УДК 51.001.57

С.Н. ГЕРАСИН, В.В. ШЛЯХОВ, С.В. ЯКОВЛЕВ[1]

ПОКРЫТИЯ МНОЖЕСТВ И ОТНОШЕНИЕ ТОЛЕРАНТНОСТИ

Ключевые слова: *отношение толерантности, смежные классы и предклассы, покрытие множеств, функциональное отношение.*

ВВЕДЕНИЕ

Традиционный подход к изучению сходства или неразличимости объектов состоит в том, чтобы сначала определить меру сходства, а затем исследовать взаимное расположение сходных объектов. Английский математик Э. Зиман [1], изучая модели зрительного аппарата, предложил аксиоматическое определение сходства. На основании этого появилась возможность изучать свойства сходства независимо от того, насколько конкретно оно задано в той или иной ситуации: расстояние между объектами, совпадение каких-то признаков или субъективное мнение наблюдателя.

Если указано только сходство объектов, то невозможно разбить их на четкие классы так, чтобы внутри одного класса объекты были похожи, а между объектами разных классов сходство отсутствовало. В случае сходства возникает размытая ситуация без четких границ. Однако накапливание несущественных различий у сходных объектов может привести к совершенно непохожим объектам.

Предпринятые ранее исследования отношения толерантности [2–4] в основном касались топологических аспектов и некоторых приложений к семантике. В значительно меньшей степени было уделено внимание важности этого отношения к задачам распознавания и классификации. Отметим, что отношение эквивалентности порождает разбиение множества на непересекающиеся смежные классы, а отношение толерантности индуцирует классы, образующие покрытие исходного множества.

Естественная связь между отношением толерантности и отношением эквивалентности приводит к выводу, что соответствующие смежные классы этих отношений при некоторых дополнительных условиях могут совпадать. Решение этой задачи получено в работе [5].

СТРУКТУРА КЛАССОВ ТОЛЕРАНТНОСТИ

Рассмотрим прямоугольную область $D \subset R^2$, содержащую n точек в узлах сетки размера $n_1 \times n_2 = n$, т.е. состоящую из n_1 точек по вертикали и n_2 точек по горизонтали (рис. 1). После упорядоченной нумерации эти точки образуют множество $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Допустим, что на множестве A задана целочисленная функция, образом которой являются дискретные точки в R, образующие после упорядоченной нумерации множество $B = J_m\ f(A) = = \{n+1, \ldots, n+m\}$. Пусть на множестве B существует покрытие $\Pi_B \ = \{\Pi_1^B, \ldots, \Pi_q^B\}$, т.е. $\Pi_i^B \subset B$, $\Pi_i^B \neq \Pi_j^B$ и $\bigcup_{i=1}^{q} \Pi_i^B = B$, $i \neq j$, $i = \overline{1, s}$, $j = \overline{1, s}$. Тогда нетрудно заметить, что функция f и покрытие Π_B индуцируют на A бинарное отношение

$$E(a_1, a_2) = \begin{cases} 1, \text{если найдетс хот бы один элемент } \Pi_i^B \in \Pi_B, \\ \quad \text{для которого имеют место вклю}\mathrm{ch}\text{eni } f(a_1), f(a_2) \in \Pi_i^B, \\ 0 \text{ в противном слу}\mathrm{chae}, \end{cases} \quad (1)$$

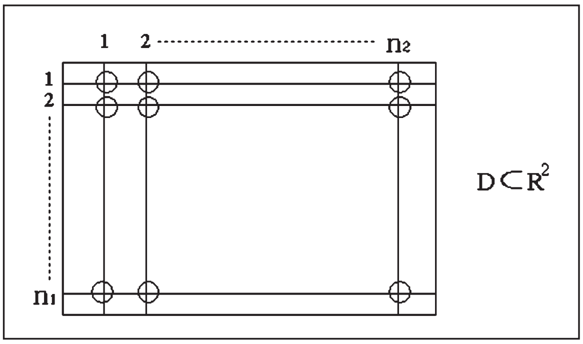


Рис. 1

где $a_1, a_2 \in A$, $\Pi_i^B \subset B$, $i \in \{1, \ldots, q\}$, которое в качестве области определения имеет весь декартов квадрат $A \times A$ $(\mathrm{Dom}\, E = A \times A)$ и обладает свойством рефлексивности $(E\,(a, a) = 1$ для любого $a \in A)$ и симметричности $(E\,(a_1, a_2) = E\,(a_2, a_1)$ для любых элементов $a_1,\ a_2 \in A)$, т.е. является отношением толерантности.

При этом отношение E реализует многозначное отображение из A в A, которое индуцирует классы образов и прообразов (так называемые левые и правые смежные классы):

$$E_a = \{x \in A : E\,(a, x) = 1\} \text{ — классы образов элемента } a \in A,$$

$$E_a^{-1} = \{x \in A : E\,(a, x) = 1\} \text{ — класс прообразов элемента } a \in A.$$

Нетрудно заметить, что в данном случае ввиду симметричности классы образов и прообразов совпадают, поскольку

$$\forall\, x \in E_a \Rightarrow E\,(a, x) = 1 \Rightarrow E\,(x, a) = 1 \Rightarrow x \in E_a^{-1}.$$

Эта цепочка следований справедлива и в обратном порядке. Тогда имеем $E_a \subset E^{-1}(a)$ и $E_a^{-1} \subset E_a$, т.е. $E_a = E_a^{-1}$. Система этих классов порождает покрытие $\Pi_A = \{\Pi_1^A, \ldots, \Pi_p^A\}$, так как произвольный элемент $a \in A$ также принадлежит E_a, поскольку имеет место рефлексивность $E\,(a, a) = 1$. При этом известно [2], что любое отношение толерантности индуцирует так называемые предклассы и классы толерантности. Остановимся на этом подробнее.

Определение 1. Множество $C \subset A$ называется предклассом толерантности, если любые два его элемента x и y толерантны, т.е. для них выполнено соотношение $E\,(x, y) = 1$.

В частности заметим, что одноэлементное множество $C\{a\}$ для любого $a \in A$ есть предкласс толерантности, так как имеет место рефлексивность.

Определение 2. Множество $D \subset A$ называется классом толерантности, если D есть максимальный предкласс, поскольку для всякого элемента $z \in A$ и не входящего в D существует элемент $x \in D$, не толерантный к z, т.е. $E\,(x, z) = 0$.

Легко показать, что в случае, когда A — конечное множество (здесь именно такая ситуация) всякий предкласс толерантности содержится хотя бы в одном классе толерантности D. Действительно, пусть C — предкласс толерантности. Если C есть класс толерантности, то доказательство очевидно. Если C — не класс толерантности, то он не максимальный и найдется элемент $z \in A \setminus C$, толерантный ко всякому элементу из C. Присоединяем его к множеству C (фактически расширим C за счет этого элемента), т.е. рассмотрим множество $C_1 = C \cup \{z\}$. Тогда $C \subset C_1$ и C_1 снова будет предклассом толерантности. Если C_1 не стал еще классом толерантности, то процесс расширения, описанный выше, может быть продолжен до тех пор, пока класс толерантности не будет получен. Поскольку A конечно, то за конечное число шагов построение класса толерантности, содержащего исходный предкласс толерантности, закончится. Таким образом, вышесформулированная посылка обоснована. Отсюда вытекает, что любой элемент $a \in A$ содержится в некотором классе толерантности, поскольку он как одноэлементное подмножество A является предклассом толерантности, а вся система классов толерантности образует покрытие множества A, которое будем обозначать $G_A = \{G_1^A, \ldots, G_q^A\}$.

Определение 3. Произвольное покрытие Π назовем правильным тогда и только тогда, когда для любых двух его элементов Π_1 и Π_2 выполняются соотношения $\Pi_1 \setminus PI_2 \neq \varnothing$ и $\Pi_2 \setminus PI_1 \neq \varnothing$, где $\varnothing$ — знак пустого множества.

Утверждение 1. Классы толерантности образуют правильное покрытие множества A.

Доказательство несложно получить следующим образом. По сути правильное покрытие обладает следующим свойством: в нем не существует двух элементов Π_1 и Π_2, среди которых один был бы целиком вложен в другой, например $\Pi_1 \subset \Pi_2$. Этим же свойством обладают классы толерантности. Действительно, если бы $C_1 \subset C_2$, где C_1, C_2 — классы толерантности, то C_1 не удовлетворяет свойству максимальности и фактически является не классом толерантности, а предклассом. Имеем противоречие с исходной посылкой. Таким образом, для любой пары классов толерантности вложение исключается, что по определению свидетельствует о правильности покрытия. Утверждение доказано.

Определение 4. Назовем какой-то элемент произвольного покрытия неправильным, если он вложен в какой-либо другой (хотя бы один) элемент покрытия.

Определение 5. Произвольное покрытие конечного множества B будем называть упорядоченно-связным тогда, когда существует нумерация элементов множества B, при которой любой элемент покрытия является связным в том смысле, что он содержит все элементы, занумерованные подряд без пропусков, т.е.

$$\Pi_i = \{b_i, b_{i+1}, \ldots, b_{i+k}\},$$

где $b_i, b_{i+1}, \ldots, b_{i+k} \in B$, а $|\Pi_i| = k$ — число элементов покрытия.

Рассмотрим пример неупорядоченно-связного покрытия. Пусть множество B состоит из трех элементов: $B = \{1,2,3\}$, а $\Pi_B = \{(1,2); (2,3); (1,3)\}$. Тогда нетрудно заметить, что при любой перенумерации элементов множества B или перестановке чисел 1, 2, 3 всегда будет присутствовать несвязный элемент покрытия с номерами 1 и 3 и пропущенным номером 2.

Определение 6. Назовем тройку произвольных различных элементов множества B, $b_1, b_2, b_3 \in B$, с заданным на нем произвольным покрытием Π_B транзитивной, если любая пара элементов этой тройки находится хотя бы в одном элементе покрытия Π_B.

Приведенный выше пример представляет собой транзитивную тройку.

Нетрудно заметить, что в общем случае любая пара $< B, \Pi_B >$ (где B — множество и Π_B — заданное на нем произвольное покрытие) индуцирует на множестве B отношение толерантности по правилу, аналогичному равенству (1):

$$T_{\Pi_B}(b_1, b_2) = \begin{cases} 1, \text{если найдетс хот бы один элемент покрыти } \Pi_B, \\ \quad \text{для которого имеют место вклюchени } b_1, b_2 \in \Pi_i^B \in \Pi_B; \\ 0 \text{ в противном случhae.} \end{cases} \quad (2)$$

Тогда транзитивная тройка относительно этого отношения действительно является транзитивной. Более того, толерантность T_{Π_B} на транзитивной тройке как и на множестве переходит в тривиальный случай единичной эквивалентности ε (тождественно равной единице), поскольку

$$\varepsilon(b_i, b_j) \equiv 1 \text{ для любых } b_i, b_j \in \{b_1, b_2, b_3\}.$$

Рассмотрим некоторые важные (в дальнейшем) свойства правильных и упорядоченно-связных покрытий.

Свойство 1. Если произвольное покрытие Π_B является упорядоченно-связным и правильным, то для любой пары его различных элементов $\Pi^1, \Pi^2 \in \Pi_B$ существует хотя бы одна нетранзитивная тройка $\{b_1, b_j, b_k\} \in B$, для которой

$$\{b_1, b_j, b_k\} \subset \Pi^1 \cup \Pi^2,$$

т.е. принадлежащая их объединению, а из двух элементов, которые не принадлежат какому-то одному элементу покрытия (допустим, b_i и b_k), один принадлежат $\Pi^1 \setminus \Pi^2$, а другой — $\Pi^2 \setminus \Pi^1$: $b_i \in \Pi^1 \setminus PI^2$, $b_k \in \Pi^2 \setminus \Pi^1$.

Доказательство. Следует заметить, что если Π^1 и Π^2 — одноэлементны, то эта ситуация в каком-то смысле «вырожденная», поскольку для единичных элементов покрытия объединение не содержит тройки как таковой и можно считать, что транзитивности не наблюдается. Поэтому без ограничения общности можно считать, что объединение содержит хотя бы три различных элемента множества B.

Тогда возможны две ситуации: $\Pi^1 \cap \Pi^2 = \varnothing$ или $\Pi^1 \cap \Pi^2 \neq \varnothing$, при этом покрытие является упорядоченно-связным. Тогда можно считать, что

$$\Pi^1 = \{b_{i_1}, b_{i_1+1}, \ldots, b_{i_1+k_1}\},\ \Pi^2 = \{b_{i_2}, b_{i_2+1}, \ldots, b_{i_2+k_2}\},$$

где $b_{i_1}, \ldots b_{i_1+k_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_2+k_2} \in B$, а их номера удовлетворяют следующему условию:

если $\Pi^1 \cap \Pi^2 = \varnothing$, то $i_1 + k_1 < i_2$;

если $\Pi^1 \cap \Pi^2 \neq \varnothing$, то существует номер $s \neq 0$ такой, что $s \leq k_1$ и $i_1 + s = i_2$.

Более наглядно это можно представить схемами 1 и 2.

Схема 2

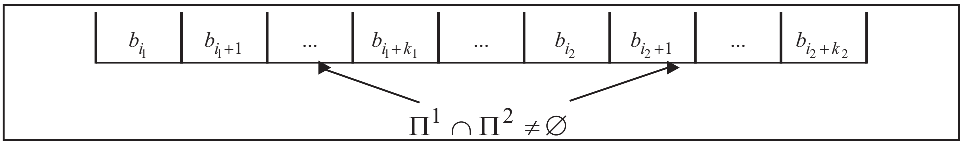
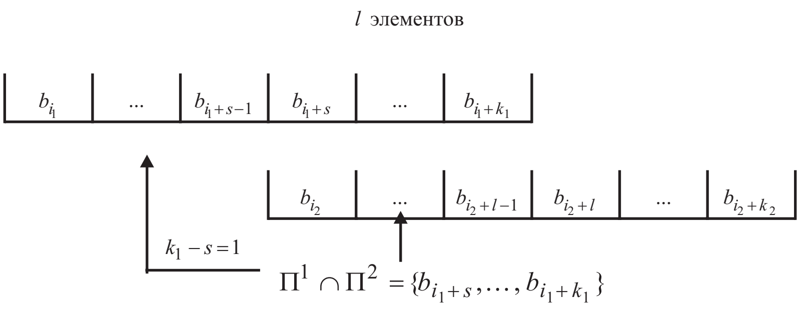


Схема 2



В схеме 2 $b_{i_1+s}=b_{i_2},\ldots;\ b_{i_1+k_1}=b_{i_2+l-1}$ — это фактически общие элементы множеств Π^1 и Π^2. Несложно понять, что в любом случае два элемента: b_{i_1} и $b_{i_2+k_2}$, принадлежащие B, не могут быть толерантными относительно T_{Π_B}, т.е. $T_{\Pi_B}(b_{i_1}, b_{i_2+k_2})=0$. Действительно, в противном случае, если бы $T_{\Pi_B}(b_{i_1}, b_{i_2+k_2})=1$, то нашелся бы третий элемент покрытия Π_B, а именно $\Pi^3\in\Pi_B$, который их содержал бы, т.е. $b_{i_1}, b_{i_2+k_2}\in\Pi^3$. Однако в этом случае Π^3 содержит и все промежуточные по номерам элементы множества B в силу своей связности. Отсюда следует соотношение $\Pi^1\cup\Pi^2\subset\Pi^3$, что противоречит правильности покрытия Π_B. Таким образом, $T_{\Pi_B}(b_{i_1}, b_{i_2+k_2})=0$. Теперь добавим к этим двум элементам любой элемент из $\Pi^1\cup\Pi^2\setminus T_{\Pi_B}\{b_{i_1}, b_{i_2+k_2}\}\neq\varnothing$ (см. замечание в начале доказательства) и получим нетранзитивную тройку, принадлежащую объединению произвольных двух элементов покрытия Π_B. При этом $b_{i_1}\in\Pi^1\setminus\Pi^2$, $b_{i_2+k_2}\in\Pi^2\setminus\Pi^1$. Свойство 1 доказано.

Свойство 2. Если произвольное покрытие Π_B удовлетворяет условию, согласно которому для любой пары $\Pi^1,\Pi^2\in\Pi_B$ существует нетранзитивная тройка, принадлежащая их объединению, то покрытие Π_B является правильным.

Доказательство. Действительно, допустим существование неправильного элемента покрытия Π_B. Это означает, что он вложен в другой элемент, т.е. $\Pi^1,\Pi^2\in\Pi_B$ и $\Pi^1\subseteq\Pi^2$. Тогда их объединение $\Pi^1\cup\Pi^2=\Pi^2$ и любые три элемента множества B попадают в один элемент покрытия, т.е. тройка по определению σ является транзитивной. Получим противоречие. Свойство 2 доказано.

Свойство 3. Произвольное разбиение конечного множества B является упорядоченно-связным покрытием.

Доказательство. Фактически это можно доказать по индукции относительно количества элементов множества B. База индукции очевидно присутствует, поскольку если множество B имеет один или два элемента, то любое разбиение (заметим, что элементы разбиения не пересекаются) состоит из одного или двух элементов. Очевидно, что при любой нумерации эти элементы являются связными.

Теперь допустим, что для всех конечных множеств мощности n указанное свойство выполняется. Рассмотрим множество B, для которого $|B|=n+1$, и его собственное подмножество $C\subset B$ мощности n. Данное разбиение остается разбиением, покрывающим множество $C=B\setminus\{b\}$, где b — какой-то элемент B, который отличает C от B, поскольку его мощность на единицу меньше. Допустим, что элемент b принадлежит Π' — элементу первоначального разбиения Π_B. Изменяем Π', исключив из него b. Тогда новое разбиение покроет C и будет упорядоченно-связным по предположению индукции, так как $|C|=n$. Значит, существует нумерация элементов множества C, при которой $\Pi'\setminus\{b\}$ — связный элемент:

$$\Pi'\setminus\{b\}=\{b_i, b_{i+1},\ldots, b_{i+s}\}.$$

Присвоим элементу b номер $i+s+1$, а все номера элементов после $i+s$ сдвинем на единицу. Тогда связность любого элемента разбиения не изменится, но оно уже будет покрывать множество B, мощность которого $n+1$. Таким образом, справедлив индуктивный переход. Свойство 3 доказано.

Определение 7. Назовем произвольное бинарное отношение F_{Π} функциональным на множестве A, если оно строится на базе следующей конструкции:

а) есть некоторая функция $g: A \to B$, B — произвольное множество;

б) на множестве B задано произвольное покрытие Π, тогда $F_{\Pi}(a_1, a_2) = 1$, найдется хотя бы один элемент покрытия $\Pi' \in \Pi$, для которого $g(a_1)$, $g(a_2) \in \Pi'$, где $a_1, a_2 \in A$, $g(a_1), g(a_2) \in B$. Из этих определений вытекает, что произвольное функциональное отношение является отношением толерантности (обратное утверждение в общем случае неверно). Действительно, из определения 7 очевидно следует рефлексивность и симметричность отношения F_{Π}.

Исходное отношение, задающееся равенством (1), является функциональным.

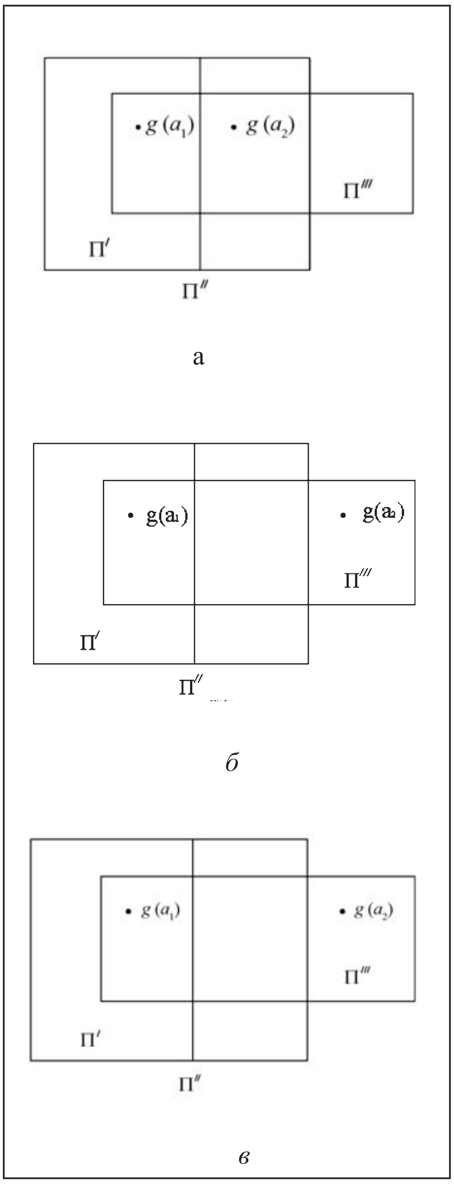


Рис. 2

Утверждение 2. Функциональное отношение не изменится, если из покрытия Π, его индуцирующего, будут исключены все неправильные элементы.

Доказательство. Рассмотрим произвольный неправильный элемент $\Pi' \in \Pi$ (если таких не существует, то доказательства не требуется). Тогда найдется хотя бы один элемент $\Pi'' \in \Pi$, для которого имеет место вложение $\Pi' \subset \Pi''$. Допустим, что после удаления из покрытия Π элемента Π' для какой-то пары a_1, a_2 элементов из A произошло изменение отношения F, т.е. $F_{\Pi}(a_1, a_2) \neq F_{\Pi \setminus \{\Pi'\}}(a_1, a_2)$. Если это изменение произошло с 0 на 1, то приходим непосредственно к противоречию, поскольку $g(a_1), g(a_2) \in B$ одновременно принадлежали разным элементам покрытий Π и после изъятия любого элемента покрытия относительно Π' никаких изменений не произойдет. Изменение отношения F с 1 на 0 может произойти в случае добавления какого-то элемента, содержащего $g(a_1)$ и $g(a_2)$. Таким образом, изменение может произойти только в толерантных элементах отношения F_{Π}. Значит, существует $\Pi''' \in \Pi$, для которого $g(a_1), g(a_2) \in \Pi'''$. Тогда если $\Pi''' \cap \Pi' = \varnothing$, то изъятие элемента ситуации не меняет, так как $g(a_1), g(a_2) \notin \Pi'$. Если же $\Pi''' \cap \Pi' \neq \varnothing$, то изменение отношения F может произойти только тогда, когда хотя бы один из элементов $g(a_1), g(a_2) \in B$ попадет в пересечение $\Pi''' \cap \Pi'$. Свойство симметрии отношения толерантности приводит к трем вариантам:

1) $g(a_1), g(a_2) \in \Pi' \cap \Pi'' \cap \Pi'''$ (рис 2, *а*);

2) $g(a_1), g(a_2) \in \Pi'' \cap \Pi'''$, $g(a_1) \in \Pi' \cap \Pi'' \cap \Pi'''$ (рис 2, *б*);

3) $g(a_1), g(a_2) \in \Pi'''$, $g(a_1) \in \Pi' \cap \Pi'' \cap \Pi'''$ (рис 2, *в*).

Как видим, отбрасывание элемента Π' из покрытия Π сохраняет элемент Π''', содержащий $g(a_1)$ и $g(a_2)$. Таким образом, $F_{\Pi \setminus \{\Pi'\}}(a_1, a_2) = 1$, т.е. изменения отношения F с 1 на 0 также не произошло, что доказывает исходное утверждение.

Известно, что любое бинарное отношение T, заданное на конечном множестве A, допускает представление в матричном виде, т.е. ему однозначно соответствует квадратная матрица $I(T)$ размера $n \times n$, где $|A| = n$ — число элементов множества или его мощность. При этом

$$I(T) = (\sigma_{ij})_{i, j = \overline{1, n}}, \tag{3}$$

где $\sigma_{ij} = 1$ тогда и только тогда, когда $T(a_1, a_j) = 1$, a_i, $a_j \in A$.

В общем случае, а также тогда, когда отношение T — функционально, классы образов (прообразов) и классы толерантности не совпадают. Рассмотрим следующий пример.

Пример 1. Возьмем в качестве множеств A и B следующие наборы натуральных чисел:

$$A = \{1,2,3,4,5,6\}, \; B = \{7,8,9,10,11\}.$$

Зададим функцию $f: A \to B$, которую представим в табличном виде.

A	1	2	3	4	5	6
$f(a) \in B$	7	8	9	10	11	11

Здесь $f(1) = 7$, $f(2) = 8$, $f(3) = 9$, $f(4) = 10$, $f(5) = f(6) = 11$. Представим также покрытие $\Pi_B = \{\Pi_1^B, \Pi_2^B, \Pi_3^B\}$, состоящее из трех элементов, где $\Pi_1^B = \{7,8\}$, $\Pi_2^B = \{8,9,10\}$, $\Pi_3^B = \{9,10,11\}$. Заметим, что сразу задано правильное покрытие, поскольку, как следует из утверждения 2, без ограничения общности можно всегда его таковым сделать. Тогда покрытие индуцирует функциональное, толерантное отношение, которое можно представить таблицей (рис. 3, *а*) или в матричном виде (рис. 3, *б*).

$E_{\Pi_B}(I, j)$		A					
		1	2	3	4	5	6
A	1	1	1	0	0	0	0
	2	1	1	1	1	0	0
	3	0	1	1	1	1	1
	4	0	1	1	1	1	1
	5	0	0	1	1	1	1
	6	0	0	1	1	1	1

а

$$I(E_{\Pi_B}) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

D_1

D_2

D_3

б

Рис. 3

Для этого отношения классы образов и прообразов, совпадающие один с другим (в терминологии [6] — смежные классы), таковы:

$$
\begin{array}{c}
\mathrm{E}_{\Pi_B 1} = \mathrm{E}^{-1}_{\Pi_B 1} = \{1,2\}, \\
\mathrm{E}_{\Pi_B 2} = \mathrm{E}^{-1}_{\Pi_B 2} = \{1,2,3,4\}, \\
\mathrm{E}_{\Pi_B 3} = \mathrm{E}^{-1}_{\Pi_B 3} = \{2,3,4,5,6\}, \\
\| \\
\mathrm{E}_{\Pi_B 4} = \mathrm{E}^{-1}_{\Pi_B 4} = \{2,3,4,5,6\}, \\
\mathrm{E}_{\Pi_B 5} = \mathrm{E}^{-1}_{\Pi_B 5} = \{3,4,5,6\}, \\
\| \\
\mathrm{E}_{\Pi_B 6} = \mathrm{E}^{-1}_{\Pi_B 6} = \{3,4,5,6\},
\end{array} \tag{4}
$$

а классы толерантности имеют вид

$$D_1 = \{1,2\},\ D_2 = \{2,3,4\},\ D_3 = \{3,4,5,6\}. \tag{5}$$

Сравнивая подмножества A, выраженные равенствами (4), (5), наблюдаем лишь частичное их совпадение один с другим.

Естественно, возникает вопрос: когда смежные классы и классы толерантности отношений совпадают, каковым является изначально интересующее нас отношение $E(a_1, a_2)$, заданное равенством или условием (1)? Ответ дает следующая теорема.

Теорема 1. Для функционального, толерантного отношения F_{Π_B}, заданного на множестве A, индуцированном функцией f из A в некоторое множество B, т.е. $f: A \to$, и некоторым упорядоченно-связным покрытием Π_B множества B. Для любого элемента $a \in A$ смежный класс или класс образов и прообразов является классом толерантности тогда и только тогда, когда покрытие Π_B является разбиением, т.е. его элементы не пересекаются.

Доказательство. Достаточность. Пусть Π_B — разбиение. Рассмотрим произвольный класс образов $F_{\Pi_B a}$ любого элемента $a \in A$ и два ему принадлежащих произвольных элемента $a_1, a_2 \in F_{\Pi_B a}$. Тогда, исходя из определения класса образов, имеем

$$F_{\Pi_B}(a, a_1) = F_{\Pi_B}(a, a_2) = 1. \tag{6}$$

Из функциональности отношения F_{Π_B} вытекает, что найдутся два элемента покрытия Π_B, допустим Π^B_i и Π^B_j, для которых

$$f(a_1), f(a) \in \Pi^B_i,\ f(a_2), f(a) \in \Pi^B_j. \tag{7}$$

Поскольку отображение f находится в множестве B, то элемент $f(a) \in B$ лежит в пересечении $\Pi^B_i \cap \Pi^B_j$, что следует из принадлежностей (7). Однако два элемента разбиения пересекаются только в случае их совпадения. Это означает, что $\Pi^B_i = \Pi^B_j$, но тогда $f(a_1), f(a_2) \in \Pi^B_i$, т.е. принадлежат одному элементу покрытия. Однако это свидетельствует об их толерантности или о том, что класс образов F_{Π_B} является предклассом, толерантным к элементу a. Тогда любое множество, включающее его, содержит элемент, не толерантный к a, т.е. не является предклассом. Таким образом, произвольный класс образов или смежный класс является классом толерантности. Достаточность доказана.

Необходимость. Допустим, что для произвольного элемента $a \in A$ класс образов $F_{\Pi_B a}$ является классом толерантности. Докажем, что в этом случае Π_B будет разбиением.

Доказательство будем вести от противного. Предположим, что Π_B — не разбиение. Тогда найдутся два неравных элемента Π_i^B и Π_j^B покрытия Π_B, пересечение которых не пусто (т.е. $\Pi_i^B \cap \Pi_j^B \neq \varnothing$) и которое содержит элемент $b \in \Pi_i^B \cap \Pi_j^B$, $b \in B$. При этом $f : A \to \mathbf{R}$, тогда найдется элемент $a \in A$, для которого $f(a) = b$, что означает

$$f(a) \in \Pi_i^B \cap \Pi_j^B. \tag{8}$$

С другой стороны, $\Pi_i^B \neq \Pi_j^B$ и покрытие Π_B — правильное и упорядоченно-связное. Тогда, исходя из свойства 1, для элементов покрытия Π_i^B и Π_j^B найдется нетранзитивная тройка. Причем, как видно из доказательства свойства 1, в случае их пересечения искомая нетранзитивная тройка (при соответствующей нумерации) содержит элемент b из пересечения $\Pi_i^B \cap \Pi_j^B$, а также два элемента — b_1 и b_2, которые обладают свойством

$$b_1, b \in \Pi_i^B, \quad b_2, b \in \Pi_j^B. \tag{9}$$

При этом не существует элемента покрытия Π_B, которому b_1, b_2 принадлежали бы.

Элементы b_1 и b_2 имеют прообразы при отображении f — элементы множества A. Обозначим их a_1 и a_2. Для них будут выполняться условия $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2$. Из соотношений (9) и последних двух равенств имеем

$$F_{\Pi_B}(a_1, a) = F_{\Pi_B}(a_2, a) = 1, \; F_{\Pi_B}(a_1, a_2) = 0,$$

но это невозможно, поскольку $F_{\Pi_B a}$ — класс прообразов, содержащий a_1 и a_2, который является классом толерантности, т.е. $F_{\Pi_B a}(a_1, a_2) = 1$. Таким образом, получено противоречие. Необходимость доказана.

На основании теоремы 1 можно сделать важный (на наш взгляд) вывод: если образ функции f, т.е. множество B, разбито правильно, а не произвольно покрыто, то объединение линий уровня представляет собой классы толерантности, т.е. множества, сходные по каким-то признакам. Такие ситуации зачастую имеют место в задачах классификации и распознавания [7].

Из теоремы вытекают очевидные следствия.

Следствие 1. Для любого функционального отношения, порожденного разбиением, понятия смежного класса и класса толерантности совпадают. Верно и обратное утверждение.

Следствие 2. Для любого функционального отношения покрытия Π_A (из смежных классов) и G_A (из классов толерантности) совпадают тогда и только тогда, когда это отношение порождено разбиением.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный в статье подход основан на предположении, что толерантность порождается некоторой функцией на множестве, что является важным частным случаем, но не самым общим способом задания отношения толерантности. Данная работа связана с изучением покрытий, порождаемых отношением сходства или отношением толерантности. Подобные вопросы часто возникают в задачах распознавания образов, геометрического проектирования, комбинаторной геометрии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зиман Э., Бьюнеман О. Толерантные пространства и мозг // На пути к теоретической биологии. — М.: Мир, 1970. — С. 52–68.
2. Шрейдер Ю.А. Равенство, сходство, порядок. — М.: Мир, Наука, 1971. — 254 с.
3. Шрейдер Ю.А. Пространства толерантности // Кибернетика. — 1970. — № 2. — С. 124–128.
4. Якубович С.М. Аксиоматическая теория сходства // НТИ. Сер.2. — 1968. — № 10. — С. 15–19.
5. Герасин С.Н., Скляр Е.В., Шляхов В.В. Об одном свойстве отношения толерантности // Доп. НАН УкраВни. — 2003. — № 12. — С. 58–62.
6. Мальцев А.И. Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970. — 392 с.
7. Машталир В.П., Шляхов В.В., Яковлев С.В. Свойства многозначных отображений в задачах распознавания // Доп. НАН УкраВни. — 2000. — № 12. — С. 72–76.

Поступила 17.04.2007