УДК 519.85

О.А. ЕМЕЦ, Н.Ю. УСТЬЯН

ИГРЫ С КОМБИНАТОРНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Ключевые слова: *критерии принятия решений, «игры с природой», оптимальная стратегия, задача оптимизации на перестановках, комбинаторная оптимизация.*

Принятие решений в условиях неопределенности является важной задачей, ведь много экономических процессов представляют собой конфликтные ситуации, в которых участники достигают своих целей различными путями, и никто из них не знает заранее, как поступит другой. Такие ситуации изучает теория игр (см., например, [1–7]), задача которой — выработать рекомендации, как лучше всего себя вести в конкретной ситуации.

В работах [8–12] сформулирован и изучен новый класс игровых задач — задачи комбинаторной оптимизации игрового типа, в которых один или оба игрока имеют комбинаторные ограничения на использование своих стратегий. Для решения многих классов задач комбинаторной оптимизации разработаны методы [13–30], которые можно использовать и для решения задач комбинаторной оптимизации игрового типа, в частности метод комбинаторного отсечения для комбинаторных задач на перестановках и размещениях [24–30] можно использовать для нахождения оптимальной стратегии игрока, который имеет комбинаторные ограничения.

Среди задач комбинаторной оптимизации игрового типа рассматривались такие, где на стратегии одного игрока накладываются комбинаторные ограничения, которые определяются перестановками, а другим игроком выступает природа [12]. Такие задачи можно рассматривать как специфические «игры с природой» (см., например, [6, 7]). В классической теории игр для решения таких задач рассматриваются различные критерии, а не только максиминный, который использовался для нахождения решений задач комбинаторной оптимизации игрового типа в [12]. Использование того или иного критерия при принятии решения в конфликте для каждой конкретной ситуации позволит найти наиболее адекватный вариант действий игрока, поэтому целесообразно рассмотреть применения известных критериев для задач комбинаторной оптимизации игрового типа.

В настоящей статье исследуется использование различных известных критериев принятия решений для задач комбинаторной оптимизации игрового типа, где на стратегии одного игрока накладываются комбинаторные ограничения, которые определяются перестановками, а другим игроком выступает природа. Изучено нахождение оптимальной стратегии игрока при использовании каждого критерия.

В [12] сформулирована экономическая задача сельскохозяйственного производства.

Задача. Фермерское хозяйство выращивает m видов сельскохозяйственных культур на своих m полях. Поля имеют разную площадь, поэтому количество каждой выращенной культуры зависит от того, на каком именно поле она посажена. Кроме того, урожайность каждого вида культуры, а значит, и прибыль хозяйства зависят от погоды. Нужно разработать оптимальный в некотором смысле план выращивания культур.

Данная задача рассматривалась как антагонистическая игра двух игроков: хозяйство и природа, и была получена следующая математическая модель.

Найти $\vartheta = F(X_{i_1}, Y_{j_2})$, где:

- X_{i_1} находится из выражения $F(X_{i_1}, Y_{j_1}) = \max\limits_i \min\limits_j F(X, Y)$;
- Y_{j_2} — из выражения $F(X_{i_2}, Y_{j_2}) = \min\limits_j \max\limits_i F(X, Y)$;

• функция $F(X,Y)$ имеет вид $F(X,Y)=\sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j$;

• матрица $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ — это матрица, в которой элемент a_{ij} — это прибыль хозяйства в том случае, если бы оно выращивало на всех своих полях только культуру типа i, а погода находилась в j-м состоянии.

при ограничениях:

• $Y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$ удовлетворяет условиям $\forall j \in J_n \, y_j \ge 0; \sum_{j=1}^{n} y_j = 1$;

• $X=(x_1, x_2, \dots, x_m) \in E_m(P^x)$, где $E_m(P^x)$ — множество перестановок из элементов вектора P^x;

• $P^x=(P_1^x, P_2^x, \dots, P_m^x)$ удовлетворяет условиям $\forall i \in J_m P_i^x \ge 0; \sum_{i=1}^{m} P_i^x = 1$, здесь $P_i^x \, (\forall i \in J_m)$ — отношение площади i-го поля к сумме площадей всех полей хозяйства.

В данной статье рассматривается сформулированная задача как специфическая «игра с природой», т.е. будем находить оптимальную стратегию игрока для каждого критерия принятия решений, а оптимальную стратегию природы находить не будем. Пусть, как и в приведенной выше математической модели, есть вектор стратегий игрока $X=(x_1, x_2, \dots, x_m) \in E_m(P^x)$ и матрица выигрышей $A=(a_{ij}), i \in J_m$, $j \in J_n$. Функция прибыли $F(X,Y)$ и оптимальная стратегия игрока для каждого из критериев будет иметь различный вид. Рассмотрим следующие критерии: максимального математического ожидания выигрыша, недостаточного основания Лапласа, максиминный критерий Вальда, минимаксного риска Сэвиджа, пессимизма-оптимизма Гурвица и критерий Ходжа–Лемана (см., например, [6, 7]).

1. Критерий максимального математического ожидания выигрыша. Применяется в тех случаях, когда известны вероятности состояний природы и минимизация риска проигрыша является менее существенным фактором принятия решения, чем максимизация среднего выигрыша. Сначала вычисляются числа $c_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j, i \in J_m$, — выигрыш, который получит игрок при заданных вероятностях состояний природы в том случае, если он применит свою i-ю стратегию. Для смешанной стратегии $X=(x_1, \dots, x_m)$ функция выигрыша $F(X,Y)$ будет иметь следующий вид: $F(X,Y)=\sum_{i=1}^{m} c_i x_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j x_i$. Оптимальной по данному критерию считают ту стратегию, при выборе которой значение математического ожидания выигрыша максимально:

$$F(X,Y)=\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j x_i \to \max \text{ для } X=(x_1, \dots, x_m) \in E_m(P^x).$$

Упорядочим коэффициенты $c_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j$ и элементы множества P_i^x по возрастанию: полученные элементы обозначим β_i и α_i соответственно. Тогда, используя теорему 3.1 и замечание 3.3 из [16], получим $\max_j \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j x_i = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \alpha_i$.

2. Критерий недостаточного основания Лапласа. Используется при наличии неполной информации о вероятностях состояний природы, эти вероятности близки по своим значениям, и минимизация риска проигрыша — менее существенный фактор принятия решения, чем максимизация среднего выигрыша. Вычислим $c_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}}{n}$, $i \in J_m$, — выигрыш, который получит игрок в том случае, если применит свою i-ю стратегию. Для смешанной стратегии $X = (x_1, \ldots, x_m)$ функция выигрыша $F(X, Y)$ будет иметь следующий вид: $F(X,Y) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i = \sum_{i=1}^{m} x_i \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i$. Оптимальной по данному критерию считают ту стратегию, при выборе которой значение среднего выигрыша максимально:

$$F(X,Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \to \max \text{ для } X = (x_1, \ldots, x_m) \in E_m(P^x).$$

Как и для предыдущего критерия, используем теорему 3.1 и замечание 3.3 из [16] — упорядочим суммы $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ при фиксированных i и элементы множества P_i^x по возрастанию, полученные элементы обозначим β_i и α_i. Тогда соответственно $\max_j \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \alpha_i$.

3. Применение максиминного критерия Вальда. Рассматривался для задач с комбинаторными ограничениями (см. [12]), оправдано в таких ситуациях, когда о возможности появления состояний природы ничего неизвестно, задача реализуется лишь один раз и нужно исключить любой риск.

4. Критерий минимаксного риска Сэвиджа. Применяется в таких же ситуациях, как и максиминный критерий Вальда, только наиболее существенным является учет степени действия фактора на величину выигрыша. Составляется матрица рисков $R = (r_{ij}) = a_{\max j} - a_{ij}, i \in J_m, j \in J_n$. Оптимальной по данному критерию считается та стратегия, при которой достигается $\min_{X \in E_m(P^x)} \max_j \sum_{i=1}^{m} r_{ij} x_i$.

Пусть ω — максимум $\sum_{i=1}^{m} r_{ij} x_i$, это означает, что $\sum_{i=1}^{m} r_{ij} x_i \le \omega \quad \forall j \in J_n$. Введем вспомогательные неотрицательные переменные $x_{m+j} = \omega - \sum_{i=1}^{m} r_{ij} x_i$ для каждого j-го неравенства и прибавим к левой части каждого j-го неравенства соответствующую вспомогательную переменную x_{m+k}. Получим следующие равенства:

$$\sum_{i=1}^{m} r_{ij} x_i + x_{m+j} = \sum_{i=1}^{m} r_{ij} x_i + \omega - \sum_{i=1}^{m} r_{ij} x_i = \omega \quad \forall j \in J_n.$$

Выделив первое равенство при $j = 1$: $\sum_{i=1}^{m} r_{i1} x_i + x_{m+1} = \omega$ и отняв его от всех других равенств для $j \in J_n^2 = \{2, \ldots, n\}$, получим

$$\sum_{i=1}^{m} (r_{ij} - r_{i1}) x_i + x_{m+j} - x_{m+1} = 0 \ \forall j \in J_n^2; \quad \sum_{i=1}^{m} (r_{ij} - r_{i1}) x_i \le x_{m+1} \quad \forall j \in J_n^2.$$

Целевая функция будет иметь вид $\sum_{i=1}^{m} r_{i1}x_i + x_{m+1} \to \min$ или $-\sum_{i=1}^{m} r_{i1}x_i - x_{m+1} \to \max$. Получим такую задачу оптимизации:

$$-\sum_{i=1}^{m} r_{i1}x_i - x_{m+1} \to \max$$

$$\sum_{i=1}^{m} (r_{ij} - r_{i1})x_i \le x_{m+1} \quad \forall j \in J_n^2;$$

$$x_{m+1} \ge 0;\ X = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in E_m(P^x);\ \forall i \in J_m\, P_i^x \ge 0; \sum_{i=1}^{m} P_i^x = 1.$$

Если обозначить $c_i = -r_{i1}$, $b_{i(j-1)} = (r_{ij} - r_{i1})\ \forall j \in J_n^2$, то задача будет иметь вид

$$F = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i - x_{m+1} \to \max,$$

$$\sum_{i=1}^{m} b_{ij}x_i \le x_{m+1} \quad \forall j \in J_{n-1};$$

$$x_{m+1} \ge 0;\ X = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in E_m(P^x);\ \forall i \in J_m \quad P_i^x \ge 0; \sum_{i=1}^{m} P_i^x = 1.$$

Эту задачу комбинаторной оптимизации на перестановках можно решать методом, предложенным в [11].

5. Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица. Используют в ситуациях, когда информация о состояниях природы отсутствует или недостоверна; когда нужно учитывать любое состояние природы, и когда реализуется только малое количество решений и допускается некоторый риск. Для того чтобы занять наиболее уравновешенную позицию, вводится оценочный коэффициент C, называемый коэффициентом пессимизма, который находится в интервале [0,1] и отражает ситуацию, промежуточную между точкой зрения крайнего оптимизма и крайнего пессимизма. При $C = 1$ критерий Гурвица превращается в максиминний критерий Вальда, а при $C = 0$ — в критерий «азартного игрока», делающего ставку на счастливый случай. Оптимальной по этому критерию считается та стратегия, при которой достигается

$$\max_{X \in E_m(P^x)} \left\{ C \min_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i + (1-C)\max_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \right\}.$$

Пусть ϑ — минимум $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i$, это означает, что $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \ge \vartheta$, $\forall j \in J_n$. Введем вспомогательные неотрицательные переменные $x_{m+j} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i - \vartheta$ для каждого j-го неравенства и отнимем от левой части каждого j-го неравенства соответствующую вспомогательную переменную x_{m+k}. Получим следующие равенства:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i - x_{m+j} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i + \vartheta = \vartheta \quad \forall j \in J_n.$$

Выделив первое равенство при $j=1$: $\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i - x_{m+1} = \vartheta$ и отняв его от всех других равенств для $j \in J_n^2 = \{2,\ldots,n\}$, получим

$$\sum_{i=1}^{m}(a_{i1}-a_{ij})x_i - x_{m+1} + x_{m+j} = 0 \;\; \forall j \in J_n^2 \;\text{ или }\; \sum_{i=1}^{m}(a_{ij}-a_{i1})x_i \le x_{m+1} \quad \forall j \in J_n^2.$$

Итак, $\min\limits_{j} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i = \vartheta = \sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i - x_{m+1}$ при ограничении $\sum_{i=1}^{m}(a_{ij}-a_{i1})x_i \le x_{m+1}$ $\forall j \in J_n^2$ и $x_{m+1} \ge 0$.

Пусть ω — максимум $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i$, это означает, что $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \le \omega \;\; \forall j \in J_n$. Введем вспомогательные неотрицательные переменные $x_{m+1+j} = \omega - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i$ для каждого j-го неравенства и прибавим к левой части каждого j-го неравенства соответствующую вспомогательную переменную x_{m+k}. Получим следующие равенства:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i + x_{m+1+j} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i + \omega - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i = \omega \quad \forall j \in J_n.$$

Выделив первое равенство при $j=1$: $\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i + x_{m+2} = \omega$ и отняв его от всех других равенств для $j \in J_n^2 = \{2,\ldots,n\}$, получим

$$\sum_{i=1}^{m}(a_{ij}-a_{i1})x_i + x_{m+1+j} - x_{m+2} = 0 \;\; \forall j \in J_n^2; \;\; \sum_{i=1}^{m}(a_{ij}-a_{i1})x_i \le x_{m+2} \quad \forall j \in J_n^2.$$

Итак, $\max\limits_{j} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i = \omega = \sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i + x_{m+2}$ при ограничении $\sum_{i=1}^{m}(a_{ij}-a_{i1})x_i \le$ $\le x_{m+2}$ $\forall j \in J_n^2$ и $x_{m+2} \ge 0$.

Подставив полученные выражения в целевую функцию

$$C\min_{j}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i + (1-C)\max_{j}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i = C\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i - x_{m+1}\right) + (1-C)\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i + x_{m+2}\right) =$$

$$= C\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i - Cx_{m+1} + \sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i - C\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i + (1-C)x_{m+2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i - Cx_{m+1} + (1-C)x_{m+2} \to \max,$$

получим такую задачу комбинаторной оптимизации на перестановках:

найти

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i - Cx_{m+1} + (1-C)x_{m+2} \to \max$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{m}(a_{ij}-a_{i1})x_i \le x_{m+1} \;\; \forall j \in J_n^2; \qquad \sum_{i=1}^{m}(a_{ij}-a_{i1})x_i \le x_{m+2} \;\; \forall j \in J_n^2;$$

$$x_{m+1} \ge 0; \; x_{m+2} \ge 0.$$

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in E_m(P^x); \;\; \forall i \in J_m \quad P_i^x \ge 0; \; \sum_{i=1}^{m} P_i^x = 1.$$

Эту задачу можно решать методом комбинаторного отсечения для частично комбинаторных задач [24–30], поскольку вектор X — перестановка из множества $E_m(P^x)$, а x_{m+1} и x_{m+2} — некомбинаторные переменные.

6. Критерий Ходжа–Лемана. Применяется в тех ситуациях, когда имеется информация о вероятностях состояний окружающей среды, однако эта информация получена на основе относительно небольшого числа наблюдений и может измениться; принятое решение теоретически допускает бесконечное число реализаций; при малом числе реализации допускается некоторый риск. При определении оптимальной стратегии по этому критерию вводится параметр достоверности информации о распределении вероятностей состояний природы u, значение которого находится в интервале [0, 1]. Если степень достоверности велика, то доминирует критерий максимального математического ожидания выигрыша, в противном случае — максиминный критерий Вальда. Оптимальной по данному критерию считается та стратегия, при которой достигается

$$\max_{X\in E_m(P^x)}\left\{u\sum_{j=1^n} p_j\sum_{i=1}^m a_{ij}x_i+(1-u)\min_j\sum_{i=1}^m a_{ij}x_i\right\}.$$

Проведя такие же преобразования, как и для предыдущего критерия, можно найти $\min\limits_j\sum\limits_{i=1}^m a_{ij}x_i=\vartheta=\sum\limits_{i=1}^m a_{i1}x_i-x_{m+1}$ при ограничениях $\sum\limits_{i=1}^m (a_{ij}-a_{i1})x_i\le x_{m+1}$ $\forall j\in J_n^2$ и $x_{m+1}\ge 0$. Подставив $\min\limits_j\sum\limits_{i=1}^m a_{ij}x_i$ в целевую функцию $u\sum\limits_{j=1}^n p_j\sum\limits_{i=1}^m a_{ij}x_i+$ $(1-u)\min\limits_j\sum\limits_{i=1}^m a_{ij}x_i\to\max$, получим

$$u\sum_{j=1}^n p_j\sum_{i=1}^m a_{ij}x_i+(1-u)\min_j\sum_{i=1}^m a_{ij}x_i=u\sum_{j=1}^n p_j\sum_{i=1}^m a_{ij}x_i+(1-u)\left(\sum_{i=1}^m a_{i1}x_i-x_{m+1}\right)=$$

$$=u\sum_{j=1}^n p_j\sum_{i=1}^m a_{ij}x_i+(1-u)\sum_{i=1}^m a_{i1}x_i-(1-u)x_{m+1}=$$

$$=\sum_{i=1}^m\left(u\sum_{j=1}^n p_j a_{ij}+(1-u)a_{i1}\right)x_i-(1-u)x_{m+1}\to\max.$$

Если $u\in(0,1)$, то

$$\sum_{i=1}^m\left(u\sum_{j=1}^n p_j a_{ij}+(1-u)a_{i1}\right)x_i-(1-u)x_{m+1}=$$

$$=(1-u)\left(\sum_{i=1}^m\frac{\left(u\sum\limits_{j=1}^n p_j a_{ij}+(1-u)a_{i1}\right)}{(1-u)}x_i-x_{m+1}\right)=$$

$$=(1-u)\left(\sum_{i=1}^m\left(\frac{u}{1-u}\sum_{j=1}^n p_j a_{ij}+a_{i1}\right)x_i-x_{m+1}\right)\to\max$$

при ограничении $\sum\limits_{i=1}^m (a_{ij}-a_{i1})x_i\le x_{m+1}$ $\forall j\in J_n^2$.

Коэффициент $u-1$, который стоит перед скобками в целевой функции, можно не учитывать, и если обозначить $c_i = \frac{u}{1-u} \sum_{j=1}^{n} p_j a_{ij} + a_{i1}$, $b_{i(j-1)} = (a_{ij} - a_{i1})$ $\forall j \in J_n^2$, то задача будет иметь вид

$$F = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i - x_{m+1} \to \max,$$

$$\sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_i \le x_{m+1} \ \forall j \in J_{n-1};$$

$$x_{m+1} \ge 0; \ X = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in E_m(P^x); \ \forall i \in J_m \quad P_i^x \ge 0; \quad \sum_{i=1}^{m} P_i^x = 1.$$

Эту задачу комбинаторной оптимизации на перестановках можно решать методом, приведенным в [11].

Таким образом, рассмотрено применение различных критериев принятия решений для задач комбинаторной оптимизации игрового типа, где на стратегии одного игрока накладываются комбинаторные ограничения, которые определяются перестановками, а другим игроком выступает природа. В зависимости от имеющейся информации о состояниях природы, количества реализации ситуации и отношения человека, принимающего решение, к риску необходимо выбирать один из рассмотренных критериев для обеспечения наилучшего для данной ситуации результата. Дальнейшие исследования можно направить на изучение задач комбинаторной оптимизации игрового типа, где на стратегии игрока накладываются комбинаторные ограничения, которые определяются размещениями, а также исследование возможности удаления заведомо невыгодных стратегий игрока для уменьшения размерности задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. фон Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. — М.: Наука, 1970. — 780 с.
2. Вентцель Е.С. Элементы теории игр. — М.: Физматгиз, 1961. — 67 с.
3. Крушевский А.В. Теория игр. — Киев: Вища шк.., 1977. — 215 с.
4. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. — М.: Высш. шк., 1998. — 304 с.
5. Зайченко Ю.П. Исследование операций. — Киев: Вища шк, 1979. — 391 с.
6. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б. Математическое програмимрование: Уч. пособие. — М.: Высш. шк., 1980. — 300 с.
7. Кудрявцев Е.М. Исследование операций в задачах, алгоритмах и программах. — М.: Радио и связь, 1984. — 184 с.
8. Емец О.А., Устьян Н.Ю. Решение некоторых задач комбинаторной оптимизации на размещениях и перестановках игрового типа // Проблемы управления и информатики. — 2006. — № 3. — С. 37–47.
9. Емец О.А., Устьян Н.Ю. Исследование задач комбинаторной оптимизации игрового типа на размещениях // Там же. — 2007. — № 1. — С. 26–36.
10. Емец О.А., Устьян Н.Ю. Задачи на перестановках игрового типа / Тез. докл. XIV Междунар. конф. «Проблемы теоретической кибернетики» — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2005. — С. 46.
11. Ємець О.О., Устьян Н.Ю. Розв'язування ігрових задач на переставленнях // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2007. — № 3. — С. 47–52
12. Емец О.А., Устьян Н.Ю. Исследование математических моделей и методов решения задач на перестановках игрового типа // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 6. — С. 103–114.

13. Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. — Киев: Наук. думка, 1981. — 288 с.
14. Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы исследования, решения. — Киев: Наук. думка, 2003. — 263 с.
15. Емец О.А. Евклидовы комбинаторные множества и оптимизация на них. Новое в математическом программировании: Уч. пособие. — Киев.: УМК ВО, 1992. — 92 с.
16. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. — Київ: ІСДО, 1993. — 188 с.
17. Стоян Ю.Г., Ємець О.О., Ємець Є.М. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи. — Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2005. — 103 с.
18. Ємець О.О., Колєчкіна Л.М. Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями: Монографія. — Київ: Наук. думка, 2005. — 117 с.
19. Ємець О.О., Роскладка О.В. Задачі оптимізації на полікомбінаторних множинах: властивості та розв'язування: Монографія. — Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2006. — 129 с.
20. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В., Емец О.А., Валуйская О.А. Построение выпуклых продолжений для функций, заданных на гиперсфере // Кибернетика и системный анализ. — 1998. — № 2. — С. 27–37.
21. Емец О.А., Роскладка А.А. Алгоритмическое решение двух параметрических задач оптимизации на множестве сочетаний с повторениями // Там же. — 1999. — № 6. — С. 1–6.
22. Емец О.А., Евсеева Л.Г., Романова Н.Г. Интервальная математическая модель комбинаторной задачи цветной упаковки прямоугольников // Там же. — 2001. — № 3. — С. 131–138.
23. Емец О.А., Роскладка Е.В. Решение некоторых евклидовых комбинаторных задач оптимизации методом динамического программирования // Там же. — 2002. — № 1. — С. 138–146.
24. Емец О.А., Барболина Т.Н. Решение линейных задач оптимизации на размещениях методом отсечений // Там же. — 2003. — № 6. — С. 131–141.
25. Барболина Т.Н., Емец О.А. Полностью целочисленный метод отсечения для решения линейных условных задач оптимизации на размещениях // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2005. — **45**, № 2. — С. 254–261.
26. Ємець О.О., Барболіна Т.М. Оптимізація на розміщеннях: цілочислові відсікання // Десята міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука (Київ, 13–15 травня 2004 р.). — Київ: Задруга, 2004. — С. 375.
27. Емец О.А., Колечкина Л.Н. Решение задач оптимизации с дробно-линейными целевыми функциями и дополнительными линейными ограничениями на перестановках // Кибернетика и системный анализ. — 2004. — № 3. — С. 30–43.
28. Емец О.А. Об одном методе отсечения для задач комбинаторной оптимизации // Экономика и мат. методы. — 1997. — **33**, вып. 4. — С. 120–129.
29. Ємець О.О., Ємець Є.М. Відсікання в лінійних частково комбінаторних задачах евклідової комбінаторної оптимізації // Доп. НАН України. — 2000. — № 9. — С. 105–109.
30. Емец О.А., Емец Е.М. Отсечения в линейных частично комбинаторных задачах оптимизации на перестановках // Экономика и мат. методы. — 2001. — **37**, № 1. — С. 118–121.

Поступила 28.11.2007