3) и (4) при соблюдении некоторых достаточных условий можно установить связь в виде нелинейных отображений следующим образом:

$$Sy(t): y(t) + \alpha \int_0^a R_x(t, s) g(s, y(s)) = x(t), \quad 0 \le s < t \le a, \tag{5}$$

и

$$Tx(t): x(t) + \alpha \int_0^a R_x(t, s) \widetilde{g}(s, x(s)) = y(t), \quad 0 \le s < t \le a, \tag{6}$$

где нелинейные отображения S и T взаимно однозначны, обратимы и голоморфны, причем $S = T^{-1}$, а между нелинейными функциями $g(\cdot)$ и $\widetilde{g}(\cdot)$ имеет место соотношение

$$\widetilde{g}(s, x(s)) = -g(s, Tx(t)), \tag{7}$$

$R_x^2(t, s)$ является корреляционной операторной функцией гауссовского случайного процесса $x(t)$, а нелинейная функция $g(s, \cdot)$ определяется из соотношения

$$\int_0^a \int_0^a [I + U_1(t, s)]^{-1} U(s, u) f(u, y(u)) ds du = \int_0^a R_x(t, s) g(s, y(s)) ds. \tag{8}$$

В работах [26–30] находятся достаточные условия для существования функции $g(s, \cdot)$, выписывается ее явный вид, а также устанавливаются достаточные условия для эквивалентности мер μ_y и μ_x и явный вид плотности Радона–Никодима: $\rho(z) = \dfrac{d\mu_y}{d\mu_x}(z)$, $\widetilde{\rho}(z) = \dfrac{d\mu_x}{d\mu_y}(z)$.

Поскольку результаты, полученные в данной статье, имеют силу для абстрактного сепарабельного гильбертова пространства H (в частности, H может быть конечномерным евклидовым пространством), то понятно, что при рассмотрении дифференциальных уравнений высших порядков вида (2) задачи оптимального прогноза для решения таких уравнений легко сводятся к уже полученным результатам для уравнений первого порядка. Для этого следует уравнение высшего порядка, рассмотренное в гильбертовом пространстве H, привести к уравнению первого порядка, рассмотренному уже в другом гильбертовом пространстве H_1, которое является декартовым произведением пространства H на себя ровно столько раз, каков порядок рассмотренного дифференциального уравнения.

В настоящей статье уже существенно обобщаются результаты работ А.Д. Шаташвили [33–37]. Во-первых, здесь рассматриваются системы нелинейных и линейных к ним эволюционных дифференциальных уравнений вида (3) и (4), заданных в бесконечномерных гильбертовых пространствах H с неограниченными линейными операторами $A(t)$ и $A_1(t)$ и с более широкими предположениями на нелинейную функцию $f(t, x(t))$. Во-вторых, результаты получаются в терминах расширенного стохастического интеграла в смысле А.В. Скорохода [19], что позволяет рассматривать функционалы, зависящие от всей траектории наблюдаемого процесса. Именно для таких дифференциальных уравнений и таких функционалов в настоящей работе изучаются задачи оптимальных оценок для экстраполяции случайных процессов, являющихся решениями нелинейных эволюционных дифференциальных уравнений вида (3), и разрабатываются прямые методы для эффективного вычисления этих оценок.

Данная статья состоит из двух частей. В первой части рассмотрена общая проблема нахождения оптимальной оценки в задачах экстраполяции случайного процесса со значениями в некотором бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве H. Здесь будет доказана основная теорема, согласно которой оптимальная оценка экстраполяции случайного процесса в виде условного математического ожидания может быть сведена к вычислению безусловного математического ожидания по гауссовской мере. При этом строится алгоритм, по которому в явном виде можно вычислить оптимальную оценку экстраполяции.

Во второй части работы (которая будет опубликована в позднее), результаты теоремы 1 из настоящей статьи применены к решениям нелинейных эволюционных дифференциальных уравнений для построения их оптимальной оценки в задаче экстраполяции. Кроме того, полученная оценка разлагается по степеням α малой нелинейности, содержащейся в уравнении.

Пусть $\{\Omega, \varphi, P\}$ — фиксированное вероятностное пространство; H — сепарабельное вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением (x, y) и нормой $||x||$, $x, y \in H$; φ_H — σ-алгебра измеримых подмножеств пространства H. 0бозначим $L_2 = L_2\{[0, a], H\}$ пространство функций, определенных на отрезке $[0, a]$ со значениями из H и интегрируемых со своим квадратом по норме H. Очевидно, что L_2 является гильбертовым пространством. Обозначим в пространстве L_2 скалярное произведение $(f, g)_L$ и норму $||f||_L$, $f, g \in L_2$, и введем их таким образом:

$$(f, g)_L = \int_0^a (f(t), g(t))dt, \ ||f||_L^2 = \int_0^a ||f(t)||^2 \, dt, \text{ где } f, g \in L_2, \ f(t), g(t) \in H. \tag{9}$$

Поясним постановку задачи и проведем исследования для ее решения.

Пусть T_T — σ-алгебра событий, определенных поведением случайного процесса $y(t)$ до момента T. Задача оптимальной экстраполяции заключается в следующем: необходимо построить некоторый функционал оптимальной оценки прогноза в точке $t = T + h$, $h > 0$, обладающий двумя свойствами: во-первых, он должен быть T_T-измеримой случайной величиной η и, во-вторых, величина η должна из всех возможных T_T-измеримых случайных величин давать выражению $M(\eta - y(T+h))^2$ минимальное значение. Тогда величина η называется оптимальной оценкой величины $y(T+h)$ в смысле минимума среднеквадратического отклонения.

Из теории случайных процессов известно утверждение (см. [4]). Сформулируем его здесь следующей леммой.

Лемма 1. Пусть в некотором гильбертовом пространстве H рассматривается некоторая σ-алгебра Т, пусть также ξ — некоторая случайная величина со значениями из пространства H и $M\xi^2 < \infty$. Если другая случайная величина η Т-измерима и обладает таким свойством, что величина $M(\eta - \xi)^2 < \infty$ и принимает минимальное значение, то величина η определяется в виде условного математического ожидания $\eta = M(\xi / \mathrm{T})$.

Отсюда следует, что применяя лемму 1 к рассматриваемой задаче оптимального прогноза, который обозначим в точке $t = T + h$ через $\widetilde{y}(T+h)$, при условии $My^2(t) < \infty$ имеем

$$\widetilde{y}(T+h) = M(y(T+h) / \mathrm{T}_T). \tag{10}$$

Иными словами, задача нахождения оптимального прогноза случайного процесса $y(t)$ сводится к вычислению условного математического ожидания в правой части (10).

В настоящей статье разработан один эффективный метод вычисления условного математического ожидания с использованием плотности Радона–Никодима мер, порожденных изучаемыми процессами относительно некоторых других вероятностных мер. Суть заключается в следующем: в правой части выражения (10) проводится интегрирование по мере, порожденной случайным процессом $y(t)$ в функциональном пространстве. Используя байесовский подход, вначале покажем, что при наличии плотности Радона–Никодима меры, по которой проводится интегрирование в (10), относительно некоторой меры, соответствующей некоторому другому случайному процессу (естественно, более простому), интегрирование в (10) можно проводить уже по второй мере. Ценность этого шага заключается в том, что вторая мера должна быть хорошо изученной, так как исходная мера может быть сложно устроенной и мало обозримой.

Итак, пусть μ_x — мера, порожденная случайным процессом $x(t)$ на σ- алгебре φ_H, порожденной случайным процессом $x(t)$, $t \in [0, a]$, а μ_ξ — мера, порожденная случайным процессом $\xi(t)$, $t \in [0, a]$. Пусть также X — сепарабельное вещественное гильбертово пространство, а $C(X)$ — пространство функций, заданных на отрезке $[0, a]$ со значениями из X. Предположим, что рассматриваются случайные процессы $x(t)$ и $\xi(t)$, $t \in [0, a]$, со значениями из пространства X, выборочные функции которых принадлежат пространству $C_a(X)$. Сужение мер μ_x и μ_ξ на пространство $C_T(X)$, $T < a$, обозначим через μ_x^T и μ_ξ^T соответственно, а плотность Радона–Никодима $d\mu_x^T / d\mu_\xi^T$ (если она существует) — через $\rho_T(\cdot)$. Предположим, что плотности $\rho_T(\cdot)$ и $\rho_{T+h}(\cdot)$ для $T, T+h \in [0, a]$ существуют и обозначим через

$$\alpha_T = \alpha_T(T+h, \delta) = \frac{M^{(\xi)}\{\xi(T+h)\rho_{T+h}(\cdot) / \mathrm{T}_T^*\}}{\rho_T(\delta)}, \tag{11}$$

где знак (ξ) — интегрирование по мере, соответствующей случайному процессу $\xi(t)$, а T_T^* — σ-алгебра событий, порожденная величинами $\xi(s)$, $s \le T$. Доказывается следующая теорема.

Теорема 1. Пусть в сепарабельном вещественном гильбертовом пространстве X рассматриваются два случайных процесса, $x(t)$ и $\xi(t)$, и пусть меры μ_x и μ_ξ, порожденные ими, соответственно эквивалентны и существует плотность

Радона–Никодима $d\mu_x / d\mu_\xi(z) = \rho_a(z)$, а точки T, $T+h \in [0, a]$. Тогда

$$\widetilde{x}(T+h) = M\{x(T+h) / \mathrm{T}_T\} =$$

$$= \frac{M^{(\xi)}\{\xi(T+h)\rho_{T+h}(\cdot) / \mathrm{T}_T^*\}}{\rho_T(x(\cdot)|_0^T)} \Big| \xi(\cdot) = x(\cdot)\Big|_0^T. \tag{12}$$

Доказательство. Пусть $\gamma_n = f(x(t_1), \ldots, x(t_n))$ — некоторая T_T-измеримая случайная величина, где *n*-мерная функция $f(z_1, \ldots, z_n)$ — измеримая ограниченная функция. С учетом некоторых свойств условного математического ожидания (см. [3]) имеем следующую цепочку равенств:

$$M\alpha_T\gamma_n = M\alpha_T f(x(t_1), \ldots, x(t_n)) = M^{(\xi)}\alpha_T f(\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n))\rho_T(\xi(\cdot)) =$$

$$= M^{(\xi)} f(\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n)) \frac{M^{(\xi)}\{\xi(T+h)\rho_{T+h}(\xi(\cdot)) / \mathrm{T}_T^*\}}{\rho_T(\xi(\cdot))} \rho_T(\xi(\cdot)) =$$

$$= M^{(\xi)} M^{(\xi)}\{f(\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n))\xi(T+h)\rho_{T+h}(\xi(\cdot)) / \mathrm{T}_T^*\} =$$

$$= M^{(\xi)} f(\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n))\xi(T+h)\rho_{T+h}(\xi(\cdot)) =$$

$$= Mf(x(t_1), \ldots, x(t_n))x(T+h) = Mx(T+h)\gamma_n. \tag{13}$$

Таким образом,

$$M\alpha_T\gamma_n = Mx(T+h)\gamma_n. \tag{14}$$

Формула (14) имеет место для всех ограниченных T_T-измеримых функций γ_n. Поскольку любую T_T-измеримую величину γ можно аппроксимировать с помощью последовательностей вида γ_n, то переходя к пределу в выражении (14) при $n \to \infty$, получаем для любой T_T-измеримой величины γ равенство

$$M\alpha_T\gamma = Mx(T+h)\gamma. \tag{15}$$

Отсюда в силу произвольности γ имеет место формула (12), следовательно теорема доказана.

Таким образом, первый шаг к упрощению сделан. Хотя в правой части (12) интегрирование проводится по эталонной мере, тем не менее во многих случаях решение основного вопроса эффективного вычисления оптимального прогноза остается открытым, так как еще не существует общих правил для вычисления условных математических ожиданий, в частности для правой части (12).

Для дальнейшего упрощения поставленной задачи из всевозможных выборов случайного процесса $\xi(t)$ следует выбрать тот, который приведет к построению алгоритма, и с его помощью в явном виде можно получить выражение оптимального прогноза. Как выяснилось при исследовании, таким процессом оказался гауссовский случайный процесс. В связи с этим предположим, что $\xi(t)$ — гауссовский случайный процесс, заданный на отрезке $[0; a]$ со значениями из пространства H с нулевым математическим ожиданием и корреляционной операторной функцией $R^2(t, s)$.

Из теории линейной экстраполяции случайных процессов известно, что в промежутке $[T, T+h]$, где мы строим прогноз для случайного процесса $x(t)$, гауссовский процесс $\xi(t)$ можно представить в виде разложения

$$\xi(t) = l_T(t) + \varepsilon_T(t), \quad t \in [T, T+h], \tag{16}$$

где

$$l_T(t) = l_T(t, \xi(\cdot)) = M\{\xi(t) / \mathrm{T}_T^*\}, \quad t \in [T, T+h], \tag{17}$$

является линейным оптимальным прогнозом гауссовского процесса $\xi(t)$, а

$\varepsilon_T(t)$ — гауссова добавка, не зависящая от σ-алгебры T_T^*. Следовательно, если в теореме 1 допустить, что процесс $\xi(t)$ — гауссовский, то правая часть (12) принимает наиболее простой вид, так как условное математическое ожидание преобразуется в безусловное. Тем самым будет построен алгоритм эффективного вычисления оптимального прогноза исследуемого случайного процесса $x(t)$. Действительно, используя разложение (16) и то, что выражение $l_T(t)$ является T_T^*-измеримой величиной, а гауссова добавка $\varepsilon_T(t)$ не зависит от σ-алгебры T_T^*, очевидно приходим к следующей важной формуле:

$$\beta_T(T+h, x(\cdot)|_0^T) = M\{\xi(T+h)\rho_{T+h}(\xi(\cdot)) / \mathrm{T}_T^*\}|_{\xi(\cdot)=x(\cdot)_0^T} =$$

$$= M^{(\varepsilon)}\{(u_1+\varepsilon_T(T+h))\rho_{T+h}(u_2, u_3+\varepsilon_T(\cdot))\}\Bigg|\begin{array}{l} u_1 = l_T(T+h, x(\cdot)|_0^T), \\ u_2 = x(\cdot)|_0^T, \\ u_3 = l_T(\cdot, x(\cdot)|_0^T). \end{array} \tag{18}$$

Знак (ξ) означает интегрирование по мере, порожденной гауссовским случайным процессом $\varepsilon_T(t)$ (очевидно, что она определяется по мере основного гауссовского процесса $\xi(t)$, так как $\varepsilon_T(t) = \xi(t) - l_T(t)$, $l_T(t)$, $t \in [T, T+h]$, является неслучайной величиной), а величины u_1, u_2, u_3 — некоторые параметры, вместо которых в результате интегрирования подставляются $u_1 = l_T(T+h, x(\cdot)|_0^T)$, $u_2 = x(\cdot)|_0^T$, $u_3 = l_T(\cdot, x(\cdot)|_0^T)$, где $x(\cdot)|_0^T$ — часть той траектории случайного процесса $x(t)$, которая наблюдалась на отрезке $[0, T]$.

Таким образом, с помощью второго гауссовского процесса $\xi(t)$ с учетом его свойств и распределений нам удалось построить эффективно некоторый функционал $\beta_T(t, \delta)$, где $t \in [T, T+h]$, а δ — некоторая явная величина, зависящая от наблюдаемых значений процесса $x(t)$ до момента $t = T$, который вычисляется с помощью безусловного математического ожидания по известной гауссовой мере. В частности, для построения алгоритма вычисления оптимального прогноза случайного процесса $x(t)$ при условии, что он наблюдается до момента $t = T$, т.е. известна его траектория от нуля до $t = T$, $\delta = x(\cdot)|_0^T$. Учитывая все предыдущие рассуждения, из (12) окончательно получаем формулу

$$\widetilde{x}(T+h) = \frac{1}{\rho_T(x(\cdot)|_0^T)}\beta_T(T+h, x(\cdot)|_0^T), \tag{19}$$

где функционал $\beta_T(T+h, x(\cdot)|_0^T)$ вычисляется по формуле (18), а $\rho_T(x(\cdot)|_0^T)$ — плотность Радона-Никодима меры μ_x^T относительно меры μ_ξ^T. Понятно, что если плотности $\rho_T(\cdot)$ и $\rho_{T+h}(\cdot)$ существуют, то формула (19) эффективно позволяет вычислить оптимальный прогноз случайного процесса $x(t)$ в точке $t = T+h$, и таким образом поставленная здесь задача будет решена. Поэтому при наличии явного выражения плотности Радона-Никодима $\rho_a(\cdot)$ на отрезке $[0, a]$ очевидно, что для вычисления оптимального прогноза случайного процесса $x(t)$ в точке $t = T+h$, $h > 0$, при условии, что он наблюдается до момента $t = T$, можно использовать формулу (19).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Винер Н. Нелинейные задачи в теории случайных процессов. — М.: Мир. — 1961.— 160 с.
2. Wiener N. Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series // W. Eng. Appl. Cambridge. — New York, 1949. — 163 p.

3. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. — М.: Наука. — 1965. — 548 с.
4. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. — Т. 1. — М.: Наука, 1971. — 661 с.
5. Гихман И.И., Скороход А.В. О плотностях вероятностных мер в функциональных пространствах // УМН. — 1966. — **21**, вып. 6. — С. 83–152.
6. Григелионис Б.И., Ширяев А.Н. О задаче Стефана и оптимальных правилах остановки марковских процессов // Теория вероятностей и ее применения. — 1966. — **2**, вып. 4. — С. 612–631.
7. Далецкий Ю.Л., Шаташвили А.Д. Об оптимальном прогнозировании случайных величин, нелинейно связанных с гауссовскими // Теория случайных процессов. — 1975. — Вып. 3. — С. 30–33.
8. Далецкий Ю.Л., Шаташвили А.Д. О характеристическом функционале условного распределения // Теория случайных процессов. — 1976. — Вып. 4. — С. 49–51.
9. Zadeh L. Extension of Wiener's theory of predictions // J. Appl. Phys. — 1950. — N 21. — P. 645–655.
10. Колмогоров А.Н. Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве // Бюл. МГУ. — 1941. — **2**, вып. 6. — С. 1–40.
11. Колмогоров А.Н. Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей // Изв. АН СССР. Сер. математики. — 1941. — № 5. — С. 3–14.
12. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Экстраполяции многомерных марковских процессов по неполным данным // Теория вероятностей и ее применения. — 1968. — **8**, вып. 1. — С. 17–38.
13. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. О случаях эффективного решения задач оптимальной нелинейной фильтрации, интерполяции и экстраполяции // Там же. — 1968. — **8**, вып. 3. — С. 57–571.
14. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. — М.: Наука, 1974.
15. Михалевич В.С. Байесовский выбор между двумя гипотезами о среднем значении нормального процесса // Вест. Киев. ун–та. — 1958. — № 1. — С. 101–104.
16. Михалевич В.С. Последовательные алгоритмы оптимизации и их применение. I // Кибернетика. — 1965. — № 1. — С. 45–56.
17. Михалевич В.С. Последовательные алгоритмы оптимизации и их применение. II // Там же. — 1965. — № 2. — С. 85–89.
18. Розанов Ю.А. Стационарные случайные процессы. — М.: Физматгиз, 1963.
19. Скороход А.В. Об одном обобщении стохастических интегралов // Теория вероятностей и ее применения. — 1975. — **20**, вып. 2. — С. 223–238.
20. Скороход А.В., Шаташвили А.Д. Об абсолютной непрерывности гауссовских мер при нелинейных преобразованиях // Теория вероятностей и мат. статистика. — 1976. — Вып. 15. — С. 139–151.
21. Сохадзе Г.А., Шаташвили А.Д. Об эквивалентности гауссовских мер при нелинейных преобразованиях в гильбертовом пространстве // Докл. АН СССР. — 1978. — **240**, № 4. — С. 790–793.
22. Сохадзе Г.А., Шаташвили А.Д. Нелинейные преобразования гауссовских мер в гильбертовом пространстве // Теория случайных процессов. — 1979. — Вып. 7. — С. 109–114.
23. Стратонович Р.Л. Условные процессы Маркова // Теория вероятностей и ее применения. — 1960. — **5**, вып. 2. — С. 172–195.
24. Стратонович Р.Л. Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. — М.: МГУ. — 1966.
25. Фомина Т.А. Об эквивалентности двух гауссовых мер, порожденных решениями линейных эволюционных уравнений в гильбертовом пространстве // Докл. НАН Украины. — 2004. — № 2. — С. 37–42.
26. Фомина Т.А. Некоторые линейные и нелинейные эквивалентные преобразования гауссовских мер в гильбертовом пространстве: Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук / Донецк, 2005. — 156 с.
27. Фомина Т.А., Шаташвили А.Д. Об эквивалентности мер при некоторых линейных и нелинейных эволюционных преобразованиях гауссовских процессов в евклидовом и гильбертовом пространствах // Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика. — 2000. — № 2. — С. 105–119.

28. Ф о м и н а Т. А., Ш а т а ш в и л и А. Д. О мерах, порожденных уравнениями со случайными коэффициентами // Там же. — 2002. — № 2. — С. 61–80.
29. Ф о м и н а Т. А., Ш а т а ш в и л и А. Д. Об эквивалентности двух гауссовских мер в евклидовом и гильбертовом пространствах. Случайные операторы и стохастические уравнения // Utrecht, the Netherlands. — Tokyo, Japan. — 2003. — **11**, N 4. — P. 351–371.
30. Ф о м и н а Т. А., С о х а д з е Г. А., Ш а т а ш в и л и А. Д. Некоторые достаточные условия эквивалентности мер, индуцируемых решениями уравнений со случайными коэффициентами // Ibid. — 2003. — **12**, № 3. — P. 267–275.
31. Ш а т а ш в и л и А. Д. Об одном классе абсолютно непрерывных нелинейных преобразований гауссовских мер // Труды ВЦ АН ГССР. — 1965. —**5**, № 1. — С. 69–105.
32. Ш а т а ш в и л и А. Д. О плотностях мер, соответствующих решениям стохастических дифференциальных уравнений, находящихся под воздействием гауссовских процессов // Там же. — 1966. — **7**, № 1. — С. 43–58.
33. Ш а т а ш в и л и А. Д. Об оптимальном прогнозировании для некоторого класса случайных процессов // Теория вероятностей и мат. статистика. — 1970. — Вып. 1. — С. 222–239.
34. Ш а т а ш в и л и А. Д. О многомерном оптимальном прогнозировании и фильтрации одного класса многомерных случайных процессов // Мат. физика. — 1970. — № 7. — С. 178–185.
35. Ш а т а ш в и л и А. Д. Оптимальная экстраполяция и фильтрация для одного класса случайных процессов. I // Теория вероятностей и мат. статистика. — 1970. — Вып. 2. — С. 235–253.
36. Ш а т а ш в и л и А. Д. Оптимальная экстраполяция и фильтрация для одного класса случайных процессов. II // Там же. — 1970. — Вып. 3. — С. 211–231.
37. Ш а т а ш в и л и А. Д. Прогноз и фильтрация функционалов от решений нелинейных дифференциальных уравнений со случайными функциями // ДАН СССР. — 1970. — **194**, № 1. — С. 35–37.
38. Ш а т а ш в и л и А. Д. О плотностях мер, соответствующих решениям некоторых дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами // Там же. — 1970. — **194**, № 2. — С. 275–277.
39. Ш а т а ш в и л и А. Д. О преобразовании мер в гильбертовом пространстве с помощью линейных дифференциальных уравнений // Теория случайных процессов. — 1973. — Вып. 2. — С. 113–120.
40. Ш а т а ш в и л и А. Д. О преобразованиях гауссовской меры в гильбертовом пространстве, порожденных дифференциальными уравнениями // Там же. — С. 120–128.
41. Ш и р я е в А. Н. Об оптимальных методах в задачах скорейшего обнаружения // Теория вероятностей и ее применения. — 1963. — **7**, вып. 1. — С. 26–51.
42. Ш и р я е в А. Н. О марковских достаточных статистиках в неаддитивных байесовских задачах последовательного анализа // Там же. — 1965. — **9**, вып. 2. — С. 670– 686.
43. Ш и р я е в А. Н. Последовательный анализ и управляемые случайные процессы // Кибернетика. — 1965. — № 3. — С. 1–24.
44. Ш и р я е в А. Н. О стохастических уравнениях в теории условных марковских процессов // Теория вероятностей и ее применения. — 1966. — № 11. — С. 200–206.
45. Я г л о м А. М. Введение в теорию стационарных случайных функций // УМН. — 1952. — № 5. — С. 3–168.
46. Я г л о м А. М. Экстраполирование, интерполирование и фильтрация стационарных случайных процессов с рациональной спектральной плотностью // Труды Москов. мат. общества. — 1955. — № 4. — С. 237–278.
47. Я г л о м А. М. Эффективные решения линейных аппроксимационных задач для многомерных стационарных случайных процессов с дискретным спектром // Теория вероятностей и ее применения. — 1960. — **5**, № 3. — С. 265–292.
48. Я г л о м А. М. Примеры оптимального нелинейного экстраполирования стационарных случайных процессов // Тез. докл. на VI Всесоюз. совещании по теории вероятности и мат. статистике. — Вильнюс, 1960.

Поступила 25.05.2007