УДК 519.8

Н.В. СЕМЕНОВА, Л.Н. КОЛЕЧКИНА, А.Н. НАГОРНАЯ

ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ВЕКТОРНЫХ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ НА КОМБИНАТОРНОМ МНОЖЕСТВЕ ПЕРЕСТАНОВОК[1]

Ключевые слова: *многокритериальная оптимизация, комбинаторные множества, множества перестановок, Парето-оптимальные решения.*

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время публикации многих зарубежных и отечественных ученых посвящены построению эффективных методов решения и исследованию разнообразных аспектов теории многокритериальных задач оптимизации, включая дискретные [1–8].

Интерес к исследованию многокритериальных моделей дискретной оптимизации обусловлен их широким применением при решении важных задач экономики, проектирования сложных систем, для принятия решений в условиях неопределенности и других. При решении различных народнохозяйственных проблем, в том числе проектирования и размещения объектов, планирования эксперимента, управления процессом обработки данных, важную роль играют разнообразные оптимизационные задачи на комбинаторных множествах. На сегодняшний день в области исследования различных классов комбинаторных моделей и разработки новых методов их решения получены существенные результаты.

Как известно, большинство комбинаторных оптимизационных задач могут быть сведены к задачам целочисленного программирования, но это не всегда оправдано, поскольку в этом случае теряется возможность учета комбинаторных свойств задачи [2].

В монографиях [9–11] показано, что выпуклой оболочкой множества перестановок является общий перестановочный многогранник, множество вершин которого равно множеству перестановок. Данное свойство перестановочного многогранника дает возможность свести решение задачи, определенной на дискретном комбинаторном множестве, к решению задачи на непрерывном допустимом множестве.

На основании установленной авторами взаимосвязи между многокритериальными задачами на комбинаторных множествах и оптимизационными задачами на непрерывном допустимом множестве появляется возможность применять классические методы непрерывной оптимизации к решению векторных комбинаторных задач на различных комбинаторных множествах, а также развивать новые оригинальные методы решения, используя свойства комбинаторных множеств и их выпуклых оболочек.

В настоящее время существует много методов решения многокритериальных задач, но ни один из них в общем виде не применим к комбинаторным задачам на перестановках, поэтому достаточно важным является разработка специальных методов и подходов к решению многокритериальных задач на комбинаторном множестве перестановок.

В данной статье установлены некоторые характеристики строения допустимой области, а также сформулировано и доказано ряд теорем о свойствах различ-

[1]Настоящая работа поддержана Фондом фундаментальных исследований Украины (проект № Ф251/094).

ных видов эффективных решений рассматриваемых задач. Для векторных задач комбинаторного типа на перестановках предложен один из возможных подходов к их решению.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Для постановки задачи используем понятие мультимножества A, которое определяется основанием $S(A)$ и кратностью его элементов $k(a)$ [9–11].

Пусть заданы мультимножество $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_q\}$, его основание $S(A)=\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$, где $e_j \in R^1$ $\forall\, j \in N_k=\{1, \ldots, k\}$, и кратность элементов $k(e_j)=r_j$, $j \in N_k$, $r_1+r_2+\ldots+r_k=q$.

Упорядоченной n-выборкой из мультимножества A называется набор

$$a=(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}), \tag{1}$$

где $a_{i_j} \in A$ $\forall\, i_j \in N_n, \forall\, j \in N_n, i_s \neq i_t$, если $s \neq t$ $\forall\, s \in N_n, \forall\, t \in N_n$.

Определение 1 [9–11]. Множество $E(A)$, элементами которого являются n-выборки вида (1) из мультимножества A, называется евклидовым комбинаторным множеством, если для произвольных его элементов $a'=(a_1', a_2', \ldots, a_n')$, $a''=(a_1'', a_2'', \ldots, a_n'')$ выполняются условия $(a' \neq a'') \Leftrightarrow (\exists\, j \in N_n:$ $a_j' \neq a_j'')$. Иными словами, два элемента множества $E(A)$ отличны один от другого, если они помимо других отличий имеют разные порядки размещения символов, которые их образовывают.

Множество $P_{nk}(A)$ перестановок с повторениями из n действительных чисел, среди которых k различных, называется общим множеством перестановок, т.е. множеством упорядоченных n-выборок вида (1) из мультимножества A при условии $n=q>k$.

При $n=k=q$ имеем множество перестановок без повторений. Обозначим его P_n. Очевидно, что $P_n(A)=P_{nn}(A)$. Обозначим $P(A)$ множество перестановок в случае, когда конкретно не указан вид перестановок. Рассмотрим многокритериальные комбинаторные задачи вида

$$Z(\Phi, P_{nk}(A)): \max\, \{\Phi(a) \mid a \in P_{nk}(A)\},$$

которые состоят в максимизации векторного критерия $\Phi(a)$ на евклидовом комбинаторном множестве перестановок $P_{nk}(A)$, где $\Phi(a)=(\Phi_1(a),\ \Phi_2(a), \ldots,$ $\Phi_l(a))$, $\Phi_i: E(A) \to R^1$, $i \in N_l$.

Существует множество различных принципов принятия решений в ситуациях такого рода. Рассмотрим некоторые из наиболее традиционных принципов, связанные с выделением из всего множества $Y=\{y=\Phi(a) \mid a \in P_{nk}(a)\}$ множеств, не улучшаемых или оптимальных по Парето, оптимальных по Слейтеру, оптимальных по Смейлу векторов. Таким образом, под решением задачи $Z(\Phi, P_{nk}(A))$ будем понимать нахождение элементов одного из следующих множеств: $\mathrm{P}(\Phi, P_{nk}(A))$ — множества Парето-оптимальных (эффективных) решений, $\mathrm{Sl}(\Phi, P_{nk}(A))$ — оптимальных по Слейтеру (слабо эффективных) решений, $\mathrm{Sm}(\Phi, P_{nk}(A))$ — оптимальных по Смейлу (строго эффективных) решений. Задачи поиска элементов из множеств $\mathrm{P}(\Phi, P_{nk}(A))$, $\mathrm{Sl}(\Phi, P_{nk}(A))$ или $\mathrm{Sm}(\Phi, P_{nk}(A))$ обозначим соответственно $Z_{\mathrm{P}}(\Phi, P_{nk}(A))$, $Z_{\mathrm{Sl}}(\Phi, P_{nk}(A))$ или $Z_{\mathrm{Sm}}(\Phi, P_{nk}(A))$. Согласно [3, 7, 8] для любого $a \in P_{nk}(A)$ истинны утверждения

$$a \in \mathrm{Sl}(\Phi, P_{nk}(A)) \Leftrightarrow \{y \in P_{nk}(A) \mid \Phi(y) > \Phi(a)\} = \varnothing, \tag{2}$$

$$a \in \mathrm{P}(\Phi, P_{nk}(A)) \Leftrightarrow \{y \in P_{nk}(A) \mid \Phi(y) \geq \Phi(a), \Phi(y) \neq \Phi(a)\} = \varnothing, \tag{3}$$

$$a \in \mathrm{Sm}(\Phi, P_{nk}(A)) \Leftrightarrow \{y \in P_{nk}(A) \mid \Phi(y) \geq \Phi(a),\ y \neq a\} = \varnothing. \tag{4}$$

Очевидно, что

$$\mathrm{Sm}\,(\Phi, P_{nk}(A)) \subset \mathrm{P}\,(\Phi, P_{nk}(A)) \subset \mathrm{Sl}\,(\Phi, P_{nk}(A)). \tag{5}$$

Конечность допустимой области перестановок $P_{nk}(A)$ обеспечивает непустоту множества $\mathrm{P}(\Phi, P_{nk}(A))$ и его внешнюю устойчивость [8]: $\forall\ y \in P_{nk}(A)\ \exists\ a \in \mathrm{P}(\Phi, P_{nk}(A)) : \Phi(a) \geq \Phi(y)$. В случае бесконечного множества A вопрос о существовании элементов множества $\mathrm{P}(\Phi, P_{nk}(A))$ требует отдельного исследования.

2. СВОЙСТВА МНОЖЕСТВА ДОПУСТИМЫХ РЕШЕНИЙ

Будем рассматривать элементы множества перестановок с повторениями как точки арифметического евклидова пространства R^n.

Пусть вектор a вида (1) — элемент евклидова комбинаторного множества $E(A)$. Отображение $\varphi : E(A) \to E_\varphi(A) \subset R^n$ называется погружением множества $E(A)$ в арифметическое евклидово пространство, если φ задает взаимно однозначное соответствие $E_\varphi(A) \subset R^n$ по следующему правилу: для $a = (a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \in E(A)$, $x = \varphi(a)$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E_\varphi(A)$ имеем $x_j = a_{i_j}$ $\forall\ j \in N_n$.

В [9, 10] показано, что выпуклой оболочкой множества перестановок является перестановочный многогранник $\Pi_{nk}(A) = \mathrm{conv}\, P_{nk}(A)$, множество вершин которого равно множеству $P_{nk}(A)$ перестановок: $\mathrm{vert}\, \Pi_{nk}(A) = P_{nk}(A)$.

Не теряя общности, упорядочим элементы мультимножества A по неубыванию:

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n, \tag{6}$$

и элементы его основания — по возрастанию: $e_1 < e_2 < \ldots < e_k$. Тогда выпуклой оболочкой общего множества перестановок $P_{nk}(A)$ является общий перестановочный многогранник $\Pi_{nk}(A)$, который описывается следующей системой линейных неравенств:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \leq \sum\limits_{j=1}^{n} a_j, & (7) \\ \sum\limits_{j=1}^{i} x_{\alpha_j} \geq \sum\limits_{j=1}^{i} a_j, & (8) \end{cases}$$

$\alpha_j \in N_n$, $\alpha_j \neq a_t$ $\forall\ j \neq t$, $\forall\ j, t \in N_i$, $\forall\ i \in N_{n-1}$, а $P_{nk}(A) = \mathrm{vert}\, \Pi_{nk}(A)$.

Систему ограничений (7), (8) общего перестановочного многогранника $\Pi_{nk}(A)$ можно записать в виде равносильной ей системы

$$\begin{cases} \sum\limits_{i \in \omega_t} x_i \geq \sum\limits_{i=1}^{|\omega_t|} a_i \quad \forall\ \omega_t \subset N_n; & (9) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i, & (10) \end{cases}$$

где $|\omega_t|$ — количество элементов множества индексов ω, определенных как $|\omega_t| = t$, $t \in \{1, 2, \ldots\}$.

При отображении множества перестановок $P_{nk}(A)$ в евклидово пространство R^n можно сформулировать задачу $Z(F, X)$ максимизации некоторого векторного критерия $F(x)$ на множестве X, причем каждой точке $a \in P_{nk}(A)$ будет соответствовать точка $x \in X$ такая, что $F(x) = \Phi(a)$,

$$Z(F, X) : \max\, \{F(x) \mid x \in X\},$$

где $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_l(x))$, $f_i(x)$ соответствует функционалу $\Phi_i(a)$, $f_i : R^n \to R^1$, $i \in N_l$; X — непустое множество в R^n, определенное следующим образом: $X = \mathrm{vert}\, \Pi_{nk}(A)$, $\Pi_{nk}(A) = \mathrm{conv}\, P_{nk}(A)$. Под соответствием векторной функции F вектору функционалов Φ подразумевается соотношение $\Phi(a) = F(\varphi(a))\ \forall\, a \in P_{nk}(A)$.

Задача $Z(F, X)$ может содержать также дополнительные линейные ограничения, образующие выпуклое многогранное множество $D \subset R^n$ вида $D = \{x \in R^n \mid Bx \le d\}$, где $d \in R^m$, $B \in R^{m \times n}$. Таким образом, допустимое множество имеет вид

$$X = \mathrm{vert}\, \Pi_{nk}(A) \cap D.$$

Как правило, введение дополнительных ограничений усложняет задачу, однако уменьшает допустимую область, что важно учитывать при построении решений.

3. УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ И НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МНОЖЕСТВ ЭФФЕКТИВНЫХ РЕШЕНИЙ

Обозначим множества решений задачи $Z(F, X)$ следующим образом: $\mathrm{P}(F, X)$ — множество Парето-оптимальных (эффективных) решений, $\mathrm{Sl}(F, X)$ — оптимальных по Слейтеру (слабо эффективных) решений, $\mathrm{Sm}(F, X)$ — оптимальных по Смейлу (строго эффективных) решений. Для любого $x \in X$ истинны утверждения вида (2)–(5), записанные применительно к задаче $Z(F, X)$:

$$x \in \mathrm{Sl}(F, X) \Leftrightarrow \{y \in X \mid F(y) > F(x)\} = \varnothing, \tag{11}$$

$$x \in \mathrm{P}(F, X) \Leftrightarrow \{y \in X \mid F(y) \ge F(x), F(y) \ne F(x)\} = \varnothing, \tag{12}$$

$$x \in \mathrm{Sm}(F, X) \Leftrightarrow \{y \in X \mid y \ne x, F(y) \ge F(x)\} = \varnothing. \tag{13}$$

$$\mathrm{Sm}(F, X) \subset \mathrm{P}(F, X) \subset \mathrm{Sl}(F, X). \tag{14}$$

Поскольку допустимая область X ограничена, то множество $\mathrm{P}(F, X)$ не пусто и внешне устойчиво.

Теорема 1. Элементы множеств $\mathrm{Sm}(F, X)$ — строго эффективных, $\mathrm{P}(F, X)$ — Парето-оптимальных, $\mathrm{Sl}(F, X)$ — слабо эффективных решений многокритериальной комбинаторной задачи на перестановках вида $Z(F, X)$ находятся в вершинах перестановочного многогранника $\Pi_{nk}(A)$.

Доказательство. Учитывая соотношения (14) между введенными множествами эффективных решений, а также в соответствии с [9, 10] тот факт, что множество допустимых решений X является подмножеством множества вершин общего перестановочного многогранника $\Pi_{nk}(A)$, т.е. $P_{nk}(A) = \mathrm{vert}\, \Pi_{nk}(A)$, приходим к справедливости цепочки включений: $\mathrm{Sm}(F, X) \subset \mathrm{P}(F, X) \subset \mathrm{Sl}(F, X) \subset \mathrm{vert}\, \Pi_{nk}(A)$. Теорема доказана.

Пусть функции $f_i(x)$, $i \in N_l$, векторного критерия $F(x)$ являются линейными, т.е. $f_i(x) = \langle c_i, x \rangle$, $c_i \in R^n$, $i \in N_l$. Важные свойства допустимой области X и множеств различных видов эффективных решений, указанные в теореме 1, а также линейность функций векторного критерия позволяют свести решение задачи $Z(F, X)$ к решению задачи $Z(F, G)$ на непрерывном допустимом множестве $G = \Pi_{nk}(A) \cap D$.

Пусть $C \in R^{n \times l}$ — матрица, c_i — ее вектор-строка, $i \in N_l$. Многогранник $\Pi_{nk}(A)$ представим в виде $\Pi_{nk}(A) = \{x \in R^n \mid \langle \pi_i, x \rangle \le \gamma_i, i \in N_p\}$, сведя все неравенства к одному виду ($\leq$), и будем обозначать Π. Анализ задачи $Z(F, X)$ будем проводить с учетом свойств конуса $K = \{x \in R^n \mid Cx \geq 0\}$ перспективных направлений [3] задачи $Z(F, X)$ и выпуклых замкнутых конусов $0^+ \Pi(y)$ $= \{x \in R^n \mid \langle \pi_i, x \rangle \leq 0, i \in N(y)\}$, где $N(y) = \{i \in N_p \mid \langle \pi_i, y \rangle = \gamma_i\}$, которые могут быть построены для всех точек $y \in \text{vert}\, \Pi$. Очевидно, что $N(y) \neq \varnothing$, $X \subset y + 0^+ \Pi(y)$. Обозначим $K_0 = \{x \in R^n \mid Cx = 0\}$ ядро отображения $C : R^n \to R^l$, $\text{int}\, K = \{x \in R^n \mid Cx > 0\}$ — внутренность конуса K. Из формул (11)–(13) следует, что $\forall\, x \in X$ справедливы утверждения

$$x \in \text{Sl}(C, X) \Leftrightarrow (x + \text{int}\, K) \cap X = \varnothing, \tag{15}$$

$$x \in \text{P}(C, X) \Leftrightarrow (x + K \setminus K_0) \cap X = \varnothing, \tag{16}$$

$$x \in \text{Sm}(C, X) \Leftrightarrow (x + K) \cap X \setminus \{x\} = \varnothing. \tag{17}$$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 2. $\text{P}(F, G) \cap \text{vert}\, \Pi \subset \text{P}(F, X)$, $\text{Sl}(F, G) \cap \text{vert}\, \Pi \subset \text{Sl}(F, X)$, $\text{Sm}(F, G) \cap \text{vert}\, \Pi \subset \text{Sm}(F, X)$.

Доказательство. Поскольку $\text{vert}\, \Pi \cap D \subset G$, то $\text{P}(F, G) \cap \text{vert}\, \Pi \cap D \subset$ $\subset \text{P}(F, G \cap \text{vert}\, \Pi \cap D) = \text{P}(F, X)$. Соотношения $\text{Sl}(F, X) = \text{Sl}(F, \text{vert}\, \Pi \cap D) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \text{Sl}(F, G) \cap \text{vert}\, \Pi \cap D$, $\text{Sm}(F, X) = \text{Sm}(F, D \cap \text{vert}\, \Pi) \Leftrightarrow \text{Sm}(F, G) \cap \text{vert}\, \Pi$ доказываются аналогично.

Теорема 3. Если допустимое множество X задачи $Z(F, X)$ не содержит ограничений, описывающих выпуклое многогранное множество D, либо $\Pi \subseteq D$, т.е. $X = \text{vert}\, \Pi$, то $\forall\, x \in R^n$ справедливы утверждения

$$x \in \text{Sl}(F, X) \Leftrightarrow x \in \text{Sl}(F, \Pi) \cap \text{vert}\, \Pi,$$

$$x \in \text{P}(F, X) \Leftrightarrow x \in \text{P}(F, \Pi) \cap \text{vert}\, \Pi,$$

$$x \in \text{Sm}(F, X) \Leftrightarrow x \in \text{Sm}(F, \Pi) \cap \text{vert}\, \Pi.$$

Доказательство. Из теоремы 2 с учетом условий теоремы 3 следует, что $\forall\, x \in R^n$ истинны высказывания $x \in \text{Sl}(F, \Pi) \cap \text{vert}\, \Pi \to x \in \text{Sl}(F, X)$, $x \in \text{P}(F, \Pi) \cap \text{vert}\, \Pi \to x \in \text{P}(F, X)$, $x \in \text{Sm}(F, \Pi) \cap \text{vert}\Pi \to \text{Sm}(F, X)$. Докажем обратные импликации. Пусть $x \in \text{Sl}(F, X)$, откуда согласно теореме 1 следует, что $x \in \text{vert}\, \Pi$. Предположим от противного, что $x \notin \text{Sl}(F, \Pi)$. Учитывая линейность функций $f_i(x)$, $i \in N_l$, векторного критерия $F(x)$, по теореме 1 из [5] выполняется условие $\text{int}\, K \not\subset 0^+ \Pi(x) \neq \varnothing$, т.е. в конусе $(x + \text{int}\, K)$ лежат некоторые точки границы множества Π, следовательно существует точка $x^1 \in \text{vert}\, \Pi$, принадлежащая этому конусу. Последнее в силу формулы (12) означает, что $x \notin \text{Sl}(F, X)$ и приводит к противоречию с условием теоремы. Остальные утверждения данной теоремы доказываются аналогично. Доказательство завершено.

Следствие. При условиях теоремы 3 справедливы равенства

$$\text{P}(F, \Pi) \cap \text{vert}\, \Pi = \text{P}(F, X),\ \text{Sl}(F, \Pi) \cap \text{vert}\, \Pi = \text{Sl}(F, X),$$

$$\text{Sm}(F, \Pi) \cap \text{vert}\, \Pi = \text{Sm}(F, X).$$

Если в задаче $Z(F, X)$ допустимая область $X = \text{vert}\, \Pi_{nk}(A)$, то для любой точки $x \in \text{vert}\, \Pi_{nk}(A)$ справедливы необходимые и достаточные условия оптимальности всех указанных выше видов эффективных решений, полученые в работе [5].

Если допустимая область X задачи $Z(F, X)$ содержит дополнительные ограничения, описывающие выпуклый многогранник D, т.е. $X = \text{vert}\, \Pi \cap D$ и $\Pi \cap D \neq \Pi$, то справедливы лишь достаточные условия оптимальности решений.

Теорема 4. $\forall\, x \in \text{vert}\, \Pi : x \in \text{P}(F, \Pi) \cap D \rightarrow x \in \text{P}(F, X),\ \ x \in \text{Sl}(F, \Pi) \cap D \rightarrow x \in \text{Sl}(F, X),\ x \in \text{Sm}(F, \Pi) \cap D \rightarrow x \in \text{Sm}(F, X)$.

Доказательство. Поскольку $G = \Pi \cap D$, то справедливы импликации $\forall\, x \in \text{vert}\, \Pi : x \in \text{P}(F, \Pi) \cap D \rightarrow x \in \text{P}(F, \Pi \cap D) = \text{P}(F, G) \rightarrow x \in P(F, X)$, $x \in \text{Sl}(F, \Pi) \cap D \rightarrow x \in \text{Sl}(F, X)$, $x \in \text{Sm}(F, \Pi) \cap D \rightarrow x \in \text{Sm}(F, X)$.

Таким образом, теоремы 1–4 устанавливают взаимосвязь между задачей $Z(F, X)$ и задачей $Z(F, G)$, определенной на непрерывном допустимом множестве. Это дает возможность применять классические методы непрерывной оптимизации к решению векторных комбинаторных задач на перестановках и на этой основе развивать новые оригинальные методы решения, используя свойства комбинаторных множеств и их выпуклых оболочек.

При установлении различных видов эффективности решений следует учитывать, что если выполняются необходимые условия оптимальности рассматриваемого решения, то гарантировать его эффективность нельзя, однако если эти условия не выполняются, то решение неэффективно. Если используются достаточные условия, то решение, удовлетворяющее им, эффективно, в противном случае вопрос об эффективности решения остается открытым. Если же применяются необходимые и достаточные условия, то вопрос решается однозначно: решение эффективно тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет этим условиям.

Если задача $Z(F, X)$ не содержит линейных ограничений, образующих выпуклое многогранное множество $D \subset R^n$, либо $\Pi \subseteq D$, т.е. $X = \text{vert}\, \Pi$, то с учетом необходимых и достаточных условий оптимальности (теорема 3) процесс ее решения сводится к поиску эффективных решений задачи $Z(F, G)$ на непрерывном допустимом множестве $G = \Pi$ с последующим выбором из них лишь тех, которые являются вершинами перестановочного многогранника Π.

Анализируя теоремы 2 и 4, приходим к соотношениям, существующим между задачами $Z(F, X)$ и $Z(F, G)$: если $x \in \text{R}(F, G) \cap \text{vert}\, \Pi$, то $x \in \text{R}(F, X)$; если $x \notin \text{R}(F, G) \cap \text{vert}\, \Pi$, то из этого не следует, что $x \notin \text{R}(F, X)$, где $\text{R}(F, X)$ обозначает множество $\text{P}(F, X)$, $\text{Sm}(F, X)$ либо $\text{Sl}(F, X)$.

4. ОБЩИЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ВЕКТОРНЫХ ЗАДАЧ НА КОМБИНАТОРНОМ МНОЖЕСТВЕ ПЕРЕСТАНОВОК

Если задача $Z(F, X)$ содержит дополнительные линейные ограничения, то предлагается следующий подход к ее решению.

1. Находим эффективные решения задачи $Z(F, \Pi)$.

2. Проверяем их на принадлежность множеству D. Если $x \in \text{P}(F, \Pi) \cap D$, то $x \in \text{P}(F, X)$.

3. Рассмотрим допустимые решения $x \in X$ задачи $Z(F, X)$, являющиеся неэффективными в задаче $Z(F, \Pi)$, т.е. $x \in X \setminus (\text{P}(F, \Pi) \cap D)$, и проверяем их на эффективность. Для этого воспользуемся необходимыми и достаточными условиями, сформулированными в [8, с. 187, 188].

Утверждение 1. Допустимое решение x^0 эффективно тогда и только тогда, когда оно является оптимальным решением задачи

$$Z^1(f, X) : \max \left\{ \sum_{i=1}^{l} f_i(x) \mid x \in X,\ f_i(x) \geq f_i(x^0),\ i \in N_l \right\}.$$

Если решение x^0 неэффективно, то в результате решения этой задачи находим эффективное решение x^*, которое более предпочтительно, чем x^0, т.е. $F(x^*) \ge F(x^0)$.

Продолжая исследования и развивая результаты работ [1, 4–6, 9–13], предложим подход к решению задачи $Z(F, X)$, основанный на линейной свертке (агрегации) ее частичных критериев и дальнейшем сведении поиска решений начальной задачи к решению серии скалярных (однокритериальных) задач, проверке оптимальности полученных решений. Метод решения однокритериальных задач основан на идеях декомпозиции, отсекающих плоскостей Келли, релаксации. Далее рассматриваем метод, при реализации которого учитывается тот факт, что число ограничений довольно большое. Тогда целесообразным является использование процедуры релаксации — временного отбрасывания некоторых ограничений и решения задачи на более широкой области, т.е. при оставшихся ограничениях.

Для построения алгоритма, на начальном этапе необходимо определить исходную точку. Рассмотрим однокритериальную задачу без ограничений, описывающих многогранник D, которые будем называть дополнительными ограничениями.

Утверждение 2. Если для элементов мультимножества A и коэффициентов c_j, $j \in N_n$, целевой функции задачи $\operatorname{extr}\left\{ f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \mid x \in \operatorname{vert} \Pi_{nk}(A) \right\}$ выполняются соответственно условия (6) и $c_{i_1} \le c_{i_2} \le \ldots \le c_{i_n}$, $i_n \in N_n$, то максимум функции $f(x)$ на допустимом множестве достигается в точке $x^* = (x_{i_1^*}, x_{i_2^*}, \ldots, x_{i_n^*}) \in \operatorname{vert} \Pi_{nk}(A)$, которая задается как

$$x_{i_j^*} = a_j \ \forall\, j \in N_n, \tag{18}$$

а минимум — соответственно в точке $y = (y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_n})$, где

$$y_{i_{j+1}} = a_{n-j} \ \forall\, j \in N_{n-1} \cup \{0\}.$$

Следует отметить, что общее число p линейных неравенств, входящих в систему (7), (8), описывающую перестановочный многогранник $\Pi_{nk}(A)$, очень велико. Согласно [9–11] совокупность неравенств системы (7), (8), имеющих одинаковое значение i верхнего предела суммирования, будем называть i-й группой неравенств этой системы. В частности, в каждую i-ю группу входит C_n^i неравенств. Отсюда имеем общее число неравенств $p = \sum_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n$. Поскольку из n координат a_j, $j \in N_n$, только k различны, то из системы неравенств (7), (8) можно исключить некоторые неравенства. С учетом выполнения условия (6) для любого $j \in N_{i-1}$, $i \le n$, имеет место равенство $a_j = a_{j+1}$. В этом случае при выполнении неравенств первой группы в системе (7), (8) будут также справедливы неравенства второй, третьей, …, i_n-й групп. Действительно, поскольку $x_j \ge a_1$, $j \in N_n$, то для любого $i \in N_n$ выполняется условие $\sum_{j=1}^{i} x_{\alpha_j} \ge i a_1$. Следовательно, из системы (7), (8), описывающей перестановочный многогранник, можно исключить неравенства групп второй, третьей,..., i-й и общее число неравенств будет составлять $N = 1 + n + \sum_{j=i+1}^{n} C_n^j$. Если набор чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ обладает свойством

$a_j = a_{j+1}\ \forall\ j \in N_{n-1} \setminus N_{n-i}$, то в системе (7), (8) достаточно оставить только неравенства первой, второй, …, $(n - j)$-й групп.

Важно правильно организовать на первом этапе решения задачи выбор активных ограничений-неравенств. Для решения задачи $Z(F, X)$ необходимо учесть на начальном этапе лишь часть ограничений, которые определяют область X. Поскольку определение эффективных решений задачи $Z(F, X)$ является более важным, чем построение всего множества ограничений, описывающих допустимую область G, поэтому достаточно построить только те ограничения множества G, которые определяют эффективные решения данной задачи. Рассматриваемый здесь метод предназначен для получения таких ограничений.

Введем следующие обозначения. Допустимую область задачи $Z(F, G)$ запишем в виде $G = \{x \in R^n \mid Hx \le g\}$, $g = (g_1, g_2, \dots, g_q)$, $H \in R^{q \times n}$, H — матрица, которая используется для матрично-векторной формы записи ограничений вида (7), (8) и линейных неравенств, описывающих многогранник D, где все ограничения сведены к одному ($\le$) виду неравенств. Обозначим N_q множество, элементы которого определяют номера ограничений системы (7), (8) и дополнительных ограничений, описывающих выпуклое многогранное множество $D: N_q = \{1, 2, \dots, 2^n + m\}$.

Определим множества $G_i = \{x \in R^n \mid \langle h_i, x \rangle \le g_i\}$, $i \in N_q$, для произвольного $x^s \in R^n$ определим множества $N^a(x^s) = \{i \in N_q \mid \langle h_i, x^s \rangle = g_i\}$ и $N^n(x^s) = \{j \in N_q \mid \langle h_j, x^s \rangle < g_j\}$ — соответственно активных и неактивных ограничений в точке x^s; $h_i \in R^n$, $g_i \in R$, $i \in N_q$, — соответственно i-я вектор-строка матрицы H и i-я компонента вектора g.

Введем в рассмотрение задачу

$$Z(F, G^s): \max\{F(x) \mid x \in G^s\},$$
$$\text{где } G^s = \{x \in R^n \mid \langle h_i, x \rangle \le g_i,\ i \in Q_s \subset N_q\},$$

Q_s — множество индексов ограничений, описывающих допустимую область задачи $Z(F, G^s)$, которая решается на s-м шаге алгоритма, $Q_s = N_q \setminus R_s$; R_s — множество номеров ограничений, которые не были включены в эту задачу на s-м шаге.

Определение 2. Величина $r_i(x) = \langle h_i, x \rangle - g_i$, $i \in N_q$, называется отклонением точки $x \in R^n$ от границы множества G_i, а величина $r(x) = \max\{r_i(x) \mid i \in N_q\}$ — отклонением точки $x \in R^n$ от границы множества G.

Очевидно, что для $i \in N_p$

$$r_i(x) = \sum_{j=1}^{i} x_{\alpha_j} - \sum_{j=1}^{i} a_j, \tag{19}$$

а для $i \in N_q \setminus N_p$ имеем

$$r_i(x) = \langle b_i, x \rangle - d_i, \tag{20}$$

где b_i — i-я вектор-строка матрицы B, $d_i \in R$.

Теорема 5. Эффективное (Парето-оптимальное, слабо эффективное, строго эффективное) решение x_0 задачи $Z(F, G^s)$ является эффективным в том же смысле решением задачи $Z(F, G)$ тогда и только тогда, когда выполняется условие $r(x) \le 0$.

Доказательство. Необходимость этого утверждения очевидна, поскольку допустимое решение x_0 задачи $Z(F, G^s)$ является допустимым решением задачи $Z(F, G)$ тогда и только тогда, когда выполняется условие $r(x) \le 0$. Достаточность утверждения следует из построения задачи $Z(F, G)$ и определения $r(x)$.

Основная идея предлагаемого метода решения задачи $Z(F, X)$ состоит в следующем.

1. Сводим многокритериальную задачу $Z(F, G)$ к однокритериальной задаче $Z(f, G)$ методом линейной свертки. Полагаем $s = 0$.

2. Выбираем ограничения начальной системы, которая определяет область $G^s \subset G$, решаем задачу $Z(f, G^s)$ с помощью симплекс-метода и находим оптимальное решение x^s.

3. Если полученное оптимальное решение является перестановкой, т.е. вершиной перестановочного многогранника Π, то в найденной точке x^s проверяем выполнение ограничений, которые не были учтены. Очевидно, ими могут быть лишь те ограничения, которые описывают выпуклое многогранное множество D. Если решение x^s не удовлетворяет этим ограничениям (дополнительным), то следует добавить к ограничениям допустимой области задачи $Z(f, G^s)$ наиболее нарушенное из ограничений многогранного множества D. Если решение x^s удовлетворяет указанным ограничениям, то оно является эффективным решением задачи $Z(F, G)$ и, следовательно, задачи $Z(F, X)$.

4. Если полученное решение x^s не является перестановкой, то строим отсечение, проходящее через смежные вершины и отсекающее вершину, которая не является допустимой (перестановкой). Прибавляем это отсечение к ограничениям задачи $Z(f, G^s)$.

5. Сравниваем значение $f(x^s)$ со значением целевой функции, найденным на предыдущем шаге. Если оно уменьшается, то исключаем неактивные (несущественные) ограничения в точке x^s. Если значение $f(x^s)$ не изменяется, то никакие ограничения не исключаем. С измененной описанным образом допустимой областью задачи $Z(f, G^s)$ переходим к пункту 2 для решения этой задачи.

То обстоятельство, что ни одно из ограничений не отбрасывается, если $f(x^s)$ остается равным предыдущему значению, гарантирует решение только конечного числа задач вида $Z(f, G^s)$.

Общая идея предложенного метода состоит в последовательном включении ограничений задачи, описывающих область допустимых решений. Реализация метода в виде алгоритма описана ниже.

Для проверки принадлежности точки множеству перестановок $P_{nk}(A)$ целесообразно воспользоваться следующими теоремами [9, 10].

Теорема 6. Если $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — точка, координаты которой упорядочены следующим образом: $x_{\alpha_j} \le x_{\alpha_{j+1}}$ $\forall j \in N_{n-1}$, и выполняется ограничение

$$x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + \ldots + x_{\alpha_i} \ge a_1 + a_2 + \ldots + a_i,$$

принадлежащее i-й группе неравенств системы (7), (8), то в точке x выполняются и все остальные неравенства i-й группы этой системы.

Теорема 7. Точка $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ тогда и только тогда является вершиной перестановочного многогранника $\Pi_{nk}(A)$, когда выполняются следующие условия:

$$\{\alpha_1^1\} \subset \{\alpha_1^2, \alpha_2^2\} \subset \ldots \subset \{\alpha_1^{n-1}, \ldots, \alpha_{n-1}^{n-1}\} \subset \{\alpha_1^n, \ldots, \alpha_n^n\} = N_n,$$

$$\sum_{t=1}^{i} x_{\alpha_t^i} = \sum_{t=1}^{i} a_t \quad \forall i \in N_n.$$

Сформулированные выше теоремы дают возможность при реализации алгоритма для решения задачи $Z(F, X)$ минимизировать затраты времени на проверку принадлежности найденной точки комбинаторным ограничениям и уменьшить количество ограничений в исходной системе.

Предложенный алгоритм можно использовать для решения задачи $Z(F, G)$ без учета всех ее ограничений.

Перейдем к изложению алгоритма решения.

5. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ НА ПЕРЕСТАНОВКАХ

Начальный шаг

Полагаем $s = 0$. Сведем многокритериальную комбинаторную задачу $Z(F, G)$ к однокритериальной с помощью линейной свертки: задаем весовые неотрицательные коэффициенты λ_j, $j \in N_l$, которые определяют степень важности каждого критерия, и максимизируем линейную комбинацию целевых функций, т.е. решаем задачу

$$Z(f, G^s)\colon \ \{\max \ f(x) = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \ \langle c_i, x \rangle \mid \lambda_i \geq 0, \ i \in N_l, \ \sum_{i=1}^{l} \lambda_i = 1, \ x \in G^s\}.$$

В случае, если какой-либо из коэффициентов $\lambda_i = 1$, а все другие $\lambda_j = 0$, $i \neq j$, $i, j \in N_l$, то рассматривается однокритериальная задача с i-й целевой функцией. При первом выполнении этого шага полагаем $G^s = R^n$ и $\bar{f} = \infty$.

Основная часть

1. Выбираем начальную точку x^s произвольным образом, как элемент общего множества перестановок, либо согласно утверждению 2, упорядочивая коэффициенты $\lambda_i \cdot c_i$, $i \in N_l$, целевой функции $f(x) = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \ \langle c_i, x \rangle$, вычисляем значение $\bar{f} = f(x^s)$.

2. Опишем ограничения, соответствующие точке x^s и определяющие вершину общего перестановочного многогранника $\Pi_{nk}(A)$, $x^s \in \Pi^s_{nk}(A)$, $\Pi^s_{nk}(A) \Leftrightarrow \Pi_{nk}(A)$. Полагаем $Q_s = N_p$.

3. Находим отклонения $r_i(x^s)$ $\forall \ i \in R_s = N_q \setminus Q_s$ по формулам (19), (20).

4. Выбираем $r(x^s) = \max \{r_i(x^s) \mid i \in R_s\}$ и номер $i_s \in R_s$, при котором достигается максимум.

5. Проверяем неравенство $r(x^s) \leq 0$. Если $r(x^s) > 0$, то переходим к следующему пункту алгоритма, иначе — находим эффективное решение задачи $Z(F, X)$. Для нахождения следующего эффективного решения переходим на начальный шаг алгоритма, задав другие весовые коэффициенты λ_j, $\lambda_j \geq 0$, $j \in N_l$, $\sum_{j=1}^{l} \lambda_i = 1$.

6. Прибавляем полученное ограничение с номером $i_s \in R_s$ к ограничениям задачи $Z(f, G^s)$, т.е. формируем допустимое множество подзадачи $Z(f, G^s)$ следующим образом:

$$G^{s+1} = G^s \mid \{x \in R^n \mid \langle h_{i_s}, x \rangle \leq g_{i_s}\}. \qquad (21)$$

7. Если

$$f(x^s) < \bar{f}, \qquad (22)$$

то определяем множество $N^{n}(x^{s}) \subset Q_s$ и заменяем множество Q_s на $Q_s \setminus N^{n}(x^{s})$, полагаем $\bar{f} = f(x^{s})$, $s = s+1$.

8. Решаем задачу

$$Z(f, G^{s}): \max\left\{ f(x) = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \left\langle c_i, x \right\rangle \mid x \in G^{s} \right\}$$

двойственным симплекс-методом. Если эта задача не имеет решений, то неразрешима и задача $Z(F, G)$. Иначе получаем оптимальное решение x^{s} этой задачи. Если оно не является элементом общего множества перестановок $P_{nk}(A)$, то переходим к п. 8. Иначе, полагая $Q_s = N_p$, переходим к п. 3 алгоритма.

9. Находим смежные с точкой x^{s} вершины перестановочного многогранника и строим отсечение, проходящее через эти вершины, вида

$$\left\langle h_i, x \right\rangle \le g_i, \tag{23}$$

которому не удовлетворяет полученная точка x^{s}. Формируем систему ограничений, описывающую множество G^{s}, по формуле (21) и переходим к п. 7.

Замечание 1 (к п. 7 алгоритма). Если x^{s} является элементом общего множества перестановок $P_{nk}(A)$, то к множеству $N^{n}(x^{s})$ неактивных ограничений, которые исключаются из множества Q_s, следует отнести все ограничения многогранника $\Pi_{nk}(A)$, кроме тех, которые определяют точку x^{s}.

Замечание 2 (к п. 9 алгоритма). Рассмотрим более детально определение смежной вершины и построение отсечения.

Согласно теории линейного программирования [15] на основании симплекс-таблицы, которая определяет некоторую вершину x^{s} многогранника решений, для получения смежной с ней вершины необходимо выбрать небазисную переменную x_j в задаче линейного программирования, вектор P_j которой имеет хотя бы одну положительную компоненту, выбрать t-ю строку симплекс-таблицы из условия

$$\frac{g_t}{h_{ij}} = \min_{i:\, h_{ij} > 0} \frac{g_i}{h_{ij}} = \Theta_j, \tag{24}$$

где h_{ij} — коэффициенты при неизвестных x_j в строке i; g_i — свободный член в соответствующих ограничениях задачи линейного программирования $Z(f, G)$. Далее нужно ввести в базис вектор P_j вместо P_t, получив симплекс-таблицу для некоторой смежной с x^{s} вершины.

Построение отсечений [11]. Обозначим J совокупность номеров небазисных переменных, для которых можно определить соотношение (24), а I — множество номеров базисных переменных. На основе последней симплекс-таблицы задачи линейного программирования запишем ограничение, которое определяется базисной переменной (с номером i),

$$x_i + h_{i,(\beta+1)} x_{j_1} + \ldots + h_{i,(\beta+\gamma)} x_{j_\gamma} = g_i ,$$

где $i \in I$, $\beta = |I|$, $\gamma = |J|$, $I \cup J = N_{n+1}$, $\beta + \gamma = n+1$, $j_\tau \in J \ \forall \tau \in N_\gamma$.

Пусть $x^{*} = (x_1^{*}, \ldots, x_n^{*})$ — оптимальное решение задачи линейного программирования, которому соответствует последняя симплекс-таблица. Как известно [15], если j_τ ($j_\tau \in J \ \forall \tau \in N$) — номера небазисных переменных в решении задачи линейного программирования $Z(f, G^s)$, а величина Θ_j вычисляется по формуле (24), то все смежные с x^* вершины допустимой области удовлетворяют неравенство

$$\frac{x_{j_1}}{\Theta_{j_1}} + \frac{x_{j_2}}{\Theta_{j_2}} + \ldots + \frac{x_{j_\gamma}}{\Theta_{j_\gamma}} \geq 1 \qquad (25)$$

как равенство, а точка x^* неравенству (25) не удовлетворяет.

Согласно изложенному выше строим отсечение (23) в виде (25). Гиперплоскость, являющаяся границей отсечения (25), проходит через смежные вершины к отсекаемой точке x^*. Построенная гиперплоскость пересекает грани допустимой области G^s только по ее вершинам. Таким образом, новых вершин в области не образуется, а число вершин области уменьшается на одну.

Теорема 8. Работа алгоритма заканчивается после решения конечного числа подзадач $Z(f, G^s)$ и приводит к эффективному решению задачи $Z(F, X)$ или к построению такого множества ограничений, при котором текущая подзадача $Z(f, G^s)$ будет неразрешимой.

Доказательство. Так как X — конечное множество, то оно имеет конечное число подмножеств. При уменьшении значения целевой функции $f(x) = \max \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \langle c_i, x \rangle$ от одного шага к другому ни одно подмножество не может повториться. Поскольку ни одно ограничение не отбрасывается, если $f(x^s) = \bar{f}$, и в крайнем случае одно или два ограничения добавляются, то значения $f(x^s)$ могут оставаться постоянными лишь на протяжении конечного числа итераций. Итак, за конечное число шагов процедура заканчивается.

Отметим, что метод решения задачи на перестановках не дает ответа на вопрос, является ли найденное решение строго эффективным. Это можно проверить, пользуясь соотношением (17).

6. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕКОТОРЫХ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ

Задача 1 (максимизация скорости передачи информации и качества отображения). Рассмотрим систему, которая осуществляет накопление информации по предметным областям (портал) и перемещение информации на персональные компьютеры (серверы, рабочие станции, терминалы и др.). Имеем m предметных областей $A_i, i \in N_m$, в каждой из которых накоплено определенное количество единиц информации a_i^k k-го вида, $k \in N_p$, $a_i^k \in A$, т.е. a_i^k является элементом мультимножества $A = \{a_1, \ldots, a_s\}$, $s = mp$. Информация распределяется между n персональными компьютерами B_j, $j \in N_n$, на каждом из которых выделено не меньше, чем b_j^k единиц информации определенной предметной области k-го вида. Скорость передачи единицы k-го вида информации из A_i, $i \in N_m$, определенной предметной области на персональных компьютерах B_j, $j \in N_n$, равна θ_{ij}^k, а коэффициент качества представления единицы k-го вида информации определенной предметной области A_i, $i \in N_m$, при условии, что она отображается качественно на персональных компьютерах B_j, $j \in N_n$, равен d_{ij}^k.

Необходимо определить такой план передачи и загрузки объема x_{ij}^k информации k-го вида, $k \in N_p$, из предметных областей A_i, $i \in N_m$, на персональные компьютеры B_j, $j \in N_n$, чтобы суммарные скорости передачи были максимальными и максимизировался суммарный качественный коэффициент загрузки.

Математическая модель. Требуется определить

$$f_1(x) = \max \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij}^k \, x_{ij}^k \;, \; f_2(x) = \max \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij}^k \, x_{ij}^k$$

при комбинаторных условиях, которые учитывают перестановочные свойства области допустимых решений задачи

$$x = (x_{11}^1, \ldots, x_{1n}^1, \ldots, x_{1p}^p, \ldots, x_{mp}^p) = (x_1, \ldots, x_s) \in P_{s\eta}(A),$$

и ограничениях на объемы загрузки определенного вида информации на каждый персональный компьютер $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^k \le b_j^k$, $j \in N_n$, $k \in N_p$.

Задача 2 (вычисления на суперкомпьютере). Рассмотрим кластерный суперкомпьютер, который осуществляет большой объем параллельных вычислений по определенным программам. Основными характеристиками кластера будем считать производительность процессора и оперативную память. Определенные программы требуют для обработки данных соответствующий объем оперативной памяти и скорость выполнения. Необходимо так распределить программы по кластерам, чтобы общая производительность и загруженность кластерного суперкомпьютера были максимальными и каждая программа выполнялась на отдельном кластере.

Математическая модель. Пусть имеем кластерный суперкомпьютер, который состоит из m кластеров A_i, каждый из которых характеризуется объемом оперативной памяти или производительностью (тактовой частотой) a_i, $i \in N_m$. Требуется одновременно загрузить на выполнение n программных комплексов B_j, $j \in N_n$, каждый из которых характеризуется объемом оперативной памяти или скоростью выполнения b_j.

Производительность p_{ij}^k, $i \in N_m$, $j \in N_n$, кластерного суперкомпьютера определяется количеством операций, осуществленных за секунду каждым процессором соответствующих кластеров при выполнении k-й программы j-го программного комплекса.

Занятым будем называть i-й кластер при выполнении k-й программы j-го программного комплекса, загруженный на 100%. Тогда загруженность определяется как разность $d_{ij}^k = 100 - d_{ij}^з$, где $d_{ij}^з$ — текущая занятость кластера (в процентах) при выполнении k-й программы j-го программного комплекса на i-м кластере, $i \in N_m$, $j \in N_n$.

Переменная x_{ij}^k, $k \in N_p$, $i \in N_m$, $j \in N_n$, характеризует объем оперативной памяти, необходиой для выполнения k-й программы j-го программного комплекса на i-м кластере, и может принимать любое значение из мультимножества A, где $A = \{a_1, \ldots, a_s\}$, $s = pmn$; $P_{s\eta}(A)$ — общее множество перестановок всех элементов из мультимножества A, где η — число различных элементов A. Отметим, что некоторые элементы A могут быть нулевыми.

Математическая модель задачи может быть представлена следующим образом:

максимизировать загруженность работы компьютера

$$f_1(x) = \max \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij}^k \, x_{ij}^k$$

и производительность

$$f_2(x) = \max \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^k \, x_{ij}^k$$

при ограничениях на размеры оперативной памяти загруженных программ по каждому программному комплексу и каждому кластеру $\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} x_{ij}^k \le b_j$, $j \in N_n$, $\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} x_{ij}^k \le a_i$, $i \in N_m$.

Данная модель обеспечивает максимальное использование ресурсов кластерного суперкомпьютера.

Пример. Пусть действующий кластерный суперкомпьютер для параллельных вычислений состоит из трех кластеров с определенными характеристиками (табл. 1). Необходимо одновременно загрузить на выполнение три программы, которые требуют 80, 35 и 95 Гб оперативной памяти.

Таблица 1

Номер кластера	Оперативная память, Гб	Производительность, Гфлоп/с	Занятость кластера на текущий период, %
1	100	4.2	20
2	150	2.2	40
3	70	1.2	50

Решение. Возможная загруженность кластеров будет составлять соответственно 80, 60 и 50%. Составим модель задачи:

$$\max F_1 = 4,2x_1 + 2,2x_2 + 1,2x_3,$$

$$\max F_2 = 0,8x_1 + 0,6x_2 + 0,5x_3,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 100 + 150 + 70.$$

Рассмотрим множество $A = \{35; 80; 95\}$. Очевидно, что перестановка $x = (x_1, x_2, x_3) = (95, 80, 35)$ является оптимальным решением задачи со значениями частичных критериев, равными

$$\max F_1 = 4,2 \cdot 95 + 2,2 \cdot 80 + 1,2 \cdot 35 = 617,$$

$$\max F_2 = 0,8 \cdot 95 + 0,6 \cdot 80 + 0,5 \cdot 35 = 141,5.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье исследованы сложные комбинаторные многокритериальные задачи на множестве перестановок. Рассмотрены некоторые свойства допустимой области комбинаторной многокритериальной задачи, погруженной в арифметическое евклидово пространство. Построен и обоснован метод решения сформулированных задач. Предложенный подход может применяться для решения многокритериальных задач на комбинаторном множестве перестановок. Программная реализация данного подхода предоставляет возможность исследовать и найти элементы множества Парето-оптимальных решений многокритериальных комбинаторных задач с учетом других комбинаторных свойств области допустимых решений.

Дальнейшее развитие данной работы будет направлено на реализацию и адаптацию предложенного алгоритма, а также на разработку новых методов решения векторных задач комбинаторной оптимизации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. — Киев: Наук. думка, 1988. — 472 с.
2. Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. — Киев: Наук. думка, 1981. — 287 с.
3. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. — Киев: Наук. думка, 1995. — 170 с.
4. Сергиенко И.В., Лебедева Т.Т., Семенова Н.В. О существовании решений в задачах векторной оптимизации //Кибернетика и системный анализ. — 2000. — № 6. — С. 39–46.
5. Лебєдєва Т.Т., Семенова Н.В., Сергієнко Т.І. Умови оптимальності та розв'язуваності в задачах лінійної векторної оптимізації з опуклою допустимою множиною // Доп. НАНУ. — 2003. — № 10. — С. 80–85.
6. Сергиенко И.В., Рощин В.А., Семенова Н.В. Некоторые задачи целочисленного программирования с неоднозначно заданными данными и их решение // Проблемы управления и информатики. — 1998. — № 6. — С. 116–123.
7. Лебедева Т.Т., Семенова Н.В Сергиенко Т.И. Устойчивость векторных задач целочисленной оптимизации: взаимосвязь с устойчивостью множеств оптимальных и неоптимальных решений // Кибернетика и системный анализ. — 2005. — № 4. — С. 90–100.
8. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. — М.: Наука, 1982. — 256 с.
9. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. — Киев: Наук. думка, 1986. — 265 с.
10. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. — К.: Ін-т систем. досліджень освіти, 1993. — 188 с.
11. Ємець О. О., Колєчкіна Л.М. Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями. — К.: Наук. думка. — 2005. — 118 с.
12. Рощин В.А., Семенова Н.В., Сергиенко И.В. Вопросы решения и исследования одного класса задач неточного целочисленного программирования // Кибернетика. — 1989. — № 2. — С. 42–47.
13. Рощин В.А., Семенова Н.В., Сергиенко И.В. Декомпозиционный подход к решению некоторых задач целочисленного программирования с неточными данными // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1990. — **29**, № 5. — С. 786–791.
14. Лэсдон Л.С. Оптимизация больших систем. — М.: Мир, 1975. — 432 с.
15. Ермольев Ю.М., Ляшко И.И., Михалевич В.С., Тюптя В.И. Математические методы исследования операций. — Киев: Вища школа, 1979. — 312 с.

Поступила 11.01.2008