УДК 519.21

А.А. ФОМИН-ШАТАШВИЛИ, А.Д. ШАТАШВИЛИ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ЭФФЕКТИВНОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ОЦЕНОК В ЗАДАЧАХ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ. II[1]

Ключевые слова: *экстраполяция, прогноз, мера, плотность Радона–Никодима, эволюционные дифференциальные уравнения, корреляционный оператор.*

Настоящая статья является продолжением исследований авторов, начатые в работе [1]. Полученные результаты теоремы 1 используем при вычислении оптимального прогноза для решения нелинейного эволюционного дифференциального уравнения с гауссовым возмущением в правой части вида

$$\frac{dy(t)}{dt} - A(t)\,y(t) + A_1(t)y(t) + \alpha\cdot f(t,\, y(t)) = \xi(t),$$
$$0 \le t \le a, \;\; y(0) = \xi(0) = 0 \;\; (\mathrm{mod}\, P), \tag{1}$$

рассмотренного во введении к статье [1]. Такие уравнения изучались одним из соавторов Т.А. Фоминой в работах [3–8], где были найдены условия существования и единственности решений таких уравнений, эквивалентности мер, порожденных этими решениями с гауссовскими возмущениями, а также, что самое главное, условия для существования их плотностей Радона–Никодима и явное выражение плотностей в терминах коэффициентов рассматриваемых уравнений. Следовательно, результаты теоремы 1 из [1] могут быть эффективно применены к решениям эволюционных дифференциальных уравнений вида (1). Сформулируем теперь саму задачу.

Пусть $\{\Omega, \wp, P\}$ — фиксированное вероятностное пространство; H — сепарабельное вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением (x, y) и нормой $\|x\|$, $x, y \in H$; $\wp_H$ — σ-алгебра измеримых подмножеств пространства H. Далее $L_2 = L_2\{[0, a], H\}$ будем обозначать пространство функций, определенных на отрезке $[0, a]$ со значениями из H и интегрируемых со своим квадратом по норме H. Очевидно, что L_2 является гильбертовым пространством. Обозначим в пространстве L_2 скалярное произведение через $(f, g)_L$ и норму через $\|f\|_L$, $f, g \in L_2$, и введем их таким образом:

$$(f, g)_L = \int_0^a (f(t), g(t))dt, \;\; \|f\|_L^2 = \int_0^a \|f(t)\|^2\, dt,$$

где $f, g \in L_2$, $f(t), g(t) \in H$.

Пусть $B(t, s)$ — операторная функция, действующая при каждом $t, s \in [0, a]$ в пространстве H. Обозначим через $|B(t, s)|$ норму операторной функции в пространстве H. Известно, что операторная функция $B(t, s)$ как ядро порождает в пространстве L_2 интегральный оператор $\boldsymbol{B}$ по следующему принципу:

$$(\boldsymbol{B}\varphi)_t = \int_0^a B(t, s)\varphi(s)ds, \;\; \varphi \in L_2. \tag{2}$$

Обозначим в L_2 норму оператора $\boldsymbol{B}$ через $|\boldsymbol{B}|_L$ по следующему принципу:

$$|\boldsymbol{B}|_L^2 = \int_0^a \int_0^a |B(t, s)|^2\, dtds < \infty. \tag{3}$$

[1]Начало см. в № 3, 2008.

Норма оператора, определенная по формуле (3), называется гильберто-шмидтовской нормой, а оператор $\boldsymbol{B}$, обладающий такой нормой, называется оператором Гильберта–Шмидта.

Рассмотрим в гильбертовом пространстве H систему из двух эволюционных дифференциальных уравнений: нелинейного

$$\frac{dy(t)}{dt} - A(t)\,y(t) + A_1(t)\,y(t) + \alpha f(t,\, y(t)) = \xi(t), \tag{4}$$

$$0 \le t \le a, \;\; y(0) = \xi(0) = 0 \;\; (\operatorname{mod} P),$$

и линейного к нему

$$\frac{dx(t)}{dt} - A(t)x(t) + A_1(t)\,x(t) = \xi(t), \tag{5}$$

$$0 \le t \le a, \;\; x(0) = \xi(0) = 0 \;\; (\operatorname{mod} P),$$

где α — параметр, а неограниченные линейные операторные функции $A(t)$ и $A_1(t)$ являются производящими операторами эволюционных семейств ограниченных операторов $U(t,s)$ и $U_1(t,s)$. Нелинейная функция $f(t,x)$ и гауссовский процесс $\xi(t)$ со значениями из H удовлетворяют условиям, приведенным во введении статьи [1], а также условиям теорем 3.1.1 из работы [2]. При соблюдении условий указанных теорем в той же работе показано, что тогда меры μ_y и μ_x, порожденные решениями уравнений (4) и (5), эквивалентны и эффективно вычисляются соответствующие плотности Радона–Никодима в терминах коэффициентов рассматриваемых уравнений. Следует заметить, что поскольку уравнение (5) линейно, то очевидно его решение $x(t)$ является гауссовым случайным процессом, так как $\xi(t)$ — гауссовский случайный процесс, и очевидно, что $Mx(t) = 0$, а $\boldsymbol{R}_x^2$ — корреляционный оператор гауссовского элемента x в L_2 определяется с использованием известных величин коэффициентов самого уравнения:

$$\boldsymbol{R}_x^2 = \boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{R}_\xi^2 \boldsymbol{B}_1^*, \;\; \boldsymbol{B}_1 = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{U}_1)^{-1} \boldsymbol{U}, \tag{6}$$

где $\boldsymbol{R}_\xi^2$ — корреляционный оператор гауссовского элемента ξ, символ * обозначает знак сопряженного оператора.

Для получения основных результатов настоящей статьи необходимо привести результаты теоремы 3.1.1 работы [2] хотя бы в общих чертах.

Обозначим $\{\varphi_k(t)\}$ и $\{\lambda_k\}$ соответственно собственные функции и собственные числа корреляционной операторной функции $R_x^2(t,s)$ корреляционного оператора $\boldsymbol{R}_x^2$ гауссовского элемента x в L_2. С их помощью построим новую систему ортонормированных функций $\{\psi_k(t)\}$ по формуле

$$\psi_k(t) = \frac{1}{\lambda_k} \varphi_k(t). \tag{7}$$

Далее рассмотрим систему эволюционных дифференциальных уравнений вида (4) и (5) со следующими условиями.

1. Операторы $A(t)$ и $A_1(t)$ являются семейством линейных, вообще говоря, неограниченных операторов с плотной, независимой от t областью определения $D(A) \subseteq H$. Одновременно они являются производящими операторами эволюционных семейств $U(t,s)$ и $U_1(t,s)$ ограниченных операторов при $0 \le t, s \le a$, действующих в H, сильно непрерывно зависящих от t и s, причем

$$U_1(t,s) = U(t,s)\,A_1(s), \tag{8}$$

для которых выполняются условия

$$\int_0^a\!\!\int_0^a |U(t,s)|^2\, dtds < \infty \;\; \text{и} \;\; \int_0^a\!\!\int_0^a |U_1(t,s)|^2\, dtds < \infty. \tag{9}$$

Это означает, что соответствующие интегральные операторы $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{U}_1$, действующие в гильбертовом пространстве L_2, являются операторами Гильберта–Шмидта и, кроме того, число -1 не принадлежит спектру оператора $U_1(t,s)$.

2. Нелинейная функция $f(t, y(t))$, определенная на $[0,a]\times H$, принимает свои значения из H, является интегрируемой функцией со своим квадратом по норме H для всех $y(t)\in H$ и дифференцируема по y, при этом производная $f'_y(t, y(t))$ для всех $t\in[0,a]$ является оператором Гильберта–Шмидта, действующим в H.

Как уже отмечалось, в работах [3–8] было показано, что между решениями $y(t)$ и $x(t)$ дифференциальных уравнений (4) и (5) соответственно существует связь в виде нелинейных отображений

$$Sy(t):\ y(t)+\alpha\int_0^a R_x(t,s)g(s, y(s))\,ds = x(t), \tag{10}$$

$$Tx(t):\ x(t)+\alpha\int_0^a R_x(t,s)\widetilde{g}(s,x(s))\,ds = y(t), \tag{11}$$

где выводятся достаточные условия, при выполнении которых нелинейные отображения S и T взаимно однозначны, обратимы и голоморфны: $S=T^{-1}$, где $R_x^2(t,s)$ — корреляционная операторная функция гауссовского случайного процесса $x(t)$, а функции $g(\cdot,x)$ и $\widetilde{g}(\cdot,x)$ удовлетворяют соотношению

$$\widetilde{g}(\cdot,x)=-g(\cdot,Tx) \tag{12}$$

и определяются из выражения

$$\alpha\int_0^a\int_0^a (I+U_1(t,s))^{-1}U(s,u)\,f(u, y(u))\,ds\,du=\alpha\int_0^a R_x(t,s)g(s, y(s))\,ds. \tag{13}$$

В работах [2–8] выводятся условия, при выполнении которых доказывается существование и единственность решений $y(t)$ и $x(t)$ дифференциальных уравнений (4) и (5) соответственно, существование функций $g(\cdot,x)$ и $\widetilde{g}(\cdot,x)$ и строится их явный вид через коэффициенты заданных уравнений. Таким же способом строится винеровская мера $w(t)$ по корреляционной операторной функции $R_x^2(t,s)$ и самим гауссовским случайным процессом $x(t)$ как соотношение

$$x(t)=\int_0^a R_x(t,s)\,dw(s) \tag{14}$$

и по этой мере строится расширенный стохастический интеграл для функции $g(\cdot,x)$ (аналогично для $\widetilde{g}(\cdot,x)$ в силу (12))

$$\int_0^a \langle g(t,x(t)), dw(t)\rangle \ \text{и}\ \int_0^a \langle \widetilde{g}(t,x(t)), dw(t)\rangle, \tag{15}$$

доказывается их сходимость и выводится их явный вид в выражениях коэффициентов рассматриваемых уравнений. Далее также классическим способом при выполнении некоторых дополнительных ограничений, наложенных на коэффициенты рассматриваемых уравнений, доказывается, что меры μ_y и μ_x, порожденные решениями $y(t)$ и $x(t)$ соответственно, эквивалентны ($\mu_y\sim\mu_x$) и в явном виде выписывается плотность Радона–Никодима $\frac{d\mu_y}{d\mu_x}(z)=\rho_a(z)$ и $\frac{d\mu_x}{d\mu_y}(z)=\widetilde{\rho}_a(z)$;

например,

$$\rho_a(z)=\widetilde{D}(z)\exp\left\{-\alpha\int_0^\alpha\langle\widetilde{g}(t, z(\cdot)), dw(t)\rangle-\frac{\alpha^2}{2}\int_0^a \|\widetilde{g}(t, z(\cdot))\|^2\,dw(t)\right\}, \tag{16}$$

где функциональный определитель $\widetilde{D}(z)$ вычисляется в явном виде через коэффициенты уравнений (4) и (5). Аналогичный вид имеет формула плотности $\widetilde{\rho}_a(z)$ через функцию $g(\cdot, x)$ и функциональный определитель $D(z)$. В том случае, когда кроме принятых ограничений также известно, что имеет место

$$\int_0^a \operatorname{Sp} b'_z(t, z(\cdot))\, dt < \infty, \tag{17}$$

где

$$b'(t, z(\cdot)) = \int_0^a \int_0^a (I + U_1(t, s))^{-1} U(s, u)\, f'_z(u, z(u))\, ds du, \tag{18}$$

тогда функциональные определители $D(z)$ и $\widetilde{D}(z)$ (см. [9, 10]) принимают вид

$$D(z) = \exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^a \operatorname{Sp} b'_z(t, z(\cdot))\, dt\right\} \text{ и } \widetilde{D}(z) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^a \operatorname{Sp} b'_z(t, z(\cdot))\, dt\right\} \tag{19}$$

и в этом случае выражения плотностей Радона–Никодима значительно упрощаются (см. [2]).

Возвращаемся теперь к нашей основной задаче — нахождение оптимальной оценки $\widetilde{y}(t)$ в задачах экстраполяции для решения нелинейного дифференциального уравнения (4) $y(t)$ в точке $t = T + h,\ \ h > 0$, при условии, что его траектория наблюдается до момента $t = T,\ \ y(\cdot)|_0^T$. Для этого можно воспользоваться формулой (19) из статьи [1].

Таким образом, если для системы дифференциальных уравнений (4) и (5) выполнены условия теоремы 3.1.1 (см. [2]), то меры μ_y и μ_x эквивалентны ($\mu_y \sim \mu_x$) и в явном виде по формуле (16) выписывается плотность Радона–Никодима, где выражения $\widetilde{D}(z)$, $\int_0^a \langle g(t, x(t)), dw(t)\rangle$ и $\int_0^a \|g(t)\|^2\, dt$ вычисляются в терминах коэффициентов заданных уравнений. Поэтому с учетом формулы (12) из статьи [1] сначала запишем цепочку равенств для оптимального прогноза $\widetilde{y}(T + h)$ с использованием плотности $\rho_a(z)$

$$\widetilde{y}(T+h) = M\{y(T+h)/\wp_T\} =$$

$$= \frac{1}{\rho_T(y(\cdot)|_0^T)} M^{(x)}\{x(T+h)\rho_{T+h}(x(\cdot))/\wp_T^*\}|_{x(\cdot) = y(\cdot)|_0^T}, \tag{20}$$

где $\wp_T$ и $\wp_T^*$ — σ-алгебры, порожденные поведением случайных процессов $y(t)$ и $x(t)$ соответственно при $t \le T$. Подставив в (20) значения $\rho_T(\cdot)$ и $\rho_{T+h}(\cdot)$, по формуле (16) при $a = T$ и $a = T + h$ получим

$$\widetilde{y}(T+h) = \frac{1}{\rho_T(y(\cdot)|_0^T)} M^{(x)} \times$$

$$\times \left\{ x(T+h)\widetilde{D}(x(\cdot)|_0^{T+h}) \exp\left[-\alpha \int_0^{T+h} \langle g(t), dw(t)\rangle - \frac{\alpha^2}{2}\int_0^{T+h} \|g(t)\|^2\, dt\right] / \wp_T^* \right\} =$$

$$= \frac{1}{\rho_T(y(\cdot)|_0^T)} M^{(x)} \left\{ x(T+h)\widetilde{D}(x(\cdot)|_0^{T+h}) \exp\left[-\alpha\int_0^a \langle g(t), dw(t)\rangle - \frac{\alpha^2}{2}\int_0^T \|g(t)\|^2\, dt\right] \times\right.$$

$$\times \exp\left[-\alpha \int\limits_{T}^{T+h} \langle g(t), dw(t)\rangle - \frac{\alpha^2}{2}\int\limits_{T}^{T+h} \|g(t)\|^2\, dt\right] / \wp_T^* \Bigg\}\Bigg|_{x(\cdot)=\, y(\cdot)|_0^T} =$$

$$= M^{(x)}\left\{ x(T+h)\frac{\widetilde{D}(x(\cdot)|_0^T)}{D(x(\cdot)|_0^T)} \exp\left[-\alpha \int\limits_{T}^{T+h} \langle g(t), dw(t)\rangle -\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\alpha^2}{2}\int\limits_{T}^{T+h} \|g(t)\|^2\, dt\right] / \wp_T^* \right\}\Bigg|_{x(\cdot)=\, y(\cdot)|_0^T} . \qquad (21)$$

Таким образом, оптимальная оценка решения уравнения (4) имеет вид

$$\widetilde{y}(T+h) = M^{(x)}\left\{ x(T+h)\frac{\widetilde{D}(x(\cdot)|_0^T)}{D(x(\cdot)|_0^T)} \times\right.$$

$$\left.\times \exp\left[-\alpha \int\limits_{T}^{T+h} \langle g(t), dw(t)\rangle - \frac{\alpha^2}{2}\int\limits_{T}^{T+h} \|g(t)\|^2\, dt\right] / \wp_T^* \right\}\Bigg|_{x(\cdot)=\, y(\cdot)|_0^T} . \qquad (22)$$

В случае выполнения условия (18) выражение (22) значительно упрощается

$$\widetilde{y}(T+h) = M^{(x)}\left\{ x(T+h)\frac{\exp\left\{\dfrac{\alpha}{2}\int\limits_{0}^{T+h} \mathrm{Sp}\, f_x'(t, x(\cdot))dt\right\}}{\exp\left\{\dfrac{\alpha}{2}\int\limits_{0}^{T} \mathrm{Sp}\, f_x'(t, x(\cdot))dt\right\}} \times\right.$$

$$\left.\times \exp\left[-\alpha \int\limits_{T}^{T+h} \langle g(t),\, dw(t)\rangle - \frac{\alpha^2}{2}\int\limits_{T}^{T+h} \|g(t)\|^2\, dt\right] / \wp_T^* \right\}\Bigg|_{x(\cdot)=\, y(\cdot)|_0^T} =$$

$$= M^{(x)}\left\{ x(T+h)\exp\left\{\frac{\alpha}{2}\int\limits_{T}^{T+h} \mathrm{Sp}\, f_x'(t, x(\cdot))dt\right\} \times\right.$$

$$\left.\times \exp\left[-\alpha \int\limits_{T}^{T+h} \langle g(t),\, dw(t)\rangle - \frac{\alpha^2}{2}\int\limits_{T}^{T+h} \|g(t)\|^2\, dt\right] / \wp_T^* \right\}\Bigg|_{x(\cdot)=\, y(\cdot)|_0^T} . \qquad (23)$$

Пусть, как и выше, $\{\varphi_k(t)\}$ и $\{\lambda_k\}$ — собственные функции и собственные числа корреляционной операторной функции $R_x^2(t,s)$ гауссовского случайного процесса $x(t)$. В работе [2] показано, что расширенный стохастический интеграл $\int\limits_0^a \langle g(t, x(t)), dw(t)\rangle$ и функция $g(t)$ записываются в виде

$$\int\limits_0^a \langle g(t, x(t)), dw(t)\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int\limits_0^a\int\limits_0^a (g(t, x(\cdot)), \varphi_k(t))(x(s), \varphi_k(s))dt ds -$$

$$-\int_0^a\int_0^a\int_0^a (K(s,t,x(\cdot))R_x(t,\nu)\varphi_k(\nu),\,\varphi_k(s))\,dt\,ds\,d\nu =$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^a \left(g(t,x(\cdot)),\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\varphi_k(t)\right)dt\int_0^a (x(s),\varphi_k(s))\,ds-$$

$$-\int_0^a\int_0^a\int_0^a (K(s,t,x(\cdot))R_x(t,\nu)\varphi_k(\nu),\,\varphi_k(s))\,dt\,ds\,d\nu =$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^a (g(t,x(\cdot)),\psi_k(t))\,dt\int_0^a (x(s),\varphi_k(s))\,ds-$$

$$-\int_0^a\int_0^a\int_0^a (K(s,t,x(\cdot))R_x(t,\nu)\varphi_k(\nu),\,\varphi_k(s))\,dt\,ds\,d\nu =$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^a g_k(x(\cdot))(x(s),\psi_k(s))\,ds-$$

$$-\int_0^a\int_0^a\int_0^a (K(s,t,x(\cdot))R_x(t,\nu)\varphi_k(\nu),\,\varphi_k(s))\,dt\,ds\,d\nu, \qquad (24)$$

где

$$g_k(x(\cdot))=\int_0^a b(t,x(\cdot),\psi_k(t))\,dt, \qquad (25)$$

а операторная функция $K(s,t,x(\cdot))$ является ядром интегрального оператора $g'_x(t,x(\cdot))$. Как было показано в работе [2], при выполнении условия

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^a (b(t,x(\cdot),\psi_k(t)))^2\,dt<\infty \qquad (25')$$

существует функция $g(t,x(\cdot))$, которая имеет явный вид

$$g(t,x(\cdot))=\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x(\cdot))\varphi_k(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^a (b(s,x(\cdot)),\psi_k(s))ds\cdot\varphi_k(t), \qquad (26)$$

где ряд в правой части (26) сходится по мере μ_x при выполнении условия (25′). Отсюда очевидно, что квадрат нормы функции $g(t,x(\cdot))$ имеет вид

$$\|g(t,x(\cdot))\|^2=(g(t,x(\cdot)),g(t,x(\cdot)))=\left(\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x(\cdot))\varphi_k(t),\sum_{i=1}^{\infty} g_i(x(\cdot))\varphi_i(t)\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} g_k(x(\cdot))\,g_i(x(\cdot))(\varphi_k(t),\varphi_i(t)). \qquad (27)$$

Поэтому

$$\int_0^a \|g(t,x(\cdot))\|^2\,dt=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} g_k(x(\cdot))\,g_i(x(\cdot))\int_0^a (\varphi_k(t),\varphi_i(t))\,dt=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty} g_k^2(x(\cdot))=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^{\alpha} (b(t,x(\cdot)),\psi_k(t))\,dt\right)^2, \qquad (28)$$

где ряд в правой части (28) сходится по мере μ_x.

Следовательно, плотность Радона–Никодима $\rho_a(x)$ при соблюдении условий теоремы 3.1.2 из [2] и с учетом (18) принимает вид

$$\rho_a(x)=\exp\left\{\frac{\alpha}{2}\int_0^a \operatorname{Sp} f'_x(t,x(\cdot))\,dt-\alpha\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^a g_k(x(\cdot))(x(t),\varphi_k(t))\,dt-\right.$$

$$-\alpha\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^a\int_0^a\int_0^a (K(s,t,x(\cdot))R_x(t,\nu)\varphi_k(\nu),\varphi_k(s))\,dt\,ds\,d\nu-$$

$$\left.-\frac{\alpha^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^a (b(t,x(\cdot)),\psi_k(t))\,dt\right)^2\right\}, \qquad (29)$$

где ряды в правой части (29) сходятся по мере μ_x. Поэтому в данном случае формула оптимального прогноза (23) принимает явный вид в терминах коэффициентов уравнения (4)

$$\tilde{y}(T+h)=M^{(x)}\left[x(T+h)\cdot\exp\left\{\frac{\alpha}{2}\int_T^{T+h}\operatorname{Sp} f'_x(t,x(\cdot))\,dt-\right.\right.$$

$$-\alpha\sum_{k=1}^{\infty}\int_T^{T+h} g_k(x(\cdot))(x(t),\varphi_k(t))\,dt-$$

$$-\alpha\sum_{k=1}^{\infty}\int_T^{T+h}\int_T^{T+h}\int_T^{T+h}(K(s,t,x(\cdot))R_x(t,\nu)\varphi_k(\nu),\varphi_k(s))\,dt\,ds\,d\nu-$$

$$\left.\left.-\frac{\alpha^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_T^{T+h}(b(t,x(\cdot)),\psi_k(t))\,dt\right)^2\right\}/\wp^*\right]\Bigg|_{x(\cdot)=y(\cdot)|_0^T}, \qquad (30)$$

где функция $b(t,x(\cdot))$ определяется по формуле (18), функция $K(s,t,x(\cdot))$ — интегральное ядро оператора Гильберта–Шмидта $b'_x(t,x(\cdot))$, а функционалы $g_k(x(\cdot))$, $k=1,2,\ldots$, определяются из соотношения (25). Таким образом, все величины в правой части (30) известны и определяются через коэффициенты заданных дифференциальных уравнений (4) и (5). Следует учитывать, что $x(t)$ — гауссовский случайный процесс и в интервале $[T,T+h]$ допускает разложение типа (16) из статьи [1], т.е.

$$x(t)=l_T(t)+\varepsilon_T(t),\ \ t\in[T,T+h], \qquad (31)$$

где функция

$$l_T(t)=l_T(t,x(\cdot)|_0^T)=M\{x(t)/\wp_T^*\},\ \ t\in[T,T+h], \qquad (32)$$

является линейным оптимальным прогнозом гауссовского процесса $x(t)$ и, следовательно, $\wp_T^*$-измеримой величиной, а $\varepsilon_T(t)$ — гауссова добавка, которая не зависит от σ-алгебры $\wp_T^*$. Тогда, используя формулы (21), (31), (32), а также результаты теоремы 1 и формул (18), (19) из [1], окончательно получаем алгоритм вычисления оптимального прогноза решения уравнения (4) $y(t)$ в точке $t=T+h$ в следующем виде:

$$\tilde{y}(T+h)=M^{(\varepsilon)}\left[(u_1+\varepsilon_T(T+h))\cdot\exp\left\{\frac{\alpha}{2}\int_T^{T+h}\operatorname{Sp} f'_x(t,u_2+\varepsilon(\cdot))\,dt-\right.\right.$$

$$-\alpha\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{T}^{T+h} g_k(u_2+\varepsilon(\cdot))(l_T(t,u_2+\varepsilon(\cdot)),\varphi_k(t))dt-$$

$$-\alpha\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{T}^{T+h}\int\limits_{T}^{T+h}\int\limits_{T}^{T+h}(K(s,t,u_2+\varepsilon(\cdot))R_x(t,\nu)\varphi_k(\nu),\varphi_k(s))dt\,ds\,d\nu-$$

$$-\frac{\alpha^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int\limits_{T}^{T+h}(b(t,u_2+\varepsilon_T(\cdot)),\psi_k(t))dt\right)^2\Bigg\}\Bigg]\Bigg|_{u_2=l_T(\cdot,\,y(\cdot)|_0^T)}^{u_1=l_T(T+h,\,y(\cdot)|_0^T)}, \tag{33}$$

где величина $y(\cdot)|_0^T$ — кусок наблюдаемой траектории решения уравнения (4) до момента $t=T$, $M^{(\varepsilon)}$ — символ математического ожидания по гауссовой мере μ_ε, которая легко определяется по заданной гауссовой мере μ_x из соотношения (31).

Если теперь допустить, что уравнение (4) содержит малую нелинейность, т.е. если параметр α в уравнении (4) является малым, то очевидно, что используя разложение функции e^x по степеням x, а также что $M^{(\varepsilon)}\varepsilon_T(t)=0$ и $M^{(\varepsilon)}\left\{\int\limits_{T}^{T+h}\langle g(t,x(\cdot)),dw(t)\rangle/\Im_T^*\right\}=0$, положив в разложении функции e^x

$$x=A(\alpha,u_2+\varepsilon_T(\cdot))=\frac{\alpha}{2}\int\limits_{T}^{T+h}\operatorname{Sp} f_x'(t,u_2+\varepsilon(\cdot))dt-$$

$$-\alpha\int\limits_{T}^{T+h}\langle g(t,u_2+\varepsilon_T(\cdot)),dw(t)\rangle-\frac{\alpha^2}{2}\int\limits_{T}^{T+h}\|g(t,u_2+\varepsilon_T(\cdot))\|dt, \tag{34}$$

выражение оптимального прогноза при несложных вычислениях примет вид

$$\widetilde{y}(T+h)=M^{(\varepsilon)}[(u_1+\varepsilon_T(T+h))\cdot\exp\{A(\alpha,u_2+\varepsilon_T(\cdot))\}]\Big|_{u_2=l_T(\cdot,\,y(\cdot)|_0^T)}^{u_1=l_T(T+h,\,y(\cdot)|_0^T)}=$$

$$=M^{(\varepsilon)}\Bigg[(u_1+\varepsilon_T(T+h))\cdot(1+A(\alpha,u_2+\varepsilon_T(\cdot)))+$$

$$+\frac{(A(\alpha,u_2+\varepsilon_T(\cdot)))^2}{2!}+o(\alpha^2)\Bigg]\Bigg|_{u_2=l_T(\cdot,\,y(\cdot)|_0^T)}^{u_1=l_T(T+h,\,y(\cdot)|_0^T)}=$$

$$=l_T(T+h,y(\cdot)|_0^T)+\alpha B_1(l_T(\cdot,y(\cdot)|_0^T))+\frac{\alpha^2}{2}B_2(l_T(\cdot,y(\cdot)|_0^T))+o(\alpha^2). \tag{35}$$

Здесь

$$M^{(\varepsilon)}o(\alpha^2)=o(\alpha^2), \tag{35'}$$

а $B_1(\cdot)$ и $B_2(\cdot)$ соответственно определяются из соотношений

$$B_1(l_T(\cdot,y(\cdot)|_0^T))=\frac{1}{2}l_T(\cdot,y(\cdot)|_0^T)M^{(\varepsilon)}\int\limits_{T}^{T+h}(\operatorname{Sp} f_x'(t,l_T(\cdot,y(\cdot))|_0^T)+\varepsilon_T(\cdot))dt+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{T}^{T+h}M^{(\varepsilon)}(\varepsilon_T(T+h)\cdot\operatorname{Sp} f_x'(t,l_T(\cdot,y(\cdot))|_0^T)+\varepsilon_T(\cdot))dt \tag{36}$$

и

$$B_2(l_T(\cdot, y(\cdot))|_0^T) = \frac{1}{2} M^{(\varepsilon)} \left(\int_T^{T+h} \operatorname{Sp} f'_x(t, l_T(\cdot, y(\cdot)|_0^T) + \varepsilon_T(\cdot)) dt \right)^2 +$$

$$+ 2M^{(\varepsilon)} \left(\int_T^{T+h} \langle g(t, l_T(\cdot, y(\cdot)|_0^T)), dw(t) \rangle \right)^2 +$$

$$+ \int_T^{T+h} \int_T^{T+h} M^{(\varepsilon)} \operatorname{Sp} f'_x(t, l_T(\cdot, y(\cdot)|_0^T)) \langle g(s, l_T(\cdot, y(\cdot)|_0^T)), dw(s) \rangle \, dt + \ldots =$$

$$= \int_T^{T+h} \int_T^{T+h} M^{(\varepsilon)} \operatorname{Sp} f'_x(t, l_T(\cdot, y_T(\cdot)|_0^T) + \varepsilon_T(\cdot)) \cdot \operatorname{Sp} f'_x(s, l_T(\cdot, y_T(\cdot)|_0^T) + \varepsilon_T(\cdot)) dt ds +$$

$$+ \int_T^{T+h} M^{(\varepsilon)} \| g(t, l_T(\cdot, y(\cdot)|_0^T)) \|^2 \, dt -$$

$$- \int_T^{T+h} \int_T^{T+h} M^{(\varepsilon)} (\operatorname{Sp} f'_x(t, l_T(\cdot, y(\cdot))|_0^T) + \varepsilon_T(\cdot)) \langle g(s, l_T(\cdot, y(\cdot)|_0^T)), dw(s) \rangle dt + \ldots \quad (37)$$

Следовательно, оптимальная оценка для определения прогноза решения уравнения (4) $y(t)$ в точке $t = T + h$ при условии, что оно наблюдается в интервале $0 \le s \le T$, допускает разложение по малому параметру α и имеет вид

$$\widetilde{y}(T+h) = l_T(T+h, y(\cdot)|_0^T) + \alpha B_1(l_T(\cdot, y(\cdot)|_0^T)) +$$

$$+ \frac{\alpha^2}{2} B_2(l_T(\cdot, y(\cdot)|_0^T)) + o(\alpha^2), \quad (38)$$

где величины B_1 и B_2 в явном виде вычисляются по формулам (36) и (37). В (38) главным членом разложения является линейный прогноз (экстраполяция) случайного процесса $y(t)$ в точке $t = T + h$ при условии, что он наблюдается до момента $t \le T$.

Следует отметить, что в формуле (37) выражения расширенного стохастического интеграла и квадрата нормы записываются в таком виде для краткости самой формулы. В действительности при практическом вычислении вместо них надо пользоваться их выражениями в коэффициентах заданного дифференциального уравнения (4), а именно формулами (24) и (28) с учетом (25).

Таким образом, из формулы (38) следует, что для вычисления оптимального прогноза для случайного процесса $y(t)$ решения уравнения (4) в точке $t = T + h$ достаточно вычислить его линейный прогноз в той же точке, а затем поправлять его значения с любой точностью малого параметра α по величинам $B_1, B_2, \ldots$, алгоритмы которых в явном виде задаются формулами (36) и (37) и т.д.

В настоящей статье впервые получены общие положения и формулы для вычисления оптимальной оценки в задачах экстраполяции решений нелинейных эволюционных дифференциальных уравнений. Очевидно, что полученные здесь результаты в значительной степени обобщают во многих направлениях ранее известные результаты, например в работах [9–17].

Далее попытаемся использовать полученные здесь формулы и алгоритмы для полного вычисления оптимального прогноза в некоторых задачах естественных наук, например физики, математической физики, а также техники, описываемых с помощью нелинейных эволюционных дифференциальных уравнений с конкретными аналитическими выражениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фомин-Шаташвили А.А., Шаташвили А.Д. Об одном методе эффективного вычисления оптимальных оценок в задачах экстраполяции решений нелинейных эволюционных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве. I // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 3. — С. 149–157.
2. Фомина Т.А. Некоторые линейные и нелинейные эквивалентные преобразования гауссовских мер в гильбертовом пространстве: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Донецк, 2005. — 156 с.
3. Фомина Т.А., Шаташвили А.Д. Об эквивалентности мер при некоторых линейных и нелинейных эволюционных преобразованиях гауссовских процессов в евклидовом и гильбертовом пространствах // Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика. — 2000. — № 2. — С. 105–119.
4. Фомина Т.А., Шаташвили А.Д. Некоторые необходимые и достаточные условия, обеспечивающие эквивалентность двух гауссовских мер, индуцируемых решениями дифференциальных уравнений в евклидовом и гильбертовом пространствах // Там же. — 2002. — № 1. — С. 61–80.
5. Фомина Т.А., Шаташвили А.Д. О мерах, порожденных уравнениями со случайными коэффициентами // Там же. — 2002. — № 2. — С. 61–80.
6. Фомина Т.А., Шаташвили А.Д. Об эквивалентности двух гауссовских мер в евклидовом и гильбертовом пространствах // Случайные операторы и стохастические уравнения. — Utrecht, the Netherlands; Tokyo, Japan. — 2003. — **11,** N 4. — P. 351–371.
7. Фомина Т.А., Сохадзе Г.А., Шаташвили А.Д. Некоторые достаточные условия эквивалентности мер, индуцируемых решениями уравнений со случайными коэффициентами. Случайные операторы и стохастические уравнения // Ibid. — 2003. — **12,** N 3. — P. 267–275.
8. Фомина Т.А., Чкония Т.Г., Шаташвили А.Д. Некоторые замечания об абсолютной непрерывности распределений решений различных краевых задач // Теория случайных процессов. — 1998. — Вып. 4(20). — № 1, 2. — С. 95–104.
9. Шаташвили А.Д. Прогноз и фильтрация функционалов от решений нелинейных дифференциальных уравнений со случайными функциями // Докл. АН СССР. — 1970. — **194,** № 1. — С. 35–37.
10. Шаташвили А.Д. О плотностях мер, соответствующих решениям некоторых дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами // Там же. —1970. — **194,** № 2. — С. 275–277.
11. Шаташвили А.Д. Об одном классе абсолютно непрерывных нелинейных преобразований гауссовских мер // Труды ВЦ АН ГССР. — 1965. — **5,** № 1. — С. 69–105.
12. Шаташвили А.Д. Абсолютная непрерывность гауссовских мер в некоторых функциональных пространствах // Сообщения АН ГССР. — 1966. — **11,** № 2. — С. 277–284.
13. Шаташвили А.Д. О плотностях мер, соответствующих решениям стохастических дифференциальных уравнений, находящихся под воздействием гауссовских процессов // Труды ВЦ АН ГССР. — 1966. — **7,** № 1. — С. 43–58.
14. Шаташвили А.Д. Условия абсолютной непрерывности мер, соответствующих решениям систем дифференциальных уравнений, находящихся под воздействием гауссовских процессов.// Математическая физика. — 1967. — № 4. — С. 198–199.
15. Шаташвили А.Д. Об оптимальном прогнозировании для некоторого класса случайных процессов // Теор. вероятностей и мат. статистика. — 1970. — Вып. 1. — С. 222–239.
16. Шаташвили А.Д. Оптимальная экстраполяция и фильтрация для одного класса случайных процессов. I // Там же. — 1970. — Вып. 2. — С. 235–253.
17. Шаташвили А.Д. Оптимальная экстраполяция и фильтрация для одного класса случайных процессов. II // Там же. — 1970. — Вып. 3. — С. 211–231.

Поступила 25.05.2007