



## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ГЕОИНФОРМАТИКИ. III. НЕЧЕТКИЕ СРАВНЕНИЯ И РАСПОЗНАВАНИЕ АНОМАЛИЙ НА ВРЕМЕННЫХ РЯДАХ<sup>1</sup>

**Ключевые слова:** запись, нечеткая логика, выпрямление, активность, сигнал.

### 1. ДИСКРЕТНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

В изучении данных, представленных временными рядами, выделяются две последовательные задачи: выделение сигнала на фоне шума и распознавание аномальных участков выделенного сигнала.

Настоящая статья посвящена второй задаче, которая является важной в исследованиях, связанных с ретроспективным анализом и оценкой возможного возникновения различных природных явлений (землетрясение, извержение вулканов, магнитные бури и т.д.). Исходной информацией при этом являются наблюдаемые временные ряды геофизических данных [19–22]. Эта работа продолжает цикл статей [1–10], в которых описывается разработанный авторами новый подход к исследованию аномалий (зон повышенной активности). В этом подходе используется попытка моделирования дискретных аналогов таких фундаментальных понятий математического анализа, как предел, непрерывность, гладкость, связность и монотонность, экстремум, перегиб, выпуклость и т.д. Это дает основание прибегнуть к термину «дискретного математического анализа» (ДМА) в обоснованиях построенных ниже новых алгоритмов.

Отправной точкой такого моделирования служит достаточно «мягкий» (в понимании Заде [24]) характер восприятия человеком свойств дискретности. Действительно, опытный исследователь, как правило, эффективно кластеризует, выделяет сгущения, трассирует, находит аномалии в двух-трехмерных массивах и на временных рядах небольших объемов. Задача ДМА — перенести выполнение этих операций на большие размерности и большие объемы обрабатываемых данных. Технической основой ДМА служат нечеткая математика и нечеткая логика, обладающие выразительными возможностями для перевода человеческих представлений и рассуждений на формально-компьютерный язык.

На рис. 1 представлена схема нашего подхода к построению ДМА. Три верхних блока схемы относятся к формальным основам ДМА и завершаются определением конечного предела. Отметим, что введенное определение конечного предела мы считаем, естественно, только одним из возможных. Конструкция плотности на его основе дает возможность ввести новую интерпретацию понятий сгущения, кластера и трассы в многомерных дискретных пространствах. На их поиск и построена представленная на схеме (левая ветвь) первая серия алгоритмов ДМА: «Кристалл», «Монолит», «Роден», «Трассирование» [10, 1–3]. Остальные ветви схемы ДМА относятся к конечным временным рядам (КВР) и образуют вторую серию алгоритмов «Равновесие», «Прогноз», DRAS, FLARS, алгоритмы поиска нечетких

<sup>1</sup>Начало в № 2, 2002 г.; в № 4, 2003 г.

монотонностей, экстремумов, морфологический анализ КБР: алгоритм «Геометрические меры» [4–9]. К этой серии относятся также алгоритмы FCARS, впервые описанные в данной статье. Таким образом, ДМА является единой основой большой серии алгоритмов, имеющих достаточно универсальный характер. Ниже будем отождествлять ДМА с алгоритмами, представленными на рис. 1.

К настоящему моменту ДМА имеет важные геолого-геофизические и геодинамические приложения [1, 3, 7–9], которые включают изучение аномалий на сейсмических, геоэлектрических, геомагнитных и гравитационных записях, поиск магнитных аномалий, мониторинг вулканов, геодинамические приложения, геоэкологические исследования мест возможного захоронения радиоактивных отходов. В то же время сфера приложений ДМА существенно шире. Так, описанные ниже алгоритмы могут быть использованы в анализе временных рядов самой различной природы.

Блоки схемы ДМА, представленные на рис. 1, развертываются в серии алгоритмов, объединенных единым названием. Например, в блоке «Кластеризация» название «Роден» объединяет целую систему алгоритмов, включающую глобальную, локальную, нечеткую и обобщенные версии этого алгоритма. В блоке «Выделение плотных подмножеств» алгоритм «Кристалл» имеет глобальную, локальную и нечеткую версии [2, 10]. Одна из целей настоящей работы — представить аналогичную динамику развертывания алгоритмов в блоке «Аномалии на временных рядах». Алгоритмы блока DRAS (Difference Recognition Algorithm for Signals) и FLARS (Fuzzy Logic Algorithm for Recognition of Signals), введенные в [4, 6], развиваются в настоящей работе в алгоритм FCARS (Fuzzy Comparison Algorithm for Recognition of Signals). В свою очередь, последний послужил основой для алгоритма FCARSr, который ориентирован на обработку временных рядов в режиме реального времени.

## 2. ОБНАРУЖЕНИЕ АНОМАЛИЙ

Дадим краткий обзор реально действующих (в основном в сейсмологии) систем обнаружения аномалий [11] с целью позиционирования по отношению к включенным в обзор системам алгоритмов ДМА — DRAS и FLARS [4, 6]. Согласно [11] полный цикл процедуры обнаружения аномалий на записи подразделяется на три этапа: предобнаружение, обнаружение (детектирование) и обработка обнаруженной аномалии. При этом алгоритмы выделения аномалий преимущественно основываются на сочетании статистического подхода и спектрально-вре-

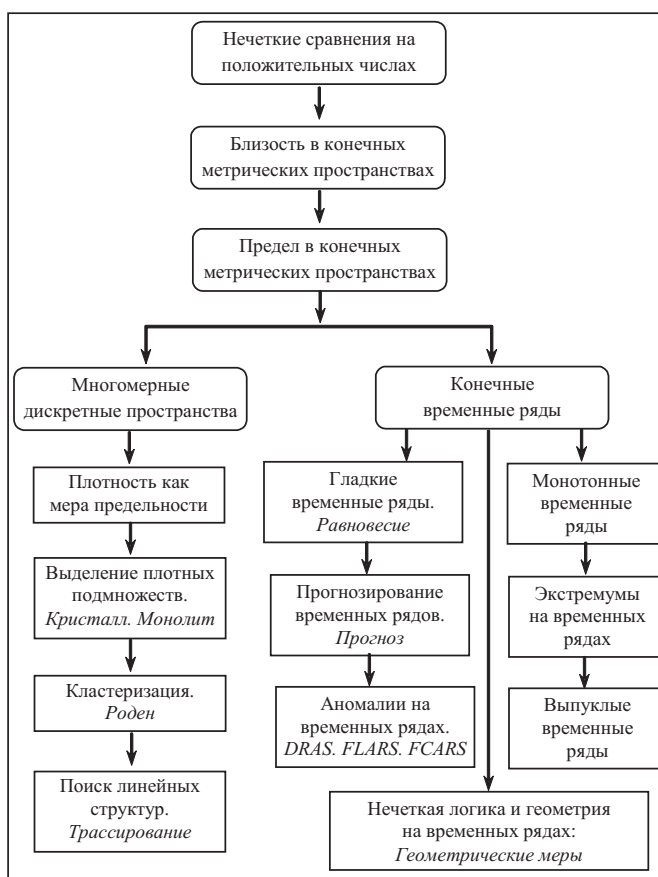


Рис. 1. Схема построения ДМА

менного анализа (СВАН) — раздела статистического анализа, целью которого является исследование частотных характеристик стационарного случайного процесса с дискретным временем или временного ряда. СВАН основывается на разнородной спектральной, асимптотической и функциональной технике, которая во многих ситуациях жестко привязана к физической сущности изучаемых явлений и поэтому весьма наглядна [23]. Остановимся кратко на некоторых системах обнаружения аномалий.

**Система SESMO1** [12]. Она предназначена для обнаружения короткопериодных сейсмических аномалий в режиме реального времени во временной и частотной областях. Алгоритм использует восемь полосовых фильтров Баттеруорта, охватывающих с перекрытием всю полосу частотной характеристики аномалии. При этом используется трехкомпонентный поляризационный анализ.

**АРСС-модели** [13]. Алгоритм такого детектора строится на основе авторегрессионного описания (АРСС-модели) сейсмических аномалий и помех. Этот тип алгоритмов обнаружения аномалий основан на использовании адаптивных и согласующих фильтров. Фильтрация состоит в непрерывном анализе шума. Соответственно делается прогноз характера данных, которые должны быть зарегистрированы в последующий момент. Если накопленный к настоящему времени прогноз о шумах не сбывается, то делается предположение, что зарегистрирована полезная аномалия.

**Максимальное правдоподобие** [13]. Сложными для использования в режиме реального времени являются методы обнаружения аномалий, основанные на применении фильтров максимального правдоподобия. В этом случае обнаружение проводится с учетом непрерывного оценивания в режиме реального времени спектральных свойств шума при условии, что параметры аномалии либо неизвестны, либо известны недостаточно полно.

**Распознавание с обучением** [14]. Для обнаружения локальных и региональных аномалий малой амплитуды из определенного района проводится СВАН-анализ аномалий и по их совокупности составляется набор характерных «масок». Обнаружение новой аномалии из данного района проводится путем ее сопоставления с имеющимися «масками». Делается это по величине когерентности на нескольких уровнях по мощности сигналов.

**Нейронные сети** [15]. Данный подход состоит в моделировании возможностей исследователя с помощью специально построенной нейронной сети, представляющей собой многослойный перцептрон. В качестве входных параметров в нем использовались средние абсолютные значения спектральных амплитуд сейсмических колебаний в девяти частотных полосах. На выходе классифицируются обнаруженные аномалии на локальные, региональные, телесеismicкие и различные помехи.

### 3. ОБНАРУЖЕНИЕ АНОМАЛИЙ НЕЧЕТКИМИ МЕТОДАМИ

Созданные в рамках ДМА алгоритмы DRAS и FLARS [4, 6] в отличие от перечисленных в разд. 2 имеют иной подход к моделированию рассуждений и действий человека при поиске аномалий. Алгоритмы DRAS и FLARS — это попытка моделирования логики интерпретатора, распознающего визуальную аномалию на записи, с целью ее дальнейшего автоматизированного использования для анализа больших массивов данных, не поддающихся ручной обработке. Эти алгоритмы дают оценку границ искомым аномалиям и осуществляют их морфологический разбор в виде начальной, центральной и конечной стадий с выделением сильных и слабых фаз в центральной стадии [4]. Достаточная «гибкость» алгоритмов обеспечивается посредством широкого набора «выпрямлений» [4, 6], возникающих при моделировании работы интерпретатора.

Работу интерпретатора, визуально определяющего аномалию на записи, мы рассматривали, исходя из следующего понимания такой логики. Сначала интерпретатор «скользит» взглядом по записи, оценивая для себя в терминах положительных чисел активность ее небольших одинаковых фрагментов. При этом выработанные числовые оценки «мысленно» присваиваются центрам этих фрагментов записи. Так, от исходной записи интерпретатор переходит к неотрицательной функции,

которую естественно назвать выпрямлением записи. Действительно, ее точкам, более активным относительно искомым сигналам, будут соответствовать большие значения этой функции (выпрямления). Далее поиск интерпретатором аномалий на записи сводится к поиску возвышенностей на ее выпрямлении, отвечающим наиболее активным участкам записи. Таким образом, интерпретатор работает на двух уровнях: локальном — выпрямлении записи и глобальном — поиске возвышенностей на выпрямлении.

Естественно, предложенная упрощенная модель логики интерпретатора не может рассматриваться, как единственная и/или универсальная. Кроме того, рассуждения интерпретатора во многом определяются тем конкретным типом аномалий (данных), которые он рассматривает. Представляется, однако, что процесс выпрямления в той или иной форме оказывается «задействованным» в любом случае.

**3.1. Локальный уровень: построение выпрямления записи.** Аномалия на записи — понятие неоднозначное, видоизменяющееся как от одной записи к другой, так и в рамках одной записи. Как и для других интуитивно ясных математических понятий (например, элемент множества) мы не пытаемся дать строгого определения аномалии. Аномальность определяется исходя из примеров, которые даются экспертами. В рамках ДМА для адекватного моделирования аномалий (зон повышенной активности) применяется открытый к пополнению набор «выпрямлений». Перейдем к точным конструкциям.

Пусть даны дискретная положительная полуось  $\mathbb{R}_h^+ = \{kh, h > 0, k = 1, 2, \dots\}$  и КВР  $y = \{y_k = y(kh)\}$ , определенный на отрезке (периоде регистрации)  $T \in \mathbb{R}_h^+$ . Введем параметр локального обзора  $\Delta > 0$ , кратный  $h$ :  $\Delta \in \mathbb{R}_h^+$ . Назовем фрагментами локального обзора записи  $y$  с центром в  $kh \in T$  ее отрезок

$$\Delta^k y = \{y_{k-\Delta/h}, \dots, y_k, y_{k+\Delta/h}\} \in \mathbb{R}^{2\Delta/h+1}.$$

**Определение 1.** Если  $J = \{\Delta^k y\}$  — совокупность фрагментов локального обзора записи  $y$  и  $\Phi: J \rightarrow \mathbb{R}^+$ , где  $\mathbb{R}^+$  — множество положительных действительных чисел, то суперпозицию  $k \rightarrow \Delta^k y \rightarrow \Phi(\Delta^k y) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_y(k)$  назовем выпрямлением  $y$  на основе  $\Phi$ . Собственно отображение  $\Phi$  будем называть выпрямляющим функционалом.

Выпрямление можно считать определенным удачно, если объявляемые интерпретатором аномалии на записи переходят в возвышенности на выпрямлении. Соответственно для построения выпрямления крайне полезным оказывается наличие материала обучения, т.е. обработки достаточно длительной части записи экспертом.

Рассмотрим примеры выпрямлений.

1. Длина фрагмента обзора:

$$L(\Delta^k y) = \sum_{j=k-\Delta/h}^{k+\Delta/h-1} |y_{j+1} - y_j|.$$

2. Энергия фрагмента обзора:

$$E(\Delta^k y) = \sum_{j=k-\Delta/h}^{k+\Delta/h} (y_j - \bar{y}_k)^2,$$

где  $\bar{y}_k = \frac{h}{2\Delta+h} \sum_{j=k-\Delta/h}^{k+\Delta/h} y_j.$

Многие другие типы выпрямлений использованы в [4, 6, 7]. Единый локальный уровень алгоритмов семейств DRAS и FLARS состоит в построении выпрямления  $\Phi_y$  и переходе к нему от записи  $y$ . Это преобразование моделирует первый этап анализа, проводимого интерпретатором. На рис. 2, а приведен график зависимости записи естественного электрического потенциала от времени  $t$  в окрестности вулкана Ла Фурнез (остров Реюньон, Франция, 8–9 марта 1998 года), на рис. 2, б — график ее вы-

прямления с помощью выпрямляющего функционала «энергия»  $E(\Delta^k y)$ , а на рис. 2, в — график ее выпрямления с помощью выпрямляющего функционала «длина»  $L(\Delta^k y)$ .

**3.2. Глобальный уровень: поиск возвышенностей на выпрямлении.** Примеры показывают, что рельеф выпрямления может быть достаточно сложным (см. рис. 2, б, в). Аномалии могут не обладать постоянно высокой активностью или быть неоднородными (активных участков больше, но их разделяют «спокойные» точки). В этом случае соответствующие им участки выпрямления представляют собой осциллирующие возвышенности. Естественно, следует искать «платформу», т.е. связанное основание такой возвышенности, и на ней указать искомые «всплески». Для этого необходима более тонкая процедура выделения возвышенностей на  $\Phi_y(k)$ , чем простой выбор по вертикальному уровню. Эта процедура должна сочетать в себе процесс объединения (поиск платформ) и процесс размежевания (обнаружение всплесков внутри платформ). При алгоритмической реализации этой логики на глобальном уровне алгоритмы подразделяются на семейства DRAS и FLARS, при этом возникают различия их конкретных реализаций в рамках каждого семейства.

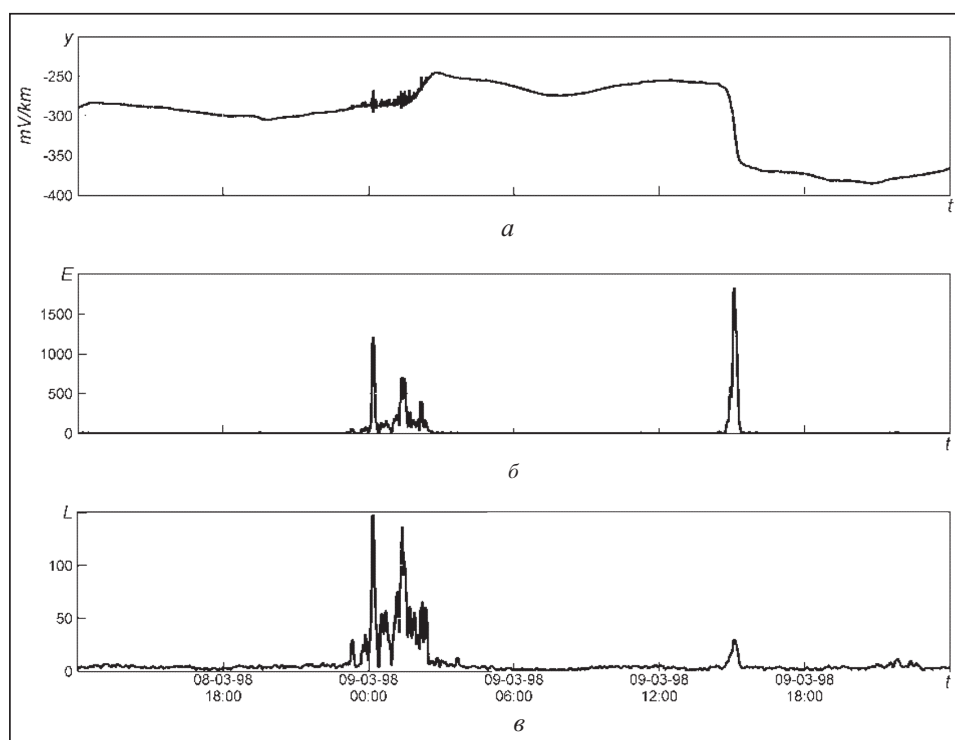


Рис. 2. Примеры выпрямлений записи

**3.3. Алгоритм DRAS: глобальный уровень [4].** Вначале запись делится на фоновую (спокойную) и потенциально-аномальную (неспокойную) части. Связные области в беспокойной части являются основаниями (платформами) возвышенностей. Далее DRAS ищет на платформах заведомо аномальные фрагменты. Для реализации этой процедуры используются односторонние меры фона  $L_\alpha \Phi_y(k)$  и  $R_\alpha \Phi_y(k)$ , характеризующие в шкале отрезка  $[0, 1]$  степень спокойствия выпрямления  $\Phi_y$  слева и справа от точки  $kh$  относительно выходов его ординаты за уровень  $\alpha$  [4]. Здесь  $\alpha$  — свободный параметр алгоритма, называемый вертикальным уровнем фона. Другими словами, спокойствие слева (справа) в точке  $kh$  на записи  $y$  моделируется в алгоритме DRAS как нечеткие подмножества на области регистрации  $T$  с функциями принадлежности  $L_\alpha \Phi_y(k)$  ( $R_\alpha \Phi_y(k)$ ). С помощью их конъюнкции  $\min(L_\alpha \Phi_y(k), R_\alpha \Phi_y(k))$  алгоритм DRAS предусматривает возможность гибкого

отношения к выходам  $\Phi_y$  за уровень  $\alpha$ . При соответствующей настройке так называемого горизонтального уровня  $\beta \in [0, 1]$  он фиксирует только достаточно «массивные» по времени выходы и опускает незначительные, считая их лишь элементами фона. Достигается это путем разбиения периода регистрации  $T$  на фоновую (спокойную)  $B$  и потенциально-аномальную (неспокойную)  $P$  части:  $T = B \cup P$ ,

$$B = \{kh \in T : \min(L_\alpha \Phi_y(k), R_\alpha \Phi_y(k)) \geq \beta\},$$

$$P = \{kh \in T : \min(L_\alpha \Phi_y(k), R_\alpha \Phi_y(k)) < \beta\}.$$

Множество  $P$  является объединением связных компонент  $P_n : P = \bigcup_{n=1}^N P_n$ . С ними и оперирует DRAS на втором этапе глобального уровня. Выделение областей заведомой аномальности  $A_n$  в  $P_n$  происходит на основе мониторинга разности  $D_\alpha \Phi_y(k) = L_\alpha \Phi_y(k) - R_\alpha \Phi_y(k)$ . Это и объясняет название алгоритма DRAS — Difference Recognition Algorithm for Signals (Разностный алгоритм распознавания сигналов). Оператор  $D_\alpha \Phi_y(k)$  рассматривается только на  $P$ . Начало аномалии  $A_n$  лежит в первом положительном максимуме  $D_\alpha \Phi_y(k)$  на  $P_n$ . Действительно, именно в этой точке разница между «спокойствием» записи слева и ее «неспокойствием» записи справа выражена в наибольшей степени. По той же причине конец аномалии  $A_n$  находится в последнем отрицательном минимуме  $D_\alpha \Phi_y(k)$  на  $P_n$ . Такая процедура выделения аномалий  $A_n$  детально описана в [4].

Свободными параметрами алгоритма DRAS являются  $\Phi$  — выпрямляющий функционал и положительные числовые параметры:  $\Delta \ll |T|$  — окно локального обзора,  $\alpha$  — вертикальный уровень фона,  $\Lambda > \Delta$  — окно глобального обзора,  $\beta \in [1/2, 1]$  — горизонтальный уровень фона. Соответственно используется обозначение алгоритма как DRAS( $\Phi, \Delta, \alpha, \Lambda, \beta$ ).

**3.4. Алгоритм FLARS: глобальный уровень** [6]. В отличие от алгоритма DRAS алгоритм FLARS сначала выделяет области заведомой аномальности, а затем «присоединяет» к ним области потенциальной аномальности, формируя тем самым «ореол» выделенной аномалии. Таким образом, FLARS в два этапа осуществляет деление области регистрации записи  $T = A \cup P \cup B$  на три подмножества:  $A$  — аномальные точки,  $B$  — фоновые, спокойные точки, расположенные достаточно далеко от аномалии, и  $P$  — потенциально-аномальные, беспокойные точки, имеющие продолжительный характер (формально не аномальные, но находящиеся достаточно близко к ним и потому «ощущающие их влияние»).

Напомним, что в алгоритме DRAS выбор экстремальных точек происходит на основе анализа вертикального уровня  $\alpha$  непосредственно на выпрямлении  $\Phi_y$ . Алгоритм FLARS опосредованно формирует множество аномальных точек  $A$ , используя метод поиска экстремальных значений на рельефах с помощью нечеткой меры экстремальности  $\mu(k)$ , принимающей значения  $-1 \leq \mu(k) \leq 1$  [6]. Мера  $\mu$  строится по  $\Phi_y$  на основе нечетких сравнений (5) и вертикального уровня экстремальности  $\tau \in [-1, 1]$ . Область  $T$  разбивается на множество заведомо аномальных точек  $A$  и его дополнение  $\bar{A}$ , где  $T = A \cup \bar{A}$ ,  $A = \{kh \in T : \mu(k) > \tau\}$ ,  $\bar{A} = \{kh \in T : \mu(k) \leq \tau\}$ .

Разбиение  $\bar{A} = B \cup P$  неаномальных точек на фоновую и потенциально-аномальную составляющие производится алгоритмом FLARS (как и алгоритмом DRAS) с помощью односторонних знакопеременных мер  $\mathcal{L}_\tau \Phi_y(k)$ ,  $\mathcal{R}_\tau \Phi_y(k)$  и горизонтального уровня фона  $\beta \in [-1, 1]$ :

$$B = \{kh \in \bar{A} : \max(\mathcal{L}_\tau \Phi_y(k), \mathcal{R}_\tau \Phi_y(k)) \leq \beta\},$$

$$P = \{kh \in \bar{A} : \max(\mathcal{L}_\tau \Phi_y(k), \mathcal{R}_\tau \Phi_y(k)) > \beta\}.$$

Заметим, что в силу нормированности  $\mu(k) \in [-1, 1]$  выбор уровня экстремальности  $\tau$  осуществляется алгоритмом FLARS более просто, чем алгоритмом DRAS: обычно  $\tau$  полагается равным 0, 1/2, 3/4. Подробное описание алгоритма FLARS приведено в [6].

Свободными параметрами алгоритма FLARS являются  $\Phi$  — выпрямляющий функционал и положительные числовые параметры:  $\Delta \ll |T|$  — окно локального обзора,  $\Lambda > \Delta$  — окно глобального обзора,  $\tau$  — вертикальный уровень экстремальности. Соответственно используется обозначение FLARS( $\Phi, \Delta, \Lambda, \tau$ ).

#### 4. НЕЧЕТКИЕ СРАВНЕНИЯ

Обычная мера превосходства одного числа над другим в виде их разности во многих случаях оказывается слишком грубой. В частности, алгоритмы ДМА требуют более тонких конструкций сравнения чисел.

**Определение 2.** Нечеткое сравнение  $n(a, b)$  действительных чисел  $a$  и  $b$  измеряет в знакопеременной шкале отрезка  $[-1, 1]$  степень превосходства  $b$  над  $a$ :

$$n(a, b) = \text{mes}(a < b) \in [-1, 1]. \quad (1)$$

Таким образом, роль нечеткого сравнения может выполнять любая функция  $f(a, b)$ ,  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow [-1, 1]$ , возрастающая по  $b$  при фиксированном  $a$  и убывающая по  $a$  при фиксированном  $b$  (возрастание и убывание понимаются при этом в буквальном смысле) с дополнительными граничными условиями

$$\forall a \lim_{b \rightarrow \pm\infty} f(a, b) = \pm 1, \quad \forall b \lim_{a \rightarrow \pm\infty} f(a, b) = \mp 1, \quad \forall a f(a, a) = 0.$$

Действительно, такие функции будут обладать свойствами, которые требуются при сравнении чисел.

Если  $n(a, b)$  — нечеткое сравнение, а  $\psi$  — монотонно возрастающее преобразование отрезка  $[-1, 1]$  в себя, то суперпозиция  $(\psi \circ n)(a, b)$  также будет нечетким сравнением, которое называется вариацией  $n$  с помощью  $\psi$ . Выбор  $\psi$  дает возможность усиливать или ослаблять базовое сравнение  $n$ .

В алгоритмах семейств DRAS и FLARS достаточно использовать нечеткие сравнения, определенные на положительных числах. Действительно, обработка записей этими алгоритмами проводится через их выпрямления, принимающими только положительные значения. Введем следующее семейство базовых нечетких сравнений  $n_\nu(a, b)$ ,  $\nu > 0$ , а также их вариации специального вида  $n_{\gamma, \nu}(a, b)$ .

**Определение 3.** Если  $a, b \in \mathbb{R}^+$ , то:

1) для любого  $\nu > 0$

$$n_\nu(a, b) = \frac{b - a}{(a^\nu + b^\nu)^{1/\nu}};$$

2) для любого  $\gamma \in (-1, 1)$  положим  $n_{\gamma, \nu}(a, b) = \psi_\gamma(n_\nu(a, b))$ , где

$$\psi_\gamma(t) = \begin{cases} \frac{t - \gamma}{1 - \gamma}, & t \in [\gamma, 1], \\ \frac{t - \gamma}{1 + \gamma}, & t \in [-1, \gamma]. \end{cases}$$

Такая вариация корректна:  $n_{0, \nu}(a, b) = \psi_0(n_\nu(a, b)) = n_\nu(a, b)$ . При  $\gamma > 0$  получаем усиление  $n_\nu$ , при  $\gamma < 0$  — наоборот, его ослабление. В дальнейшем под сравнением  $n(a, b)$  понимается какое-либо  $n_{\gamma, \nu}(a, b)$ ,  $\nu > 0$ ,  $-1 < \gamma < 1$ .

Нам потребуется расширение  $n(a, b)$  до понятия нечетких сравнений  $n(a, A)$  и  $n(A, a)$  произвольного числа  $a \geq 0$  с произвольной взвешенной совокупностью чисел  $A = \{(a_i, w_i)\}_1^N$ ,  $a_i \in \mathbb{R}^+$ ,  $0 < w_i$ , — вес  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Такое расширение неоднозначно. Каждый вариант такого расширения дает свою формализацию понятия «большой (малый) относительно  $A$  (по модулю  $A$ )». Здесь  $n(a, A) = \text{mes}(a < A)$  понимается как функция принадлежности на  $\mathbb{R}^+$  к нечеткому понятию «быть малым по модулю  $A$ » и  $n(A, a) = \text{mes}(A < a)$  понимается как функция принадлежности на  $\mathbb{R}^+$  к нечеткому понятию «быть большим по модулю  $A$ ».

В дальнейшем развитии алгоритмических конструкций DRAS и FLARS используем три расширения.

1. Бинарное расширение:

$$n_b(a, A) = \frac{\sum_{i=1}^N n(a, a_i) w_i}{\sum_{i=1}^N w_i} \in [-1, 1], \quad n_b(A, a) = \frac{\sum_{i=1}^N n(a_i, a) w_i}{\sum_{i=1}^N w_i} \in [-1, 1]. \quad (2)$$

2. Гравитационное расширение: пусть  $\text{gr } A$  — центр тяжести совокупности  $A$ , т.е.  $\text{gr } A = \frac{\sum_{i=1}^N a_i w_i}{\sum_{i=1}^N w_i}$ , тогда

$$n_g(a, A) = n(a, \text{gr } A) \in [-1, 1], \quad (3)$$

$$n_g(A, a) = n(\text{gr } A, a) \in [-1, 1].$$

3.  $\sigma$ -расширение: левый момент  $\sigma^l(a, A) = (\sum (a - a_i) w_i : a_i < a)$  есть довод за максимальность  $a$  по модулю  $A$ . Соответственно правый момент  $\sigma^r(a, A) = (\sum (a_i - a) w_i : a_i > a)$  есть довод за минимальность  $a$  по модулю  $A$ . Тогда

$$n_\sigma(a, A) = n(\sigma^l(a, A), \sigma^r(a, A)) \in [-1, 1], \quad (4)$$

$$n_\sigma(A, a) = n(\sigma^r(a, A), \sigma^l(a, A)) \in [-1, 1].$$

Естественно считать, что если выполнение некоторого свойства выражается в шкале  $[-1, 1]$ , то попадание в отрезок  $[1/2, 1]$  ( $[0, 1/2]$ ) означает сильно- (слабо-) экстремальное проявление этого свойства. Исходя из этого, формализуем понятия «большой» и «малый» по отношению к взвешенной совокупности  $A$  (по модулю  $A$ ).

**Определение 4.** Для данной взвешенной совокупности  $A$  на основании данного нечеткого сравнения  $n$  и его расширений  $n(A, a)$ ,  $n(a, A)$  назовем число  $a \geq 0$ :

- 1) сильно- (слабо-) большим, если  $n(A, a) \in [1/2, 1]$  ( $n(a, A) \in [0, 1/2]$ );
- 2) сильно- (слабо-) малым, если  $n(a, A) \in [1/2, 1]$  ( $n(A, a) \in [0, 1/2]$ ).

**Пример.** Мера экстремальности  $\mu(k)$  в алгоритме FLARS (мера FLARS'a) представляется как результат сравнения (2) значения выпрямления  $\Phi_y(k)$  с взвешенной совокупностью  $\text{Im } \Phi_y(k) = \{(\Phi_y(\bar{k}), \delta_k(\bar{k}), \bar{k}) \in T\}$ , где  $\delta_k(\bar{k})$  — модель глобального обзора на отрезке  $[a, b]$  записи  $y$  в точке  $k$ :

$$\mu(k) = n(\text{Im } \Phi_y(k), \Phi_y(k)), \quad (5)$$

где  $\delta_k(\bar{k}) = 1 - \frac{|k - \bar{k}|}{\max(|k - a|, |k - b|) + 1}$ .

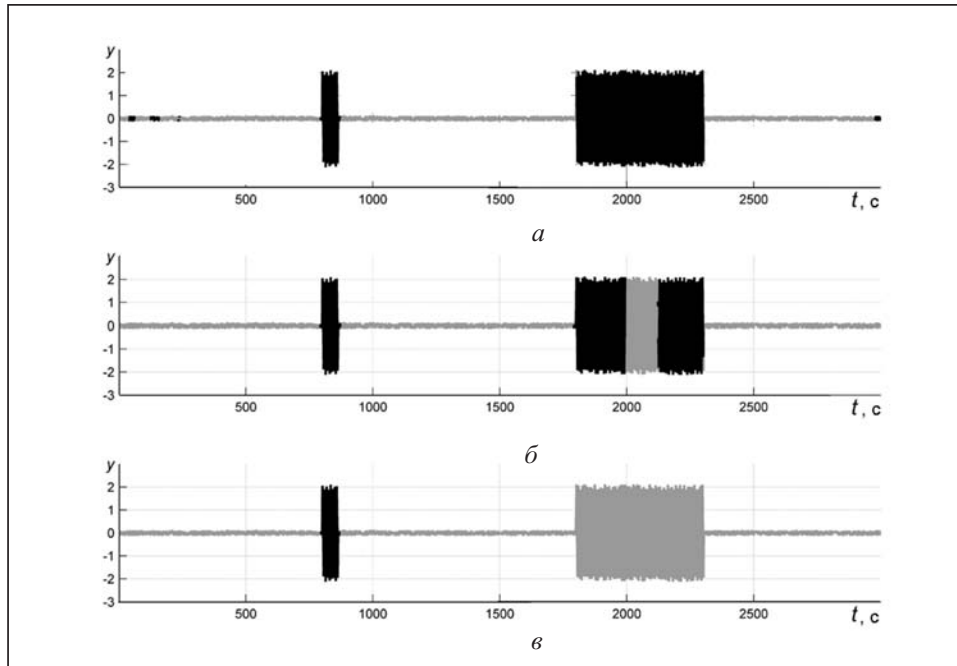


Рис. 3. Различные конструкции расширения нечеткого сравнения алгоритма FLARS: *a* — мягкая  $\sigma$ -конструкция; *б* — умеренная бинарная конструкция; *в* — жесткая гравитационная конструкция. (Черным цветом обозначены распознанные anomальные участки.)



Стандартный алгоритм FLARS [6] получается при использовании конструкции  $\sigma$ -расширения (4). Аналогично можно построить две другие версии FLARS, используя конструкции  $n_b$  — бинарного расширения (2) и  $n_g$  — гравитационного расширения (3). Последние приводят к более «жестким» моделям алгоритма FLARS. Степень различия в «жесткости» принятия решения версиями (2)–(4) алгоритма FLARS представлена синтетическим примером на рис. 3.

**Пример.** Параметр локального обзора  $\Delta$  в алгоритмах DRAS и FLARS означает близость записи  $y$  на отрезке регистрации  $T$ . С помощью нечетких сравнений его выбор также может быть автоматизирован. Обозначим  $dT = \{|k - \bar{k}| : k \neq \bar{k} \in T\}$  совокупность всех нетривиальных расстояний на  $T$ . Тогда  $\Delta$  — сильноминимальный элемент по  $\text{mod } dT$  (см. (4)) и является решением уравнения

$$n(\Delta, dT) = 1/2.$$

## 5. АЛГОРИТМ FCARS: ГЛОБАЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

На локальном уровне алгоритм FCARS (Fuzzy Comparison Algorithm for Recognition of Signals), как и алгоритмы DRAS и FLARS, использует процедуру, описанную в п. 3.1, приводящую к построению выпрямления КБР. Опишем поиск осциллирующих возвышенностей на выпрямлении в алгоритме FCARS на глобальном уровне. Сначала на выпрямлении происходит поиск значительных вертикальных выбросов. Интерес представляют их достаточно массивные скопления и точки, близко к ним расположенные. Точки, лежащие внутри таких скоплений, считаются аномальными независимо от того, какие значения принимает в них функция выпрямления. Небольшие значения выпрямления в этих точках могут означать лишь кратковременное ослабление сигнала в силу его неоднородности. Такие точки образуют центральные части возвышенностей, основами которых являются скопления указанных вертикальных выбросов.

Точки, лежащие слева и справа от массивных скоплений, могут иметь двойную природу: это либо спокойные «фоновые» точки, близко расположенные к данному скоплению, либо беспокойные точки на записи (не обязательно экстремальные на выпрямлении), относящиеся соответственно к начальной и конечной стадиям сигнала.

Таким образом, аномалии на записи  $y$  соответствуют осциллирующим возвышенностям на выпрямлении  $\Phi_y$ . Основания аномалий суть связные подмножества в области регистрации исходной записи, состоящие из точек, экстремально горизонтально близких к вертикально экстремальным точкам на выпрямлении.

Именно такое определение возвышенности положено в основу глобального уровня алгоритма FCARS. Его моделирование базируется на нечетких сравнениях и монолитности [25]. Нечеткие сравнения позволяют точно формулировать понятие вертикально экстремальных выбросов на выпрямлении. Степень предельности (горизонтальной близости) к ним в области регистрации описывается с учетом мер близости. Далее с помощью нечетких сравнений происходит формирование оболочки основания возвышенности (аномалии) путем заполнения промежутков неоднородности в массивных скоплениях вертикально аномальных выбросов горизонтально экстремальными точками.

Свойства мер близости позволяют выделить центральную часть возвышенности в этой оболочке. Окончательно подножие возвышенности получается путем добавления к его центральной части боковых частей, в поиске которых используются нечеткая логика и нечеткие сравнения.

Перейдем к точному изложению.

**5.1. Алгоритм FCARS: вертикальное деление (вариант 1).** В этом случае вертикальная мера аномальности  $\mu^v(k) \in [-1, 1]$  в точке  $k$  определяется как нечеткое сравнение образа  $\text{Im}\Phi_y$  со значением выпрямления  $\Phi_y(k)$  в этой точке:

$$\mu^v(k) = n(\text{Im}\Phi_y, \Phi_y(k)).$$

Здесь  $n(A, a)$  определено формулами (2)–(4) (т.е.  $n$  — бинарное, гравитационное расширение или  $\tau$ -расширение нечеткого сравнения  $n_{\gamma, \nu}(a, b)$ ).

Пусть  $\alpha_s$  ( $\alpha_w$ ) — сильный (слабый) уровень экстремальности по модулю  $\text{Im} \Phi_y$ , т.е.  $\alpha_s$  ( $\alpha_w$ ) есть решение уравнения  $n(\text{Im} \Phi_y, \alpha_s) = 1/2$  ( $n(\text{Im} \Phi_y, \alpha_w) = 0$ ).

**Определение 5.** Точка  $k$  является вертикально фоновой, если  $\mu^v(k) < 0 \Leftrightarrow \Phi_y(k) < \alpha_w$ , вертикально аномальной, если  $\mu^v(k) \geq 1/2 \Leftrightarrow \Phi_y(k) \geq \alpha_s$ , и вертикально потенциально аномальной, если  $\mu^v(k) \in [0, 1/2) \Leftrightarrow \Phi_y(k) \in [\alpha_w, \alpha_s)$ .

Обозначим  $vB$  множество вертикально фоновых точек,  $vA$  — множество вертикально аномальных точек и  $vP$  — множество вертикально потенциально аномальных точек. Тогда рассматриваемый период регистрации представляется в виде  $T = vB \cup vA \cup vP$  (рис. 4, а).

**5.2. Алгоритм FCARS: вертикальное деление (вариант 2).** В этом случае вертикальной мерой аномальности  $\mu^v(k)$  в точке  $k$  будет мера алгоритма FLARS  $\mu(k)$  (см. (5)) и  $T = vB \cup vA \cup vP$ , где  $vB = \{k \in T: \mu^v(k) < 0\}$ ,  $vA = \{k \in T: \mu^v(k) \geq 1/2\}$ ,  $vP = \{k \in T: \mu^v(k) \in [0, 1/2)\}$ .

**5.3. Алгоритм FCARS: горизонтальное деление.** Построим левую и правую меры близости к вертикально аномальному подмножеству  $vA$  в модели локального обзора  $\delta_k(\bar{k})$ :

$$\begin{aligned} L_{vA} \Phi_y(k) &= \frac{\sum \delta_k(\bar{k}): \bar{k} \in (vA \cap [k - \Delta/h, k])}{\sum \delta_k(\bar{k}): \bar{k} \in [k - \Delta/h, k]}, \\ R_{vA} \Phi_y(k) &= \frac{\sum \delta_k(\bar{k}): \bar{k} \in (vA \cap [k, k + \Delta/h])}{\sum \delta_k(\bar{k}): \bar{k} \in [k, k + \Delta/h]}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\delta_k(\bar{k}) = \frac{\Delta + h - h |\bar{k} - k|}{\Delta + h}.$$

**Замечание.** Построенные меры (6) связаны со стандартными мерами фона  $L_{\alpha_s}$ ,  $R_{\alpha_s}$  алгоритма DRAS [4] посредством нечеткого отрицания  $L_{vA} \Phi_y = 1 - L_{\alpha_s} \Phi_y$ ,  $R_{vA} \Phi_y = 1 - R_{\alpha_s} \Phi_y$ .

Нечеткая дизъюнкция  $\mu_{vA}(k) = \max(L_{vA} \Phi_y(k), R_{vA} \Phi_y(k))$  будет мерой аномальности относительно  $vA$  на  $T$ , формально выражающей двустороннюю близость к  $vA$  в  $T$ . В свою очередь, непосредственно  $\mu_{vA}$  является основой для построения в алгоритме FCARS горизонтальной мерой аномальности  $\mu^h$ :

$$\mu^h(k) = n(\text{Im}(\mu_{vA}), \mu_{vA}(t)).$$

**Определение 6.** Точка  $k$  является горизонтально фоновой, если  $\mu^h(k) < 0$ , горизонтально аномальной, если  $\mu^h(k) \geq 1/2$ , и горизонтально потенциально аномальной, если  $\mu^h(k) \in [0, 1/2)$  (рис. 4, б).

Обозначим  $hB$  множество горизонтально фоновых точек,  $hA$  — множество горизонтально аномальных и  $hP$  — множество горизонтально потенциально аномальных точек. Отсюда имеем горизонтальное разбиение периода регистрации  $T: T = hB \cup hA \cup hP$ .

Множество  $hB$  считается фоном, поэтому дополнение  $hA \cup hP$  к нему в  $T$  есть дизъюнктивное объединение нефоновых отрезков  $P_m: hA \cup hP = \bigcup_{m=1}^M P_m$ . Алгоритм FCARS оперирует только теми из них, которые пересекаются с  $hA$  ( $P_m \cap hA \neq \emptyset$ ): именно точки из  $hA$  считаются истинно аномальными, поскольку вблизи от них существует экстремально высокая концентрация по горизонтали точек с вертикально экстремальными значениями выпрямления  $\Phi_y$ .

Итак,  $P_m \cap hA \neq \emptyset$ . Определим границы аномалии  $s$  в  $P_m$ , т.е. платформу соответствующей этой аномалии возвышенности на выпрямлении  $\Phi_y$ . Для этого используем приведенное ниже утверждение, согласно которому в аномальном отрезке  $P_m$  обязательно найдутся точки, аномальные в вертикальном и горизонтальном смысле одновременно.

**Утверждение 1.** Пусть  $P_m = [u, \kappa] \in hA \cup hP$  и  $P_m \cap hA \neq \emptyset$ , тогда  $P_m \cap vA \cap hA \neq \emptyset$ .

**Доказательство.** Пусть  $k^* \in [u, \kappa] \cap hA$  и  $k^* \notin vA$ . Если  $k^*$  — горизонтально аномальная слева точка, то обязательно на отрезке  $[u, k^*]$  найдутся вертикально

аномальные точки, поскольку в противном случае горизонтально аномальными слева были бы все точки левее  $k^*$  до точки  $n-1$  включительно. Последнее противоречит ее горизонтальной фоновости. Если  $k^{**}$  — ближайшая из вертикально аномальных на  $[n, k^*]$  к  $k^*$ , то  $L_{vA} \Phi_y(k^{**}) > L_{vA} \Phi_y(k^*)$ . Следовательно,  $k^{**}$  — одновременно горизонтально и вертикально аномальная точка:  $k^{**} \in P_m \cap vA \cap hA$ .

Рассуждения относительно горизонтально аномальной справа точки аналогичны. Тем самым утверждение доказано.

Пусть  $n_A(k_A)$  — первая (последняя) точка в пересечении  $P_m \cap hA \cap vA$ . В алгоритме FCARS отрезок  $[n_A, k_A]$  считается центральной частью сигнала  $s$ , поэтому его границы  $n_s$  и  $k_s$  лежат соответственно в отрезках  $[n, n_A]$  и  $[k_A, k]$ .

**5.4. Алгоритм FCARS: границы аномалии.** На отрезке  $[n, n_A]$  есть два типа точек относительно вертикального разбиения: фоновые  $\mu^v(k) < 0$  и нефоновые  $\mu^v(k) \geq 0$  (см. определение 5). Сформулируем «логику» начала аномалии  $s$ . Точка  $n_s$  должна лежать на отрезке  $[n, n_A]$  по возможности правее фоновых и левее нефоновых точек. Построим формализацию этой логики на основе нечетких сравнений. Пусть  $C = \{k \in [n, n_A] : \mu^v(k) < 0\}$  и  $D = \{k \in [n, n_A] : \mu^v(k) \geq 0\}$ . Функция  $n(C, k)$  ( $n(k, D)$ ) есть мера того, что  $k$  лежит правее  $C$  (левее  $D$ ) (см. (2)). Их нечеткая конъюнкция  $\min(n(C, k), n(k, D))$  есть мера того, что  $k$  лежит правее  $C$  и левее  $D$ . Поэтому начало аномалии  $n_s$  естественно положить равным абсолютному максимуму этой конъюнкции на отрезке  $[n, n_A]$ :

$$n_s = \arg \max_{[n, n_A]} [\min(n(C, k), n(k, D))].$$

Аналогично определяется конец аномалии  $k_s$  на отрезке  $[k_A, k]$ :

$$k_s = \arg \max_{[k_A, k]} [\min(n(k, C), n(D, k))].$$

На рис. 4, в приведен график обработки сейсмической записи алгоритмом FCARS.

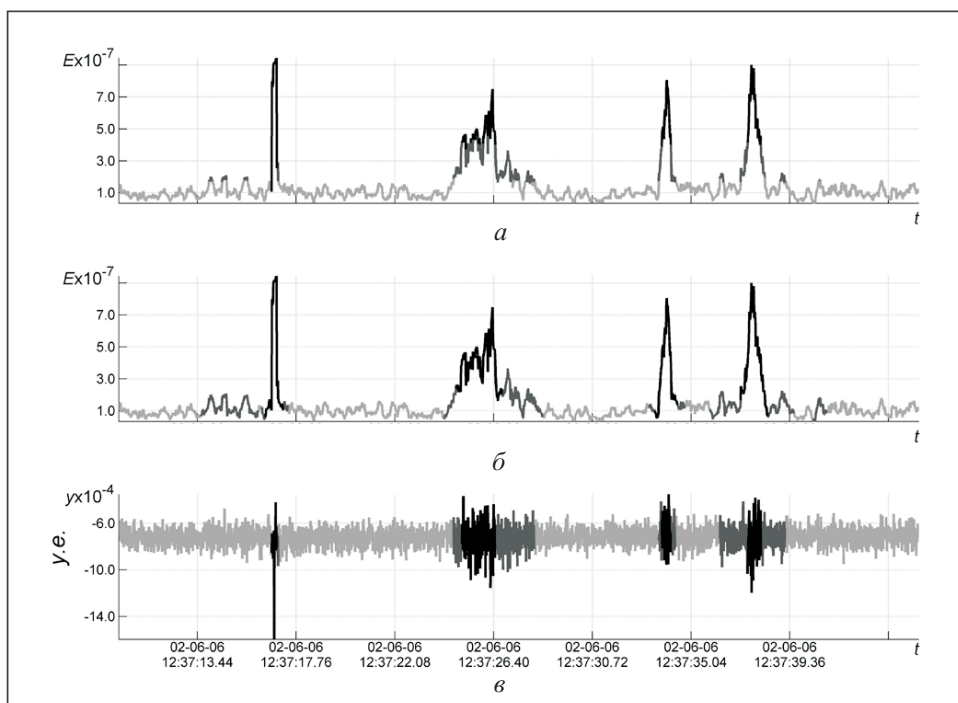


Рис. 4. График обработки сейсмической записи алгоритмом FCARS: *a* — вертикальное разбиение записи; *б* — горизонтальное разбиение записи; *в* — выделение начала и конца аномалии. (Светло-серым цветом обозначены фоновые участки, темно-серым цветом — потенциально аномальные участки, черным цветом — аномальные участки записи.)

Свободными параметрами алгоритма FCARS являются  $\Phi$  — функционал выпрямления,  $0 < \Delta \ll |T|$  — окно локального обзора,  $n$  — нечеткое сравнение положительных функций. Соответственно используется обозначение FCARS( $\Phi, \Delta, n$ ).

### 5.5. Сравнительный анализ алгоритма FCARS с алгоритмами DRAS и FLARS.

1. Конструктивно меры близости в алгоритме FCARS совпадают с мерами фона алгоритма DRAS.
2. Множество аномалий  $hA \subset T$  формируется в алгоритме FCARS почти так же, как в алгоритме FLARS.
3. В отличие от DRAS и FLARS выбор свободных параметров  $\alpha$  и  $\beta$  в алгоритме FCARS полностью автоматизирован.
4. Принципиально иным в алгоритме FCARS является блок «Определение границ аномалии»; он использует вертикальное разбиение  $T = vB + vA + vP$  (см. определение 5).

### 6. АЛГОРИТМ FCARSr

Значение  $D_\alpha \Phi_y(k)$  в алгоритме DRAS требует знания его обеих фоновых мер:  $L_\alpha \Phi_y(k)$  и  $R_\alpha \Phi_y(k)$  в точке  $kh$ , а значит, и знания записи  $y$  в окрестности  $[-\Delta + kh, kh + \Delta]$  точки  $kh$ . Наличие компоненты «будущего»  $[kh, kh + \Delta]$  делает невозможным реализацию DRAS в режиме реального времени. Алгоритм FCARS не имеет таких ограничений; значит, возможна его реализация в режиме реального времени (real time). Соответствующий алгоритм мы называем FCARSr.

**6.1. Алгоритм FCARSr: локальный уровень.** Функционалы выпрямления вычисляются с использованием одностороннего фрагмента локального обзора

$$\Delta^k y = \{y_{k-\Delta/h}, \dots, y_k\} \in \mathbb{R}^{\Delta/h+1}$$

по следующим формулам:

- 1) длина фрагмента обзора

$$L(\Delta^k y) = \sum_{j=k-\Delta/h}^{k-1} |y_{j+1} - y_j|;$$

- 2) энергия фрагмента обзора

$$E(\Delta^k y) = \sum_{j=k-\Delta/h}^k (y_j - \bar{y}_k)^2,$$

где  $\bar{y}_k = \frac{h}{\Delta+h} \sum_{j=k-\Delta/h}^k y_j$ .

**6.2. Алгоритм FCARSr: глобальный уровень.** Предполагается, что период регистрации  $T$  ограничен справа подвижной точкой  $k$ , отвечающей текущему моменту времени. В этом случае существуют два варианта анализа записи:

- 1) запись  $y$  рассматривается с начала записи  $a$  до момента  $k$  включительно:  $T = \Gamma(k) = [a, k]$ ;

- 2) анализируется подвижный фрагмент  $\Lambda^k y = \{y_{k-\Lambda/h}, y_k\}$  записи  $y$ , где  $\Delta \ll \Lambda \in \mathbb{R}_h^+$  — параметр глобального обзора:  $T = \Gamma(k, \Lambda)$ .

В любом случае область  $T$  зависит от точки  $k$ :  $T = T(k)$ ; следовательно, от  $k$  зависят и все сравнения в алгоритме FCARSr, а потому и их конечные результаты в точке  $k$ . При этом согласно определению 6 возможны такие варианты:

- 1) точка  $k$  аномальна:  $k \in hA(k)$ ;
- 2) точка  $k$  фоновая:  $k \in hB(k)$ ;
- 3) точка  $k$  не фоновая:  $k \in hP(k)$ , но принадлежит (или не принадлежит) аномалии  $s$  для записи  $y$  на  $T(k)$ .

На рис. 5 дан график выделения аномалий на записи собственного электрического потенциала в окрестности вулкана Ла Фурнез различными методами.

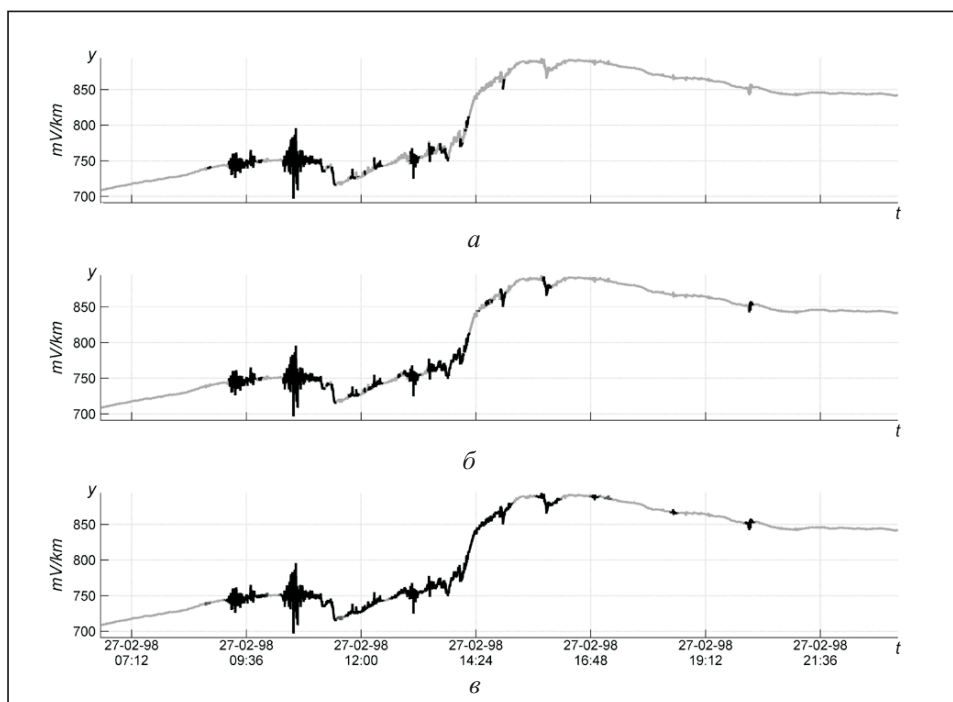


Рис. 5. Варианты обработки записи алгоритмом FCARSr: *a* — результат работы алгоритма FCARSr при  $\Lambda = 3000$ ; *б* — результат работы алгоритма FCARSr при  $\Lambda$ , равным всему известному фрагменту; *в* — результат работы стандартного алгоритма DRAS. (Черным цветом обозначены распознанные аномальные участки.)

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Как было сказано выше, нечеткие сравнения играют большую роль, поэтому представляется важным их всестороннее изучение, в частности поиск разного рода параметризованных семейств нечетких сравнений, подобных семейству  $n_{\gamma, \nu}$  (см. определение 3). В этой связи процитируем Л.А. Заде из [17]: «... все, что нам нужно для решения большинства практических задач, — это параметризованные семейства определений, которые в час надобности допускали бы нестандартный выбор операторов, отражающих характерные особенности конкретного приложения. Преимущество этого подхода состоит в том, что, избегая фиксированных, конкретно независимых определений, теория нечетких множеств и нечеткая логика достигают плюрализма, который повышает их гибкость и экспрессивность возможности».

Поэтому в конце статьи рассмотрим анализ семейства  $n_{\gamma, \nu}$ , в частности вопрос о характере зависимости  $(\gamma, \nu) \rightarrow n_{\gamma, \nu}$ . Ясно, что эта зависимость является возрастающей функцией от  $\gamma$ , поскольку возрастающей является зависимость  $\gamma \rightarrow \psi_\gamma$  (см. определение 3). Оказывается, что зависимость  $\nu \rightarrow n_{\gamma, \nu}$  также является возрастающей. Это доказывает следующее утверждение.

**Утверждение 2.** При  $0 < \mu < \lambda$  для любых  $a, b \in \mathbb{R}$  справедливо неравенство

$$(|a|^\lambda + |b|^\lambda)^{1/\lambda} \leq (|a|^\mu + |b|^\mu)^{1/\mu}.$$

**Доказательство.** Функция  $\psi_\lambda(a, b) = (|a|^\lambda + |b|^\lambda)^{1/\lambda}$ ,  $\lambda > 0$ , однородна на плоскости  $\mathbb{R}^2(a, b)$ , а потому полностью определяется своим единичным шаром

$$\psi_\lambda^0 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2(a, b) : |a|^\lambda + |b|^\lambda \leq 1\}.$$

При этом имеет место известная в функциональном анализе связь между поглощающими подмножествами и соответствующими им функционалами Минковского [18]:

$$\psi_\lambda \leq \psi_\mu \text{ на плоскости } \mathbb{R}^2(a, b) \Leftrightarrow \psi_\mu^0 \subseteq \psi_\lambda^0.$$

С помощью этой связи покажем, что  $\psi_\lambda(a, b) \leq \psi_\mu(a, b)$  при  $\mu < \lambda$ . Действительно, шар  $\psi_\lambda$  представляет собой центрально-симметричную относительно начала область на плоскости  $\mathbb{R}^2(a, b)$ , ограниченную отражениями кривой  $(1-a^\lambda)^{1/\lambda}$  на отрезке  $[0, 1]$ . Поведение этой кривой при различных значениях  $\lambda$  показано на рис. 6.

Если  $\mu < \lambda$ , то  $1/\lambda < 1/\mu$  и  $a^\mu \geq a^\lambda$  для  $a \in [0, 1] \Rightarrow 1-a^\lambda \geq 1-a^\mu$ . Отсюда

$$(1-a^\lambda)^{1/\lambda} \geq (1-a^\lambda)^{1/\mu} \geq (1-a^\mu)^{1/\mu}.$$

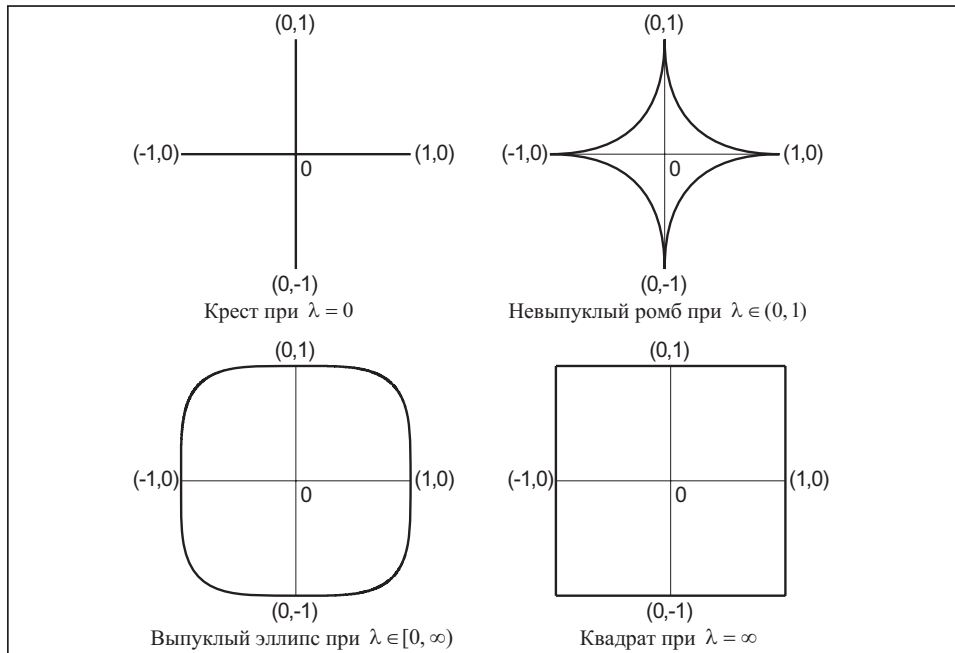


Рис. 6. Отражение графика  $(1-a^\lambda)^{1/\lambda}$  на отрезке  $[0, 1]$  при различных значениях  $\lambda$

Таким образом, имеет место включение  $\psi_\mu \subseteq \psi_\lambda$ . Доказательство закончено.

**Следствие 1.** Зависимость  $\nu \rightarrow n_{\nu, \nu}$  возрастающая.

Доказательство достаточно провести только для базовых сравнений  $n_\nu$  (см. определение 3):

$$\text{если } \nu_1 < \nu_2, \text{ то } (|a|^{\nu_2} + |b|^{\nu_2})^{1/\nu_2} \leq (|a|^{\nu_1} + |b|^{\nu_1})^{1/\nu_1} \Rightarrow$$

$$n_{\nu_1} = \frac{b-a}{(|a|^{\nu_1} + |b|^{\nu_1})^{1/\nu_1}} \leq \frac{b-a}{(|a|^{\nu_2} + |b|^{\nu_2})^{1/\nu_2}} = n_{\nu_2}.$$

**Замечание.** Предельные случаи.

$$1. \lambda = 0, \psi_0(a, b) = \begin{cases} |a|, & \text{если } b = 0, \\ |b|, & \text{если } a = 0, \\ \infty, & \text{если } ab \neq 0, \end{cases}$$

$$\text{поэтому } n_0(a, b) = \frac{b-a}{\psi_0(a, b)} = \begin{cases} 0, & \text{если } ab \neq 0, \\ 1, & \text{если } a = 0, \\ -1, & \text{если } b = 0. \end{cases}$$

Не заслуживает внимания патологический случай, когда 0 — абсолютно минимальный элемент, остальные элементы равны между собой.

2.  $\lambda = \infty$ ,  $\psi_\infty(a, b) = \max(|a|, |b|)$ ,  $n_\infty(a, b) = \frac{b-a}{\max(|a|, |b|)}$ ; сравнение чрезвычайно содержательное и с ним связан заключительный пример.

**Пример.** Пусть  $A = \{1, \dots, N\}$ . В силу равномерности множества  $A$  его последний элемент  $N$  нельзя считать сильномаксимальным по отношению к  $A$ . И это находит свое формальное подтверждение: пусть  $n = n_\infty$  и сравнение  $n(A, N)$  осуществляется бинарной конструкцией (2), тогда

$$n(A, N) = \frac{\sum n(i, N)}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{N-i}{N}}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N (N-i)}{N^2} = \frac{1+\dots+N-1}{N^2} = \frac{N(N-1)}{2N^2} < \frac{1}{2}.$$

Согласно следствию 1  $n_\nu \leq n_\infty$  при всех  $\nu > 0$ , поэтому  $n_\nu(A, N) \leq 1/2$ . Следовательно, на основе любых сравнений  $n = n_{\gamma, \nu}$  число  $N$  никогда не будет сильномаксимальным по отношению к подмножеству  $A$ .

**Утверждение 10.** Функция  $\psi(a, b) = \frac{b-a}{(1-a^\lambda)^{1/\lambda}}$ ,  $\lambda > 0$ , возрастает по  $b$  и убывает по  $a$  на положительном квадрате  $(\mathbb{R}^+)^2(a, b)$ .

Доказательство проводится с помощью частных производных: при условии  $a > 0$  и  $b > 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial b} &= \frac{(a^\lambda + b^\lambda)^{1/\lambda} - (b-a) \frac{1}{\lambda} (a^\lambda + b^\lambda)^{1/\lambda - 1} \lambda b^{\lambda-1}}{(a^\lambda + b^\lambda)^{2/\lambda}} = \\ &= \frac{(a^\lambda + b^\lambda)^{1/\lambda - 1} (a^\lambda + b^\lambda - b^\lambda + ab^{\lambda-1})}{(a^\lambda + b^\lambda)^{2/\lambda}} > 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial a} &= - \frac{(a^\lambda + b^\lambda)^{1/\lambda} - (b-a) \frac{1}{\lambda} (a^\lambda + b^\lambda)^{1/\lambda - 1} \lambda a^{\lambda-1}}{(a^\lambda + b^\lambda)^{2/\lambda}} = \\ &= \frac{(a^\lambda + b^\lambda)^{1/\lambda - 1} (-a^\lambda - b^\lambda + b^\lambda - ba^{\lambda-1})}{(a^\lambda + b^\lambda)^{2/\lambda}} < 0. \end{aligned}$$

Доказательство закончено.

Таким образом, увеличение (уменьшение) параметров  $\gamma$  и  $\nu$  в нечетком сравнении  $n_{\gamma, \nu}$  ведет к ужесточению (ослаблению) этого сравнения, что дает возможность гибкого моделирования логики интерпретатора в алгоритме FCARS.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгоритмы искусственного интеллекта для кластеризации магнитных аномалий / А.Д. Гвишиани, М. Диаман, В.О. Михайлов, А. Гальдеано, С.М. Агаян, Ш.Р. Богоутдинов, Е.М. Граева // Физика Земли. — 2002. — № 7. — С. 13–28.
2. Гвишиани А.Д., Агаян С.М., Богоутдинов Ш.Р. Математические методы геоинформатики. I. О новом подходе к кластеризации // Кибернетика и системный анализ. — 2002. — № 2. — С. 104–122.
3. Mikhailov V., Galdeano A., Diamant M. et al. Application of artificial intelligence for Euler solutions clustering // Geophysics. — 2003. — 68, N 1. — P. 168–180.
4. Математические методы геоинформатики. II. Алгоритмы нечеткой логики в задачах выделения аномалий на временных рядах / А.Д. Гвишиани, С.М. Агаян, Ш.Р. Богоутдинов, А.В. Леденев, Ж. Злотники, Ж. Боннин // Кибернетика и системный анализ. — 2003. — № 4. — С. 103–111.
5. Гвишиани А.Д., Агаян С.М., Богоутдинов Ш.Р., Злотники Ж. Алгоритмы нечеткой логики в задачах выделения аномалий на временных рядах / Очерки геофизических исследований. К 75-летию Объединенного института физики Земли им. О.Ю. Шмидта». — М.: ОИФЗ РАН, 2003. — С. 257–262.

6. Algorithm FLARS and recognition of time series anomalies / A.D. Gvishiani, S.M. Agayan, Sh.A. Bogoutdinov, S.A. Tikhotsky, J. Hinderer, J. Bonnin, M. Diament // System Research & Information Technologies. — 2004. — N 3. — P. 7–16.
7. Automatic fuzzy-logic recognition of anomalous activity on long geophysical records. Application to electric signals associated with the volcanic activity of la Fourmaise volcano (Réunion Island) / J. Zlotnicki, J.-L. LeMouel, A. Gvishiani, S. Agayan, V. Mikhailov, Sh. Bogoutdinov // Earth and Planetary Science Letters. — 2005. — **234**. — P. 261–278.
8. Исследование морфологии сигнала на основе алгоритмов нечеткой логики / С.М. Агаян, Ш.Р. Богоутдинов, А.Д. Гвишиани, Е.М. Граева, М. Диаман, Ж. Злотники, М.В. Родкин // Геофизические исследования. Сб. науч. трудов. — Вып. 1. — М.: ИФЗ, 2005. — С. 143–155.
9. Богоутдинов Ш.Р., Агаян С.М., Гвишиани А.Д. и др. Алгоритмы нечеткой логики в анализе электротеллурических данных в связи с мониторингом вулканической активности // Физика Земли. — 2007. — № 7. — С. 72–85.
10. Агаян С.М., Соловьев А.А. Выделение плотных областей в метрических пространствах на основе кристаллизации // System Research & Information Technologies. — 2004. — N 2. — P. 7–23.
11. Кедров О.К. Сейсмические методы контроля ядерных испытаний, — Москва; Саранск, 2005. — 412 с.
12. Кедров О.К., Пермьякова В.Е., Стеблов Г.М. Методы обнаружения слабых сейсмических явлений в пределах платформ. — М.: ОИФЗ РАН, 2000. — 101 с.
13. Кушнир А.Ф., Мостовой С.В. Статистический анализ геофизических полей. — Киев: Наук. думка, 1990. — 270 с.
14. Hariés H.P., Joswig M. Signal detection by pattern recognition methods // A Twenty-Five Years Review of Basic Research / Ed. by A.U. Kerr and D.L. Carlson, USA, 1985. — P. 579–584.
15. Romeo G. Seismic signal detection and classification using artificial neural networks. Special issue on the workshop «Planning and procedures for GSETT-3», Erice, November 10–14, 1993. Annali di Geofisica. — 1994. — **XXXVII**, N 3. — P. 343–353.
16. Аверкин А.Н., Батыршин И.З., Блишун А.Ф. и др. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д.А. Поспелова. — М.: Наука, 1986. — 312 с.
17. Ягер Р. Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения. — М.: Радио и связь, 1986. — 406 с.
18. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. — М.: Наука, 1988. — 297 с.
19. Соболев Г.А. Основы прогноза землетрясений. — М.: Наука, 1993. — 314 с.
20. Прогнозирование мест землетрясений в регионах умеренной сейсмичности / А.Д. Гвишиани, А.И. Горшков, Е.Я. Ранцман, А. Систернас, А.А. Соловьев. — М.: Наука, 1988. — 176 с.
21. Гвишиани А.Д., Гурвич В.А. Динамические задачи классификации и выпуклое программирование в приложениях. — М.: Наука, 1992. — 360 с.
22. Гвишиани А.Д., Горшков А.И., Кособоков В.Г. Распознавание высокосейсмических зон в Пиренеях / Докл. АН СССР. Сер. «Геофизика». — 1987. — **292**, № 1. — С. 56–59.
23. Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия / Под ред. Ю.В. Прохорова. — М.: Большая Российская Энциклопедия, 1999. — 910 с.
24. Заде Л.А. Роль мягких вычислений и нечеткой логики в понимании, конструировании и развитии информационных/интеллектуальных систем // Новости искусственного интеллекта. — 2001. — № 2-3. — С. 7–11.
25. Богоутдинов Ш.Р. Применение методов нечеткой логики (алгоритм «Монолит») для интерпретации геомагнитных данных // Материалы 33-й сессии Международного семинара им. Д.Г. Успенского «Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей», Екатеринбург, 30 января – 3 февраля 2006 г. — С. 41–48.

*Поступила 15.11.2007*