УДК 519.21; 681.513

В.К. ЯСИНСКИЙ, С.В. АНТОНЮК

СУЩЕСТВОВАНИЕ *l*-го МОМЕНТА РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СО ВСЕЙ ПРЕДЫСТОРИЕЙ

Ключевые слова: *стохастическое дифференциально-функциональное уравнение со всей предысторией, пространство Скорохода, пуассоновская мера, винеровский процесс.*

Пусть R^n — n–измеримое действительное евклидовое пространство и $1 \le p < \infty$, X — пространство предыстории, т.е. пространство $R^n \times D_\rho^p$, где D_ρ^p — пространство Скорохода [8] локально ограниченых непрерывных справа, имеющих левосторонние пределы функций $\varphi: R^+ \to R^n$ таких, что

$$\int_0^\infty |\varphi(s)|^p \, \rho(s) ds < \infty. \tag{1}$$

Норма в пространстве X вводится следующим образом:

$$||\varphi||_X \equiv (|\varphi(0)|^p + \int_0^\infty |\varphi(s)|^p \, \rho(s) ds)^{1/p} \equiv (|\varphi(0)|^p + ||\varphi||_\rho^p)^{1/p},$$

$$||\varphi||_\rho^p < \infty, \quad 1 \le p < \infty. \tag{2}$$

Определение 1. Функция $\rho: R^+ \to R^+$ называется функцией сглаживающего действия, если она удовлетворяет таким условиям:

1) ρ суммируема в R^+;
2) для $z \ge 0$ справедливы неравенства;
3) $\overline{K}(z) \equiv \underset{s \in R^+}{ess \sup} \dfrac{\rho(s+z)}{\rho(s)} \le \overline{\overline{K}} < \infty, \quad \underline{K}(z) \equiv \underset{s \in R^+}{ess \sup} \dfrac{\rho(s)}{\rho(s+z)} < \infty;$ (3)
4) ρ ограничена в R^+;
5) $\rho > 0$ строго положительна на $s \in (0, \infty)$;
6) $s\rho(s) \to 0$ при $s \to \infty$.

Если $x: R \to R^n$ (или $x: (-\infty, a) \to R^n$) измерима, ее история до момента t является функцией $x^t(s) \equiv x(t-s), s \in R^+$.

Определение 2. Функция $x: (-\infty, a] \to R^n$ называется допустимой по отношению к X, если $x^t \in X$ при $t \le a$.

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, F, \mathbf{P})$ с потоком σ-алгебр $\{F_t, t \ge 0\}$ заданы согласованные с потоком F_t n-измеримый винеровский процесс $\{w(t), F_t\} \subset R^n$, $t \in R_+$, и независимая от него центрированная пуассоновская мера $\{\widetilde{\nu}(d\theta, dt) \equiv \nu(d\theta, dt) - t\Pi(d\theta)\}$ на $(\Theta \times R_+, \mathcal{Z} \times \mathcal{B}_+)$, для которой $\mathbf{E}\{\widetilde{\nu}^2(d\theta \times dt)\} = \Pi(d\theta)dt$, где Π — некоторая σ-конечная мера на Z.

Пусть при $t_0 \ge 0$ подмножество χ_{t_0} — пространство измеримых случайных процессов $\varphi(t)$, $t \le t_0$, таких, что $\varphi^{t_0} \in X$ с вероятностью 1, и таких, что при каждом t $\varphi(t)$ не зависит от приростов винеровского процесса и центрированной пуассоновской меры:

$$\{w(s)-w(t_0),\ s\geq t_0\},\ \{\tilde{\nu}(s,A)-\tilde{\nu}(t_0,A), s\geq t_0, A\in\mathcal{Z}\}.$$

Обозначим $\mathcal{R}_{t_0}\equiv\sigma\{x(s)\,|\,s\leq t_0\}$ σ-алгебру подмножеств из χ_{t_0}, а $\mathcal{R}_t\equiv\mathcal{R}_{t_0}\vee F_t$, F_t — минимальный поток, порожденный величинами $\{w(s),\tilde{\nu}(d\theta,ds),s\leq t\}$.

Обозначим $\mathcal{N}_t$, $t\in R_+$, наименьшую σ-алгебру подмножеств из X, содержащую все множеста вида $\{\varphi(\cdot),\varphi(s)\in\Gamma\}, s\leq t, t\geq t_0, \Gamma\in\mathcal{B}$, а $\mathcal{N}_{t-}$ обозначает $\bigvee\limits_{s<t}\mathcal{N}_t$ наименьшую σ-алгебру подмножеств X, содержащую все σ-алгебры $\mathcal{N}_s$ при $s<t$.

Кроме того, пусть заданы:

1) векторнозначный функционал $\{a(t,\varphi)\}:R\times X\to R^n$ измеримый относительно $\mathcal{B}_+\times(\mathcal{R}_{t_0}\vee\mathcal{N}_t)$, при каждом $t\in R_+$ измеримый относительно $\mathcal{R}_{t_0}\vee\mathcal{N}_{t-}$, при каждом $\varphi\in X$ локально ограниченный по t;

2) матричнозначный функционал $\{b(t,\varphi)\}:R\times X\to M_n^n(R^n)$ измеримый относительно $\mathcal{B}_+\times(\mathcal{R}_{t_0}\vee\mathcal{N}_t)$, при каждом $t\in R_+$ измеримый относительно $\mathcal{R}_{t_0}\vee\mathcal{N}_{t-}$, при каждом $\varphi\in X$ локально ограниченный по t;

3) векторнозначный функционал $\{c(t,\varphi,\theta)\}:R\times X\times\Theta\to R^n$ измеримый относительно $\mathcal{B}_+\times(\mathcal{R}_{t_0}\vee\mathcal{N}_t)\times\mathcal{Z}$, при каждом $t\in R_+$ измеримый относительно $\mathcal{R}_{t_0}\vee\mathcal{N}_{t-}\times\mathcal{Z}$ и такой, что интеграл $\int\limits_{\Theta}|c(t,\varphi,\theta)|^2\,\Pi(d\theta)$ при каждом $\varphi\in X$ выступает локально ограниченной функцией переменной t.

Рассмотрим на $(\Omega,F,\mathbf{P})$ стохастическое дифференциально-функциональное уравнение

$$dx(t)=a(t,x^t)dt+b(t,x^t)dw(t)+\int\limits_{\Theta}c(t,x^{t-},\theta)\tilde{\nu}(d\theta,dt)\quad\forall t\geq t_0;\tag{4}$$

$$x_{t_0}=\varphi^{t_0}.\tag{5}$$

Считаем, что отрезок начальной функции в (4) принадлежит χ_{t_0}.

В уравнении (4) запись x^{t-} подчеркивает, что функционал $c(t,x^{t-},\theta)$ не должен зависеть от $x(t)$, а может зависеть только от $x(s)$ при $s<t$. Далее для упрощения записей знак «–» будем опускать, т.е. записывать $c(t,x^t,\theta)$.

Выражение (4) запишем в интегральной форме

$$x(t)=\varphi(t_0)+\int\limits_{t_0}^{t}a(s,x^s)ds+\int\limits_{t_0}^{t}b(s,x^s)dw(s)+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{\Theta}c(s,x^s,\theta)\tilde{\nu}(d\theta,ds);\ t\in[t_0,T].\tag{6}$$

Справедлива следующая лемма [19].

Лемма 1. Пусть при $t\geq t_0$ $\{x(\cdot)\}$ $\mathcal{R}_t\equiv\mathcal{R}_{t_0}\vee F_t$ — прогресивно-измеримый, без разрывов второго рода, непрерывный справа процесс. Предполагаем, что функция $x^{t_0}(\cdot,\omega)\in X$ с вероятностью 1.

Тогда при $t\geq t_0$ процесс $x^t\in X$ с вероятностью 1 и $x^t-\mathcal{R}_t$-прогрессивно-измеримый, без разрывов второго рода и непрерывный справа.

Определение 3. Стохастический процесс $\{x(t)\equiv x(t,\omega), t\in(-\infty,T]\}$ называется сильным решением уравнения (6), если $x(t)$ прогрессивно-измеримый относительно $\mathcal{R}_t$ при $t\leq T$, отрезки траекторий процесса $x^t\in X$ при $t\in[t_0,T]$, $x^{t_0}=\varphi^{t_0}$ почти наверное и (6) справедливо с вероятностью 1 для всех $t\in[t_0,T]$ одновременно. Если два сильных решения почти наверное совпадают, то они называются стохастически эквивалентными. Будем говорить, что уравнение (4) имеет сильное решение при начальном условии (5), если все решения (6) стохастически эквивалентны.

Далее, для функций $x : R \to R^n$ введем обозначение

$$|x(\cdot)|_{t_0}^{*}(t) \equiv \sup_{t_0 \le s \le t} |x(s)| .$$

(иногда t_0 будем опускать, когда это несущественно). При доказательстве теоремы существования и единственности сильного решения используем неравенства Букхольдера [20]: для произвольного $l > 1$ существуют постоянные c_{l1}, c_{l2} такие, что

$$\mathbf{E}\left|\int_{t_0}^{\bullet} \psi_1(s) dw(s)\right|_{t_0}^{*l}(t) \le c_{l1} \mathbf{E}\left(\int_{t_0}^{t} |\psi_1(s)|^2 ds\right)^{l/2}; \tag{7}$$

$$\mathbf{E}\left|\int_{t_0}^{\bullet}\int_{\Theta} \psi_2(\theta, s)\widetilde{\nu}(d\theta, ds)\right|_{t_0}^{*l}(t) \le c_{l2} \mathbf{E}\left(\int_{t_0}^{t}\int_{\Theta} |\psi_2(\theta, s)|^2 \Pi(d\theta)ds\right)^{l/2};$$

для произвольных F_t-согласованных процессов $\psi_1(t,\omega)$ и $\psi_2(\theta, t,\omega)$ таких, что

$$\int_0^T \psi_1^2(t)dt < \infty; \int_0^T\int_{\Theta} \psi_2^2(\theta, t)\Pi(d\theta)dt < \infty ,$$

почти наверное. Также будем использовать константы, которые появляются в таких элементарных неравенствах [19]:

$$\left|\sum_{i=1}^{m} a_i\right|^l \le k_l^{(m)} \sum_{i=1}^{m} |a_i|^l, 1 \ge 0,$$

$$\{a_i\} \subset R,\ m = 1, 2, 3, 4;\ k_l^{(m)} = m^{l-1} \vee 1 .$$

Обозначим

$$R(t, x) \equiv \int_{t_0}^{t} a(s, x^s)ds + \int_{t_0}^{t} b(s, x^s)dw(s) + \int_{t_0}^{t}\int_{\Theta} c(t, x^s, \theta)\widetilde{\nu}(d\theta, dt),$$

$$\delta(t) \equiv x(t) - y(t).$$

Лемма 2. Пусть: 1) предположим, что измеримые функционалы a, b, c определены соответсвенно на $R \times X$, $R \times X$, $R \times X \times \Theta$ и удовлетворяют условию Липшица: существует постоянная L такая, что

$$|a(s, x) - a(s, y)| + |b(s, x) - b(s, y)| + \int_{\Theta} |c(s, x, \theta) - c(s, y, \theta)| \Pi(zd) \le L\|x - y\|_X , \tag{8}$$

для произвольных $x, y \in X$;

2) $x, y \subset X - \mathfrak{R}_t$ — прогрессивно-измеримые случайные процессы, без разрывов второго рода, для которых $x^{t_0}, y^{t_0} \in X$.

Тогда $\forall l > 1$ справедливо неравенство

$$\mathbf{E}\{R(\cdot, x) - R(\cdot, y)|_{t_0}^{*l}(t)\} \le K_1 \mathbf{E}\{\|\delta^{t_0}\|_X^l\} +$$

$$+ K_2 \mathbf{E}\{\int_{t_0}^{t} |\delta(s)|^l ds + \int_{t_0}^{t}(\int_{t_0}^{s} |\delta(v)|^p \rho(s - v)dv)^{l/p} ds\} + \tag{9}$$

$$+K_3\mathbf{E}\{(\int_{t_0}^{t}|\delta(s)|^2\,ds)^{1/2}+(\int_{t_0}^{t}(\int_{t_0}^{s}|\delta(s)|^p\,\rho(s-v)dv)^{2/p}ds)^{1/2}\},$$

где K_1-K_3 зависят только от $l,p,L,(t-t_0)$ и ограничены при $t\in[t_0,T]$, также K_1 является $o(1)$ при $t\to t_0$.

Доказательство. Используя неравенства (7), (8), а также элементарные неравенства, получим:

$$|R(\cdot,x)-R(\cdot,y)|_{t_0}^{*l}(t)\le k_l|\int_{t_0}^{t}(a(s,x^s)-a(s,y^s))ds|_{t_0}^{*l}(t)+$$

$$+k_l|\int_{t_0}^{t}(b(s,x^s)-b(s,y^s))dw(s)|_{t_0}^{*l}(t)+$$

$$+k_l|\int_{t_0}^{t}\int_{Z}(c(s,x^s,z)-c(s,y^s,z))\tilde{\nu}(dz,ds)|_{t_0}^{*l}(t);$$

$$\mathbf{E}\{R(\cdot,x)-R(\cdot,y)|_{t_0}^{*l}(t)\}\le k_l\mathbf{E}\{(t-t_0)^{l-1}\int_{t_0}^{t}|(a(s,x^s)-a(s,y^s))|^l ds+$$

$$+c_{l1}(\int_{t_0}^{t}|(b(s,x^s)-b(s,y^s))|^2 ds)^{l/2}+$$

$$+c_{l2}(\int_{t_0}^{t}\int_{\Theta}|c(s,x^s,\theta)-c(s,y^s,\theta)|^2\,\Pi(d\theta)ds)^{l/2}\}\le$$

$$\le k_l L^l\mathbf{E}\{(t-t_0)^{l-1}\int_{t_0}^{t}\left\|\delta^s\right\|^l ds+(c_{l1}+c_{l2})(\int_{t_0}^{t}\left\|\delta^s\right\|^2 ds)^{l/2}\}. \qquad (10)$$

Известно, что $\left\|\delta^s\right\|_X^p=|\delta(s)|^p+\left\|\delta^s\right\|_\rho^p$ и

$$\left\|\delta^s\right\|_\rho^p=\int_0^\infty|\delta(s-v)|^p\,\rho(v)dv=\int_{s-t_0}^\infty|\delta(s-v)|^p\,\rho(v)dv+\int_0^{s-t_0}|\delta(s-v)|^p\,\rho(v)dv=$$

$$=\int_0^\infty|\delta(t_0-v)|^p\,\rho(v)\frac{\rho(v+s-t_0)}{\rho(v)}dv+\int_{t_0}^{s}|\delta(v)|^p\,\rho(s-v)dv\le$$

$$\le\overline{\overline{K}}\left\|\delta^{t_0}\right\|_\rho^p+\int_{t_0}^{s}|\delta(v)|^p\,\rho(s-v)dv,$$

где $\overline{\overline{K}}$ задано формулой (3).

Введем обозначения $\lambda=l/p$; $\tau=2/p$. Тогда получим

$$\left\|\delta^s\right\|^l=(\left\|\delta^s\right\|^p)^\lambda\le k_\lambda[|\delta(s)|^l+\overline{\overline{K}}^\lambda\left\|\delta^{t_0}\right\|_\rho^l+(\int_{t_0}^{s}|\delta(v)|^p\,\rho(s-v)dv)^\lambda];$$

$$\left\|\delta^s\right\|^2=(\left\|\delta^s\right\|^p)^\lambda\le k_\tau[|\delta(s)|^2+\overline{\overline{K}}^\tau\left\|\delta^{t_0}\right\|_\rho^2+(\int_{t_0}^{s}|\delta(v)|^p\,\rho(s-v)dv)^\tau].$$

Интегрируя, имеем

$$\int_{t_0}^{t}\left\|\delta^s\right\|^l ds \le k_\lambda [\int_{t_0}^{t}|\delta(s)|^l\, ds + \overline{\overline{K}}^{\lambda}(t-t_0)\left\|\delta^{t_0}\right\|_\rho^l + \int_{t_0}^{t}(\int_{t_0}^{s}|\delta(v)|^p\, \rho(s-v)dv)^\lambda ds];$$

$$\left(\int_{t_0}^{t}||\delta^s||^2\, ds\right)^{l/2} \le k_\tau^{l/2}\, k_{l/2} \times$$

$$\times\left[\left(\int_{t_0}^{t}|\delta(s)|^2\, ds\right)^{1/2} + \overline{\overline{K}}^{\lambda}(t-t_0)^{1/2}\left\|\delta^{t_0}\right\|_\rho^l + \left(\int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{s}|\delta(v)|^p\, \rho(s-v)dv\right)^\tau ds\right)^{1/2}\right].$$

Подставив последние две оценки в (10), получим (9), при этом

$$K_1 \equiv k_l L^l \overline{\overline{K}}^{\lambda}(k_\lambda (t-t_0)^l + (c_{l1}+c_{l2})k_{1/2} k_\tau^{1/2}(t-t_0)^{1/2});$$

$$K_2 = k_l k_\lambda L^l (t-t_0)^{l-1};\, K_3 = (c_{l1}+c_{l2})L^l k_l k_{1/2} k_\lambda^{1/2}.$$

Далее будем использовать следствие леммы 2.

Следствие. При выполнении условий леммы 2 справедливо такое неравенство:

$$\mathbf{E}\{|R(\cdot,x)-R(\cdot,y)|_{t_0}^{*}(t)\} \le K_1 \mathbf{E}\left\{\left\|\delta^{t_0}\right\|^l\right\} + M_{t_0}^t E\{|\delta(\cdot)|_{t_0}^{*l}(t)\}, \tag{11}$$

где K_1 — то же, что и выше, а M зависит от $(t-t_0), K_2, K_3$ и $M_{t_0}^t = o(1)$ при $t \downarrow t_0$.

Доказательство. Отметим, что $\int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{s}|\delta(v)|^p\, \rho(s-v)dv\right)ds \le \|\rho\|_{L_1}\int_{t_0}^{t}|\delta(v)|^p\, dv.$

Подставив $|\delta(s)| \le |\delta|_{t_0}^{*}(t)$ при $t_0 \le s \le t$ в неравенство (9), получим (11)

$$M_{t_0}^t = K_2\left[(t-t_0) + \int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{s}\rho(s-v)dv\right)^{1/p} ds\right] +$$

$$+K_3\left[\left(\int_{t_0}^{t}ds\right)^{1/2} + \left(\int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{s}\rho(s-v)dv\right)^{2/p} ds\right)^{1/2}\right] \le$$

$$\le K_2(t-t_0)(1+\|\rho\|_{L_1}^{1/p}) + K_3(t-t_0)^{1/2}(1+\|\rho\|_{L_1}^{1/p}) = o(1) \text{ при } t \to t_0,$$

что и доказывает следствие 1.

Доказательство теоремы существования и единственности решения стохастического дифференциально-функционального уравнения (6) базируется на методе последовательных приближений Пикара, как и в случае классических стохастических уравнений [1].

Но, учитывая норму (2) в пространстве X, доказательство отличается от доказательства в классическом понимании тем, что, вообще говоря, оценки Гронуолла не выполняются. При доказательстве используется лемма 2 и возможность продолжить решение, поскольку $M_{t_0}^t$ зависит от $(t-t_0)$ и не зависит от t_0.

Теорема (существование и единственность сильного решения).

Пусть:

1) функционалы $a: R\times X \to R^n$, $b: R\times X \to M_n^n(R^n)$, $c: R\times X\times\Theta \to R^n$ измеримы по совокупности переменных;

2) существует постоянная $L>0$ такая, что

$$|a(t,x)-a(t,y)|+|b(t,x)-b(t,y)|+\int_{\Theta}|c(t,x,\theta)-c(t,y,\theta)|\Pi(dz)\le L\|x-y\|_X$$

при любом $x, y\in X$;

3) $|a(t,x)|+|b(t,x)|+\int_{\Theta}|c(t,x,\theta)|\Pi(d\theta)\le L(1+\|x\|_X)$ $\forall t\in[t_0,T]$ и $\forall x, y\in X$;

4) $\exists l\ge 1$ и x_- — случайный процесс $x_-\in X_{t_0}$ такой, что $\mathbf{E}\|x_-^{t_0}\|_X^l<\infty$.

Тогда:

• существует единственное сильное решение $\{x(t), t\in[t_0,T]\}$ уравнения (4) такое, что

$$x^{t_0}=x_-^{t_0};\tag{12}$$

• для $t\in[t_0,T]$ и $l>1$ существует l-момент решения (4):

$$\mathbf{E}|x(\cdot)|_{t_0}^{*l}(t)<\infty.\tag{13}$$

Доказательство. Существование. Определим последовательность $\{x_n(t), n\ge 0\}$ следующим образом:

$$x_n(t)=x_-(t) \text{ при } t\le t_0 \quad \forall n\ge 0,$$

$$x_0(t)=x_-(t_0) \text{ при } t\ge t_0.$$

При $n\ge 1$, $t\ge t_0$ имеем

$$x_n(t)=x_-(t_0)+\int_{t_0}^{t}a(s,x_{n-1}^s)ds+\int_{t_0}^{t}b(s,x_{n-1}^s)dw(s)+\int_{t_0}^{t}\int_{\Theta}c(s,x_{n-1}^s,\theta)\tilde{\nu}(d\theta,ds),$$

где x_n^s — конструкция вида (6). Из этого определения, условий на коэффициенты и леммы 1 следует, что функции $x_n(t)$, $t\ge t_0$, прогрессивно-измеримы относительно $\mathcal{R}_t$, без разрывов второго рода и $x_n^t\in X$ при $t\ge t_0$.

Сначала покажем по индукции, что

$$\mathbf{E}\left\{\|x_n^{\bullet}\|_{t_0}^{*l}(t)\right\}<\infty,\ t_0\le t\le T.$$

Для $n=0$ имеем $x_0^{t_0}\in X$ и по указанному выше построению для $t_0\le t\le T$ получим

$$\|x_0^t\|\le c\|x_0^{t_0}\|=c\|x_-^{t_0}\|,$$

c — постоянная, зависящая от $\overline{\overline{K}}$, поэтому $\mathbf{E}\left\{\|x_0(\cdot)\|_{t_0}^{*l}\right\}\le\text{const}\,\mathbf{E}\left\{\|x_-^{t_0}\|_X^l(T)\right\}<\infty.$

Предположим, что $\mathbf{E}\left\{\|x_{n-1}^{\bullet}\|_{t_0}^{*l}(t)\right\}<\infty, t_0\le t\le T$. Используя лемму1, неравенства Букхольдера, неравенства Гельдера и условие 3) теоремы, получим $\forall t_0\le t\le T$:

$$\mathbf{E}\left\{\left\|x_n^{\bullet}\right\|_{t_0}^{*l}(t)\right\}\le k_l^{(4)}\mathbf{E}\left\{|x_-(t_0)|^l+(t-t_0)^{l-1}\int_{t_0}^{t}|a(s,x_{n-1}^s)|^l\,ds+\right.$$

$$\left.+\left(\int_{t_0}^{t}|b(s,x_{n-1}^s)|dw(s)\right)^l+\left(\int_{t_0}^{t}\int_{\Theta}|c(s,x_{n-1}^s,\theta)|\tilde{\nu}(d\theta,ds)\right)^l\right\}\le$$

$$\le k_l^{(4)}\mathbf{E}\left\{|x_-(t_0)|^l+(t-t_0)^{l-1}\int_{t_0}^{t}|a(s,x_{n-1}^s)|^l\,ds+\right.$$

$$\left.+c_{l1}\left(\int_{t_0}^{t}|b(s,x_{n-1}^s)|^2\,ds\right)^{1/2}+c_{l2}\left(\int_{t_0}^{t}\int_{\Theta}|c(s,x_{n-1}^s,\theta)|^2\,\Pi(d\theta)ds\right)^{1/2}\right\}\le$$

$$\le k_l^{(4)}\mathbf{E}\left\{|x_-(t_0)|^l+(t-t_0)^{l-1}L^l\int_{t_0}^{t}(1+\left\|x_{n-1}^s\right\|)^l\,ds+L^l c_{l1}\left(\int_{t_0}^{t}(1+\left\|x_{n-1}^s\right\|)^s\,ds\right)^{1/2}+\right.$$

$$\left.+L^l c_{l2}\left(\int_{t_0}^{t}(1+\left\|x_{n-1}^s\right\|)^2\,ds\right)^{1/2}\right\}\le k_l^{(4)}\mathbf{E}\{x_-(t_0)|^l+L^l(T-t_0)^l+L^l(T-t_0)^{1/2}\times$$

$$\left.\times(c_{l1}+c_{l2})\beta(1+\left\|x_{n-1}^{\bullet}\right\|_{t_0}^{*}(t))^l\right\}\le k_l^{(4)}\mathbf{E}\{|x_-(t_0)|^l+L^l(T-t_0)^l+L^l(T-t_0)^{1/2}\times$$

$$\left.\times(c_{l1}+c_{l2})\beta(1+\left\|x_{n-1}^{\bullet}\right\|_{t_0}^{*l}(T))\right\}<\infty.$$

Далее, используя лемму 2 и следствие, получаем

$$\mathbf{E}\{|x_n(\cdot)-x_{n-1}(\cdot)|_{t_0}^{*l}(t)\}=\mathbf{E}\{|R(\cdot,x_{n-1})-R(\cdot,x_{n-2})|_{t_0}^{*l}(t)\}\le$$

$$\le M_{t_0}^{t}\,\mathbf{E}\{|x_{n-1}(\cdot)-x_{n-2}(\cdot)|_{t_0}^{*l}(t)\}.$$

Согласно этому же следствию можно выбрать $t_1>0$ такое, что $M_{t_0}^{t}<1/2$ для $t\in[t_0,t_0+t_1]$, где t_1 не зависит от t_0.

Если обозначить

$$K\equiv\mathbf{E}\{|x_1(\cdot)-x_0(\cdot)|_{t_0}^{*l}\}<\infty,$$

то будем иметь $\mathbf{E}\{|x_n(\cdot)-x_{n-1}(\cdot)|_{t_0}^{*l}(T)\}\le\dfrac{K}{2^n}$, $t\in[t_0,t_0+t_1]$.

Используя неравенство Чебышева, получим сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}\left\{|x_n(\cdot)-x_{n-1}(\cdot)|_{t_0}^{*l}(t)>\frac{1}{n^2}\right\}\le\sum_{n=1}^{\infty}n^{2l}\,\mathbf{E}\{|x_n(\cdot)-x_{n-1}(\cdot)|_{t_0}^{*l}(t)\}\le K\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2l}}{2^n}<\infty.$$

Итак, согласно лемме Бореля–Кантелли [3] существует равномерная сходимость почти наверное на $[t_0,t_0+t_1]$ суммы $x_n(t)\equiv x_-(t_0)+\sum_{k=1}^{n-1}|x_k(t)-x_{k-1}(t)|$, поэтому предел $x(t)=\lim_{n\to\infty}x_n(t)$ существует на $[t_0,t_0+t_1]$.

Покажем, что $\{x(t), t \le t_1\}$ — решение уравнения (4). Проведем оценивание, используя следствие:

$$\mathbf{E}\left\{\left|x(\cdot)-x_-(t_0)-\int_{t_0}^{\bullet} a(s,x^s)ds-\int_{t_0}^{\bullet} b(s,x^s)dw(s)-\int_{t_0}^{\bullet}\int_{\Theta} c(s,x^s,\theta)\tilde{\nu}(d\theta,ds)\right|_{t_0}^{*l}(t)\right\}=$$

$$=\mathbf{E}\left|(x(\cdot)-x_n(\cdot))-\int_{t_0}^{\bullet}[a(s,x^s)-a(s,x_{n-1}^s)]ds-\int_{t_0}^{\bullet}[b(s,x^s)-b(s,x_{n-1}^s)]dw(s)-\right.$$

$$\left.-\int_{t_0}^{\bullet}\int_{\Theta}[c(s,x^s,\theta)-c(s,x_{n-1}^s,\theta)]\tilde{\nu}(d\theta,ds)\right|_{t_0}^{*l} \le k_l^{(2)}\mathbf{E}|x(\cdot)-x_n(\cdot)|_{t_0}^{*l}(t)+$$

$$+k_l^{(2)}\mathbf{E}|R(\cdot,x)-R(\cdot,x_{n-1})|_{t_0}^{*l}(t) \le k_l^{(2)}\mathbf{E}|x(\cdot)-x_n(\cdot)|_{t_0}^{*l}(t)+$$

$$+k_l^{(2)}M_{t_0}^t\mathbf{E}|x(\cdot)-x_{n-1}(\cdot)|_{t_0}^{*l}(t),$$

напомним, что $M_{t_0}^t < 1/2$ при $t \le t_1$.

Осталось показать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{E}|x(\cdot)-x_n(\cdot)|^{*l}(t)=0$. Пусть $b_i = i^{-2/l'}$, $l'=\dfrac{l}{l-1}$. Тогда из неравенства Гельдера (при $l>1$) следует

$$\mathbf{E}|x_n(\cdot)-x_{n+k}(\cdot)|^{*l}(t) \le \mathbf{E}\left(\sum_{i=n}^{n+k-1}|x_i(\cdot)-x_{i+1}(\cdot)|^{*}(t)\right)^l=$$

$$=\mathbf{E}\left(\sum_{i=n}^{n+k-1}|x_i(\cdot)-x_{i+1}(\cdot)|^{*}(t)b_i b_i^{-1}\right)^l \le$$

$$\le \mathbf{E}\left(\sum_{i=n}^{n+k-1}|x_i(\cdot)-x_{i+1}(\cdot)|^{*}(t)b_i^{-l}\right)\left(\sum_{i=n}^{n+k-1}b_i^{l'}\right)^{l/l'} \le \left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{Kb_i^{-l}}{2^i}\right)\left(\sum_{i=n}^{\infty}b_i^{l'}\right)^{l-1},$$

$$\mathbf{E}\,|x(\cdot)-x_n(\cdot)|^{*l}(t) \le \liminf_k |x(\cdot)-x_{n+k}(\cdot)|^{*l}(t),$$

по лемме Фату

$$\mathbf{E}\,|x(\cdot)-x_n(\cdot)|^{*l}(t) \le K\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{b_i^{-l}}{2^i}\right)\left(\sum_{i=n}^{\infty}b_i^{l'}\right)^{l-1}\to 0,$$

когда $n\to\infty$.

Таким образом, доказано существование решения (7) для $t\in[t_0, t_0+t_1]$. Продолжим это решение при t_0+t_1. Для этого достаточно искать решение (4) для $t \ge t_0+t_1$ с начальными условиями

$$\varphi_1(t)=\begin{cases} x_-(t), & t \le t_0;\\ x(t), & t\in[t_0, t_0+t_1].\end{cases}$$

Очевидно, что $\varphi_1 \in X_{t_0+t_1}$. Повторяя проделанные выше выкладки, получим решение $x(t)$, $t_0+t_1 \le t \le t_0+2t_1$, и для такого t:

$$x(t)=\varphi_1(t_0+t_1)+\int_{t_0+t_1}^{t} a(s,x^s)ds+\int_{t_0+t_1}^{t} b(s,x^s)dw(s)+\int_{t_0+t_1}^{t}\int_{\Theta} c(s,x^s,\theta)\widetilde{\nu}(d\theta,ds)=$$

$$=x_-(t_0)+\int_{t_0}^{t_0+t_1} a(s,x^s)ds+\int_{t_0}^{t_0+t_1} b(s,x^s)dw(s)+\int_{t_0}^{t_0+t_1}\int_{\Theta} c(s,x^s,\theta)\widetilde{\nu}(d\theta,ds)+$$

$$+\int_{t_0+t_1}^{t} a(s,x^s)ds+\int_{t_0+t_1}^{t} b(s,x^s)dw(s)+\int_{t_0+t_1}^{t}\int_{\Theta} c(s,x^s,\theta)\widetilde{\nu}(d\theta,ds)=$$

$$=x_-(t_0)+\int_{t_0}^{t} a(s,x^s)ds+\int_{t_0}^{t} b(s,x^s)dw(s)+\int_{t_0}^{t}\int_{\Theta} c(s,x^s,\theta)\widetilde{\nu}(d\theta,ds),$$

поэтому $x(t), t_0+t_1\le t\le t_0+2t_1$, является решением (4) с начальными условиями (9). Аналогично, предполагая, что построено решение $x(t)$, $t_0+t_1\le t\le$ $\le t_0+kt_1$, $k\ge 1$, конструируем решение $x(t)$, $t_0+t_1\le t\le t_0+(k+1)t_1$, по начальному условию до t_0+kt_1, заданным процессом

$$\varphi_1(t)=\begin{cases} x_-(t),\ t\le t_0, \\ x(t),\quad t\in[t_0,t_0+kt_1]\end{cases}\in\chi_{t_0+kt_1}.$$

Далее, двигаясь аналогично к $t_0+kt_1\ge T$, получаем $\mathcal{R}_t$-измеримое решение $\{x(t), t_0\le t\le T\}$, которое удовлетворяет (12).

Единственность. Пусть $\{x_1(t), t\in[t_0,T]\}$ и $\{x_2(t),\ t\in[t_0,T]\}$ — два решения уравнения (4), удовлетворяющие (9) и (10). Обозначим $\delta(t)\equiv x_1(t)-x_2(t)$, тогда из следствия 1 получим (здесь $\delta^*_{t_0}(t)=|\delta(\cdot)|^*_{t_0}(t)$)

$$\mathbf{E}\delta^{*l}_{t_0}(t)\le M^t_{t_0}\mathbf{E}\delta^*_{t_0}(t).$$

Пусть $\bar{t}\le T-t_0$ такое, что $M^t_{t_0}\le\alpha<1$ для $t_0\le t\le\bar{t}+t_0$. Тогда

$$\mathbf{E}\delta^{*l}_{t_0}(t)=0 \text{ для } t_0\le t\le\bar{t}+t_0.$$

Таким образом,

$$\mathbf{P}(\{x_1(t)=x_2(t), t_0\le t\le t_0+\bar{t}\equiv\theta_1\})=1.$$

Двигаясь далее, получаем $\mathbf{E}\delta^{*l}_{t_0}(t)=0$ для $\theta_1\le t\le\theta_1+\bar{t}\equiv\theta_2$ и после конечного количества шагов $\mathbf{P}(\{x_1(t)=x_2(t),\ t_0\le t\le T\})=1$.

Доказана единственность сильного решения, которое удовлетворяет только (12). Пусть $N>0$ и для $t_0\le t\le T$, I_N — индикатор множества

$$\Omega_N=\{\omega: |x_1(\cdot)|^*_{t_0}(t)\le N, |x_2(\cdot)|^*_{t_0}(t)\le N\}.$$

Поскольку $I_N(t)=I_N(t)I_s(t), s\le t$, то с учетом доказательства леммы 2 и ее следствия, получим неравенство $\mathbf{E}|I_N(\cdot)\delta(\cdot)|^{*l}_{t_0}(t)\le M^t_{t_0}\mathbf{E}|I_N(\cdot)\delta(\cdot)|^{*l}_{t_0}(t)$, и, используя те же размышления, что и раньше, получим $\mathbf{E}|I_N(\cdot)\delta(\cdot)|^{*l}_{t_0}(t)=0,\ t_0\le t\le T$.

Отсюда следует, что

$$\mathbf{P}\{\delta(t)\ne 0\}\le\mathbf{P}\{|x_1(\cdot)|^{*l}_{t_0}(t)>N\}+\mathbf{P}\{x_2(\cdot)|^{*l}_{t_0}(t)>N\},$$

но x_1, x_2 локально ограничены, а значит, вероятности в правой части неравенства стремятся к нулю при $N\to\infty$ и, следовательно, $\delta(t)=0$ при $t\in[t_0,T]$.

Доказанная теорема позволяет исследовать асимптотическое поведение решений стохастического дифференциально-функционального уравнения с помощью второго метода Ляпунова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967. — 548 с.
2. Волтерра В. Математическая теория борьбы за существование. — М.: Наука, 1976. — 286 с.
3. Зарс В.В. Моделирование автоколебаний металлорежущих станков // Вопросы динамики и прочности. — Рига: Зинатне, 1969. — С. 157–173.
4. Рубаник В.П. Колебания сложных квазилинейных систем с запаздыванием. — Минск: Изд-во «Университетское», 1985. — 143 с.
5. Trutzer V. Existencr and asymptotic stability for solutions to stochastic hereditary equations: Diss. Ph.D. — Pittsburg Carnegie Mellon Uni upsilon., 1982. — 305 p.
6. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. — Киев: Наук. думка, 1968. — 354 с.
7. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. Т.1. — М.: Наука, 1972. — 664 с.
8. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их применения. — Киев: Наук. думка, 1982. — 612 с.
9. Королюк В.С. Стохастические модели систем. — Киев: Наук. думка, 1989. — 208 с.
10. Королюк В.С., Турбин А.Ф. Полумарковские процессы и их приложения. — Киев: Наук. думка, 1976. — 184 с.
11. Кореневский Д.Г. Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии. — Киев: Наук. думка, 1989. — 205 с.
12. Хусаинов Д.Я. Построение и стабилизация характеристик устойчивости динамических систем // Диссертация доктора физ.-мат. наук. — Киев: Киев. ун-т, 1992. — 368 с.
13. Шайхет Л.Е. Устойчивость по первому приближению стохастических систем с последейсвием// Прикладная математика и механика. — 1976. — **40**, вып. 6. — С. ІІІ6–ІІ21.
14. Царьков Е.Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. — Рига: Зинатне, 1989. — 421 с.
15. Свердан М.Л., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Стохастичні динамічні системи із скінченною післядією. — Чернівці: Прут, 2000. — 560 с.
16. Ясинський Є.В., Ясинський В.К. Задачі стійкості та стабілізації динамічних систем зі скінченною післядією. — Київ: ТВіМС, 2005 — 580 с.
17. Антонюк С.В., Ясинський В.К. Стійкість в середньому квадратичному розв'язків систем лінійних стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь зі всією передісторією // Теорія ймовірностей і математична статистика. — 2004. — Вип. 70. — С. 157–162.
18. Береза В.Ю., Ясинський В.К. Про існування розв'язків стохастичних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу з пуассонівськими перемиканнями // Вісник Київ. ун-ту. Серія: Фіз.-мат. науки. — 2002. — Вип. 5. — С. 19–27.
19. Mizel V., Trutzer V. Stochastic hereditary equations: existence and asymptotic stability // J. of Integral Equations. — 1984. — **7.** — P. 1–72
20. Ikeda N., Watanabe S. Stochastic differential Equtions and diffusion processes. — North Holland, 1981. — 281 p.

Поступила 19.12.2007