УДК 532.546:539.3

В.В. СКОПЕЦКИЙ, О.А. МАРЧЕНКО, Т.А. САМОЙЛЕНКО

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ДВУХФАЗНЫХ СРЕД

Ключевые слова: *нелинейная система, дифференциальная модель двухфазных грунтовых сред, обобщенное решение, метод конечных элементов, оценка приближенного обобщенного решения.*

Системный подход к построению дифференциальных моделей водонасыщенного грунта базируется на модели М. Био [1] динамики многофазных грунтовых сред с учетом необходимых для решения конкретных задач механических свойств скелета грунта. Сложность решения задач по определению напряженно-деформированного состояния массивов двухфазных грунтов пока еще не позволяет учесть все факторы, влияющие на деформацию грунта. Упруго-пластическое поведение грунта описывается уравнениями физически нелинейной теории упругости, в которых объемная деформация ε_v связывается с величиной среднего (гидростатического) давления посредством модуля объемного сжатия K, а интенсивность деформаций сдвига e_i определяется как интенсивностью касательных напряжений, так и величиной гидростатического давления, через модуль сдвига G. Анализ экспериментальных данных указывает на вполне определенную связь между модулями K и G, зависящую от аргумента e_i / ε_v, причем по некоторым данным она может быть принята линейной [2]: $K = G(A - Be_i / \varepsilon_v)$.

Для практического использования во многих случаях считается целесообразным не разделять объемную деформацию на две части, а использовать модуль общей объемной деформации. Так, в известных соотношениях теории упругости для определения коэффициентов Ламе возможна зависимость λ и μ лишь от модуля объемного сжатия K [3]: $\mu = \dfrac{3K(1-2\nu)}{2(1+\nu)}$, $K = \lambda + \dfrac{2}{3}\mu$, где ν — коэффициент Пуассона. Такой подход реализован в данной работе при формулировании нелинейности в системе динамической консолидации водонасыщенных грунтов [2, 4, 5].

Система уравнений имеет вид:

$$\rho_{\text{ch}}(1-m)\frac{\partial^2 w_{\text{ск}}}{\partial t^2} + P(w)\frac{\partial}{\partial t}(w_{\text{ск}} - w_{\text{в}}) - (Aw_{\text{ск}})(w_{\text{ск}}) -$$

$$- M^B \frac{1-m}{m}[(1-m)\,\text{grad div}\, w_{\text{ск}} + m\,\text{grad div}\, w_{\text{в}}] = F_1, \tag{1}$$

$$\rho_{\text{в}} m \frac{\partial^2 w_{\text{в}}}{\partial t^2} + P(w)\frac{\partial}{\partial t}(-w_{\text{ск}} + w_{\text{в}}) -$$

$$- M^B[(1-m)\,\text{grad div}\, w_{\text{ск}} + m\,\text{grad div}\, w_{\text{в}}] = F_2, \tag{2}$$

где $w_{\text{ск}}(x, y, t) = (u_{\text{ск}}(x, y, t), v_{\text{ск}}(x, y, t))^T$, $w_{\text{в}}(x, y, t) = (u_{\text{в}}(x, y, t), v_{\text{в}}(x, y, t))^T$,

$(x, y, t) \in \Omega_T$, $\Omega_T = \Omega \times (0, T]$, $u_{ск}$, $v_{ск}$ — горизонтальная и вертикальная составляющие вектора смещений для скелета грунта; $u_в$, $v_в$ — соответствующие составляющие вектора смещений жидкости; ρ_{ch}, $\rho_в$ — плотности минеральных частиц и жидкости соответственно (плотность водонасыщенного грунта $\rho = \rho_{ch}(1-m) + \rho_в m$); m — пористость; M^B — модуль упругости жидкости; матрица $P(w)$ имеет вид

$$P(w) = \rho_в g m^2 \begin{pmatrix} K^{-1}_{ф,x}(w) & 0 \\ 0 & K^{-1}_{ф,y}(w) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Здесь $K_{ф,x}$, $K_{ф,y}$ — коэффициенты фильтрации в направлении осей x и y соответственно, зависящие от вектор-функции $w(x, y, t) = (w_{ск}(x, y, t), w_в(x, y, t))^T = (u_{ск}(x, y, t), v_{ск}(x, y, t), u_в(x, y, t), v_в(x, y, t))^T$; A — оператор теории упругости

$$(Aw_{ск})(w_{ск}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\sigma_x + \dfrac{\partial}{\partial y}\tau_{xy} \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\tau_{xy} + \dfrac{\partial}{\partial y}\sigma_y \end{pmatrix}, \quad (x, y, t) \in \Omega_T,$$

где $\sigma_x = \lambda(w_{ск})\left(\dfrac{\partial u_{ск}}{\partial x} + \dfrac{\partial v_{ск}}{\partial y}\right) + 2\mu(w_{ск})\dfrac{\partial u_{ск}}{\partial x}$,

$$\sigma_y = \lambda(w_{ск})\left(\frac{\partial u_{ск}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ск}}{\partial y}\right) + 2\mu(w_{ск})\frac{\partial v_{ск}}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = \mu(w_{ск})\left(\frac{\partial u_{ск}}{\partial y} + \frac{\partial v_{ск}}{\partial x}\right).$$

Коэффициенты Ламе $\lambda(w_{ск})$, $\mu(w_{ск})$ зависят от производных компонент вектор-функции $w_{ск}(x, y, t)$ по пространственным переменным и имеют вид

$$\sigma(w_{ск}) = b_1(x, y) K\left(x, y, \frac{\partial w_{ск}}{\partial x}, \frac{\partial w_{ск}}{\partial y}\right),$$

$$\mu(w_{ск}) = b_2(x, y) K\left(x, y, \frac{\partial w_{ск}}{\partial x}, \frac{\partial w_{ск}}{\partial y}\right); \tag{4}$$

$F_1(x, y, t) = (F_{11}(x, y, t), F_{12}(x, y, t))^T$, $F_2(x, y, t) = (F_{21}(x, y, t), F_{22}(x, y, t))^T$, где F_{ij}, $i, j = 1, 2,$ — заданные функции.

Начальные условия:

$$w_{ск}(x, y, 0) = W^0_{ск}(x, y), \quad \frac{\partial w_{ск}}{\partial t}(x, y, 0) = W^1_{ск}(x, y), \quad (x, y) \in \overline{\Omega},$$

$$w_в(x, y, 0) = W^0_в(x, y), \quad \frac{\partial w_в}{\partial t}(x, y, 0) = W^1_в(x, y), \quad (x, y) \in \overline{\Omega}. \tag{5}$$

Краевые условия:

$$w_{ск,n}(x, y, t) = 0, \quad w_{ск,s}(x, y, t) = 0, \quad (x, y, t) \in \Gamma_1 \times (0, T], \tag{6}$$

$$\sigma_n = S(x, y, t), \quad \tau_s = T(x, y, t), \quad (x, y, t) \in \times\, \Gamma_2 \times (0, T], \tag{7}$$

$$\frac{M^B}{m}[(1-m)\operatorname{div} w_{ск} + m \operatorname{div} w_в] = \Psi(x, y, t), \quad (x, y, t) \in \partial\Omega \times (0, T], \tag{8}$$

где $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$; $w_{\text{ск},n}$, $w_{\text{ск},s}$ — нормальная и касательная составляющие вектора смещений скелета грунта $w_{\text{ск}}$; σ_n, τ_s — нормальная и касательная составляющие вектора напряжений.

Предполагаем, что граница $\partial\Omega$ обладает достаточной гладкостью и $K_{\text{ф},x}^{-1}(w), K_{\text{ф},y}^{-1}(w), F_{ij}(x, y, t) \in C(\Omega_T)$; $b_i(x, y) \in C^1(\Omega)$, $i, j = 1,2$; $K\left(x, y, \frac{\partial w_{\text{ск}}}{\partial x}, \frac{\partial w_{\text{ск}}}{\partial y}\right) \in C^1(\Omega_T)$; $W_{\text{ск}}^0(x, y), W_{\text{в}}^0(x, y) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$; $W_{\text{ск}}^1(x, y), W_{\text{в}}^1(x, y) \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$; $S(x, y, t), T(x, y, t) \in C^1(\Gamma_2 \times (0, T])$; $\Psi(x, y, t) \in C^1(\partial\Omega \times (0, T])$.

Обозначим Q множество вектор-функций $w(x, y, t) = (w_{\text{ск}}(x, y, t), w_{\text{в}}(x, y, t))^T = (w_1(x, y, t), w_2(x, y, t))^T = (w_{11}(x, y, t), w_{12}(x, y, t), w_{21}(x, y, t), w_{22}(x, y, t))^T$, компоненты которых вместе со своими частными производными первого порядка непрерывны на $\overline{\Omega}_T$, имеют непрерывные ограниченные в Ω_T частные производные второго порядка (исключая, возможно, смешанные $\frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial x \partial t}$, $\frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial t \partial x}$, $\frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial y \partial t}$, $\frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial t \partial y}$, $i, j = 1, 2$) и удовлетворяют главным однородным краевым условиям (6).

Определение 1. Классическим решением начально-краевой задачи (1), (2), (5)–(8) называется вектор-функция $w(x, y, t) \in Q$, удовлетворяющая соотношениям (1), (2), (5), (7), (8).

Умножим систему (1), (2) скалярно на произвольную вектор-функцию $q \in Q$ и результат проинтегрируем по области Ω. Полученное соотношение запишем в операторном виде:

$$\langle M \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, q \rangle + \langle \overline{M} \frac{\partial w}{\partial t}, q \rangle + \langle Lw, q \rangle = \langle F, q \rangle \quad \forall\, q \in Q, \quad t \in (0, T]. \tag{9}$$

Здесь

$$\langle M \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, q \rangle = \iint_{\Omega} \left[\rho_{\text{ch}} (1 - m) \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}, q_1 \right) + \rho_{\text{в}} m \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2}, q_2 \right) \right] d\Omega, \tag{10}$$

$$\langle \overline{M} \frac{\partial w}{\partial t}, q \rangle = \iint_{\Omega} \left(P(w) \frac{\partial}{\partial t} (w_1 - w_2), q_1 - q_2 \right) d\Omega, \tag{11}$$

$$\langle Lw, q \rangle = -\iint_{\Omega} \left\{ \left(A(w_1) w_1 + M^B \frac{(1-m)}{m} [(1-m) \operatorname{grad} \operatorname{div} w_1 + m \operatorname{grad} \operatorname{div} w_2], q_1 \right) + \left(M^W [(1-m) \operatorname{grad} \operatorname{div} w_1 + m \operatorname{grad} \operatorname{div} w_2], q_2 \right) \right\} d\Omega, \tag{12}$$

$\langle \xi, q \rangle = \iint_{\Omega} (\xi, q) d\Omega$, скалярное произведение (ξ, q) вектор-функций из Q определяется следующим образом: $(\xi, q) = (\xi_1, q_1) + (\xi_2, q_2) = \xi_{11} q_{11} + \xi_{12} q_{12} + \xi_{21} q_{21} + \xi_{22} q_{22}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2) = (\xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{21}, \xi_{22})$, $q = (q_1, q_2) = (q_{11}, q_{12}, q_{21}, q_{22})$.

Применив к правой части соотношения (12) формулу Грина, получим

$$\langle Lw, q\rangle = W_1(w_1; w_1, q_1) + W_2(w, q) - \langle Gw, q\rangle \quad \forall\, q \in Q, \quad t \in (0, T], \tag{13}$$

где $W_1(w_1; w_1, q) = \iint\limits_{\Omega} \left[\lambda(w_1)\left(\frac{\partial w_{11}}{\partial x} + \frac{\partial w_{12}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial q_{11}}{\partial x} + \frac{\partial q_{12}}{\partial y}\right) + \right.$

$$+ 2\mu(w_1)\left(\frac{\partial w_{11}}{\partial x}\frac{\partial q_{11}}{\partial x} + \frac{\partial w_{12}}{\partial y}\frac{\partial q_{12}}{\partial y}\right) +$$

$$\left. + \mu(w_1)\left(\frac{\partial w_{11}}{\partial y} + \frac{\partial w_{12}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial q_{11}}{\partial y} + \frac{\partial q_{12}}{\partial x}\right)\right] d\Omega,$$

$$W_2(w, q) = M^B \iint\limits_{\Omega} \left[\frac{(1-m)^2}{m} \operatorname{div} w_1 \operatorname{div} q_1 + (1-m)\operatorname{div} w_2 \operatorname{div} q_1 + \right.$$

$$\left. + (1-m)\operatorname{div} w_1 \operatorname{div} q_2 + m \operatorname{div} w_2 \operatorname{div} q_2 \right] d\Omega\,. \tag{14}$$

Скалярное произведение $\langle Gw, q\rangle$ из (13), представляющее собой интеграл по границе области Ω, запишем с учетом краевых условий (6)–(8):

$$\langle Gw, q\rangle =$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega} \left[\sigma_n q_{1,n} + \tau_s q_{1,s} + \frac{M^B}{m}((1-m)\operatorname{div} w_1 + m \operatorname{div} w_2)((1-m) q_{1,n} + m q_{2,n}) \right] d\Gamma =$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega} [S(x, y, t) q_{1,n} + T(x, y, t) q_{1,s} + \Psi(x, y, t)((1-m) q_{1,n} + m q_{2,n})] d\Gamma$$

$$\forall\, q \in Q \quad t \in (0, T]. \tag{15}$$

Соотношение (9), учитывая (13)–(15), перепишем следующим образом:

$$\langle M \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, q\rangle + \langle \overline{M} \frac{\partial w}{\partial t}, q\rangle + \langle L_0 w, q\rangle = \langle \overline{F}, q\rangle \quad \forall\, q \in Q, \quad t \in (0, T]. \tag{16}$$

Здесь

$$\langle L_0 w, q\rangle = W_1(w_1; w_1, q) + W_2(w, q), \tag{17}$$

$$\langle \overline{F}, q\rangle = \langle F, q\rangle + \int\limits_{\partial\Omega} (S(x, y, t) q_{1,n} + T(x, y, t) q_{1,s} +$$

$$+ \Psi(x, y, t)((1-m) q_{1,n} + m q_{2,n})) d\Gamma. \tag{18}$$

Для вектор-функции вида $\upsilon = (\upsilon_1, \upsilon_2)^T = (\upsilon_{11}, \upsilon_{12}, \upsilon_{21}, \upsilon_{22})^T$ определим следующие нормы и полунормы:

$$\|\upsilon\|^2_{L_2(\Omega)} = \iint\limits_{\Omega} (\upsilon, \upsilon) d\Omega = \|\upsilon_1\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\upsilon_2\|^2_{L_2(\Omega)},$$

а $\|\upsilon_i\|^2_{L_2(\Omega)} = \iint\limits_{\Omega} [\upsilon_{i1}^2 + \upsilon_{i2}^2] d\Omega,\ \upsilon_i = (\upsilon_{i1}, \upsilon_{i2}),\ i = 1, 2;$

$$||v||^2_{H_0^1(\Omega)} = ||v_1||^2_{H_0^1(\Omega)} + ||v_2||^2_{H_0^1(\Omega)},$$

а $||v_i||^2_{H_0^1(\Omega)} = \iint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial v_{i1}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_{i1}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_{i2}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_{i2}}{\partial y} \right)^2 \right] d\Omega, \; i = 1, 2;$

$$||v||^2_{W_2^1(\Omega)} = ||v||^2_{L_2(\Omega)} + ||v||^2_{H_0^1(\Omega)}; \quad ||v||^2_{W_2^0(\Omega)} = ||v||^2_{L_2(\Omega)};$$

$$||v||^2_{W_2^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \le |k|} ||D^\alpha v||^2_{L_2(\Omega)}; \quad D^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2,$$

k, α_1, α_2 — неотрицательные целые числа;

$$||v_{ij}||_{L_\infty(\Omega_T)} = \sup_{(x,\, y,\, t) \in \Omega_T} |v_{ij}(x, y, t)|; \quad i, j = 1, 2;$$

$$||v||^2_{L_\infty(0, T;\, X)} = \sup_{t \in (0, T]} ||v||^2_X; \quad ||v||^2_{L_2(0, T;\, X)} = \int_0^T ||v||^2_X \, dt,$$

где пространство X — это $L_2(\Omega)$ или $H_0^1(\Omega)$ или $W_2^1(\Omega)$.

Рассмотрим вопрос положительной определенности оператора L_0. Из положительной определенности оператора теории упругости и формул (17), (14) получаем

$$\begin{aligned} \langle L_0 v, v \rangle &= W_1(v_1; v_1, v_1) + W_2(v, v) = \\ &+ \mu(v_1) \left(\frac{\partial v_{11}}{\partial y} + \frac{\partial v_{12}}{\partial x} \right)^2 + M^W \left[\frac{1-m}{\sqrt{m}} \operatorname{div} v_1 + \sqrt{m} \operatorname{div} v_2 \right]^2 \Bigg\} d\Omega \\ &\ge c ||v_1||^2_{H_0^1(\Omega)}, \quad \text{const } c > 0, \quad \forall\, v \in Q. \end{aligned} \tag{19}$$

Таким образом, оператор L_0 неотрицательно определен на множестве Q и положительно определен на подмножестве $Q_0 \subset Q$, которое определяется соотношением

$$Q \setminus Q_0 = \{ v(x, y, t) : v_1 \equiv 0, \; \operatorname{div} v_2 \equiv 0, \; (x, y) \in \overline{\Omega} \}.$$

Очевидно, что это условие невыполнимо для вектор-функции решения рассматриваемой физической задачи. Поэтому в дальнейшем, не теряя общности, в том случае, где это необходимо, под Q будем подразумевать множество Q_0.

Обозначим Z множество вектор-функций $w(x, y, t) = (w_1(x, y, t), w_2(x, y, t))^T = (w_{11}(x, y, t), w_{12}(x, y, t), w_{21}(x, y, t), w_{22}(x, y, t))^T$, удовлетворяющих главному краевому условию (6), компоненты которых принадлежат пространству $W_2^1(\Omega)$ $\forall\, t \in (0, T]$, их производные по времени $\frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial t^2}(x, y, t)$ $\forall\, t \in (0, T]$, $\frac{\partial w_{ij}}{\partial t}(x, y, 0)$, $i, j = 1, 2$, вместе с $w_{ij}(x, y, 0)$, $i, j = 1, 2$, принадлежат $L_2(\Omega)$, смешанные производные $\frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial t \partial x}$, $\frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial y \partial t} = \frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial t \partial y}$, $i, j = 1, 2$, почти всюду и принадлежат $L_2(\Omega)$. Предполагается также, что вектор-функции из Z $\forall\, t \in (0, T]$ не удовлетворяют условию

$$w_1 \equiv 0, \quad \operatorname{div} w_2 \equiv 0, \quad (x, y) \in \overline{\Omega}. \tag{20}$$

Множеству Z_0 принадлежат вектор-функции $q(x, y) = (q_1(x, y), q_2(x, y))^T = (q_{11}(x, y), q_{12}(x, y), q_{21}(x, y), q_{22}(x, y))^T$, которые удовлетворяют однородному главному краевому условию (6), а их компоненты принадлежат пространству $W_2^1(\Omega)$ и не удовлетворяют условию (20).

Определение 2. Обобщенным решением начально-краевой задачи (1), (2), (5)–(8) называется вектор-функция $w(x, y, t) \in Z$, для любой вектор-функции $q(x, y) \in Z_0$ удовлетворяющая следующим интегральным соотношениям:

$$m\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, q\right) + \overline{m}\left(w; \frac{\partial w}{\partial t}, q\right) + a(w_1; w, q) = \langle \overline{F}, q \rangle \quad \forall\, q \in Z_0, \quad \forall\, t \in (0, T], \tag{21}$$

$$\langle w(x, y, 0), q(x, y) \rangle = \langle W^0(x, y), q(x, y) \rangle \quad \forall\, q \in Z_0, \tag{22}$$

$$\langle \frac{\partial w}{\partial t}(x, y, 0), q(x, y) \rangle = \langle W^1(x, y), q(x, y) \rangle \quad \forall\, q \in Z_0, \tag{23}$$

где

$$m\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, q\right) = \langle M \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, q \rangle; \quad \overline{m}\left(w; \frac{\partial w}{\partial t}, q\right) = \langle \overline{M} \frac{\partial w}{\partial t}, q \rangle; \quad a(w_1; w, q) = \langle L_0 w, q \rangle,$$

$$W^0(x, y) = (W_{\text{ск}}^0(x, y), W_{\text{в}}^0(x, y))^T, \quad W^1(x, y) = (W_{\text{ск}}^1(x, y), W_{\text{в}}^1(x, y))^T.$$

Для существования интегралов в (21)–(23) достаточно, чтобы функции принадлежали следующим пространствам:

$$K_{\text{ф}, x}^{-1}(w), K_{\text{ф}, y}^{-1}(w), F_{ij}(x, y, t) \in L_\infty(\Omega);$$

$$b_i(x, y), \; K\left(x, y, \frac{\partial w_{\text{ск}}}{\partial x}, \frac{\partial w_{\text{ск}}}{\partial y}\right) \in W_2^1(\Omega); \; i, j = 1, 2; \; S(x, y, t), T(x, y, t) \in$$

$$\in L_\infty(\Gamma_2); \; \Psi(x, y, t) \in L_\infty(\partial\Omega) \;\; \forall\, t \in (0, T]; \; W^1(x, y) \in L_\infty(\Omega).$$

Построим приближенное обобщенное решение. Разобьем область $\overline{\Omega}$ на треугольные элементы $\overline{e}_i$:

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{I} \overline{e}_i, \quad e_i \cap e_j = \varnothing, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, I}.$$

Приближенное обобщенное решение задачи (21)–(23) будем искать методом конечных элементов (МКЭ) в конечно-измеримом пространстве $Z^N \subset Z$.

Любую вектор-функцию $w^N \in Z^N$ представим в виде

$$w^N(x, y, t) = \sum_{i=1}^{N'} \alpha_i(t) \Phi_i(x, y),$$

где $N' = 4N_0 + 2N_1 + 4N_2$ — количество базисных функций, отвечающих всем $N = N_0 + N_1 + N_2$ узловым точкам в разбиении области $\overline{\Omega}$; N_0 — количество узловых точек, не принадлежащих $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, N_i — количество узловых точек, принадлежащих Γ_i, $i = \overline{1, 2}$; $\alpha_i(t)$, $i = \overline{1, N'}$, — функции, интегрируемые вместе со второй производной на $[0, T]$; $\{\Phi_i\}_{i=1}^{N'}$ — базис пространства Z_t^N, получаемый из Z^N фиксированием $\forall\, t \in [0, T]$. Компоненты этого базиса имеют следующий вид:

$$\Phi_{4i-3} = (\varphi_i, 0, 0, 0)^T, \quad \Phi_{4i-2} = (0, \varphi_i, 0, 0)^T,$$

$$\Phi_{4i-1} = (0, 0, \varphi_i, 0)^T, \quad \Phi_{4i} = (0, 0, 0, \varphi_i)^T, \quad i = \overline{1, N_0},$$

$$\Phi_{4N_0+2i-1} = (0, 0, \varphi_{N_0+j}, 0)^T, \; i = \overline{1, N_1}, \; \Phi_{4N_0+2i} = (0, 0, 0, \varphi_{N_0+i})^T, \; i = \overline{1, N_1},$$

$$\Phi_{4N_0+2N_1+4i-3} = (\varphi_{N_0+N_1+i}, 0, 0, 0)^T,$$

$$\Phi_{4N_0+2N_1+4i-2} = (0, \varphi_{N_0+N_1+i}, 0, 0)^T, \quad i = \overline{1, N_2},$$

$$\Phi_{4N_0+2N_1+4i-1} = (0, 0, \varphi_{N_0+N_1+i}, 0)^T,$$

$$\Phi_{4N_0+2N_1+4i} = (0, 0, 0, \varphi_{N_0+N_1+i})^T, \quad i = \overline{1, N_2}.$$

Здесь $\{\varphi_i(x, y)\}_{i=1}^{N}$ — совокупность линейно независимых функций, соответствующих узловым точкам МКЭ, построенных на полных полиномах степени k $(k = 1, 2, 3)$ и имеющих в $\overline{\Omega}$ ограниченный носитель, причем первые N_0 из них, соответствующие точкам, не принадлежащим $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, удовлетворяют нулевым краевым условиям на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Базис подпространства $Z_0^N \subset Z_0$ совпадает с базисом $\{\Phi_i\}_{i=1}^{N'}$ пространства Z_t^N, т.е. любая вектор-функция $q^N(x, y) \in Z_0^N$ может быть представлена в виде

$$q^N(x, y) = \sum_{i=1}^{N'} \beta_i \Phi_i(x, y),$$

где β_i — константы.

Приближенное обобщенное решение задачи (21)–(23) принадлежит пространству Z_N и удовлетворяет следующим интегральным соотношениям:

$$m\left(\frac{\partial^2 w^N}{\partial t^2}, q^N\right) + \overline{m}\left(w^N; \frac{\partial w^N}{\partial t}, q^N\right) + a(w_1^N; w^N, q^N) = \langle \overline{F}, q^N \rangle, \quad (24)$$

$$w^N(x, y, t) \in Z^N, \quad \forall\, q^N(x, y) \in Z_0^N, \quad \forall\, t \in (0, T],$$

$$\langle w^N(x, y, 0), q^N \rangle = \langle W^0(x, y), q^N \rangle \quad \forall\, q^N(x, y) \in Z_0^N, \quad (25)$$

$$\langle \frac{\partial w^N(x, y, 0)}{\partial t}, q^N \rangle = \langle W^1(x, y), q^N \rangle \quad \forall\, q^N(x, y) \in Z_0^N. \quad (26)$$

Пусть выполняются такие условия:

$$0 \le \beta_0^i \le |b_i(x, y)| \le \beta_1^i, \quad i = 1, 2; \quad 0 < k_0 \le \left| K\left(x, y), \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}\right| \le k_1,$$

$$\left| K\left(x, y, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) - K\left(x, y, \frac{\partial v_1}{\partial x}, \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) \right| \le$$

$$\le k_2 \sum_{i=1}^{2} \left\{ \left| \frac{\partial u_{1i}}{\partial x} - \frac{\partial v_{1i}}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial u_{1i}}{\partial y} - \frac{\partial v_{1i}}{\partial y} \right| \right\},$$

$$\left| K_t'\left(x, y, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) \right| \le k_3, \quad \left| K_{tt}''\left(x, y, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) \right| \le k_4,$$

$$\forall\, t \in [0, T] \quad K\left(x, y, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) \in C^1(\Omega),$$

$$K_x'\left(x, y, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}\right), \; K_y'\left(x, y, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}\right),$$

$$K_{tx}''\left(x, y, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}\right), \; K_{ty}''\left(x, y, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}\right),$$

$$K_{ttx}'''\left(x, y, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}\right), \; K_{tty}'''\left(x, y, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) \in L_\infty(\Omega_T),$$

$$\left| K_{\text{ф},x}^{-1}(u) - K_{\text{ф},x}^{-1}(v) \right| \le \gamma_1 |u - v|,$$

$$\left| K_{\text{ф},y}^{-1}(u) - K_{\text{ф},y}^{-1}(v) \right| \le \gamma_2 |u - v| \quad \forall\, u \in Z, \quad \forall\, v \in Z. \tag{27}$$

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть $w(x, y, t) \in Z$ — обобщенное решение задачи (21)–(23), а $w^N(x, y, t) \in Z^N$ — приближенное обобщенное решение задачи (24)–(26). Предположим, что $W^0(x, y), \; W^1(x, y) \in W_2^{k+1}(\Omega); \; w, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \in$ $\in L_\infty(0, T; W_2^{k+1}(\Omega))$. Тогда существует константа C такая, что выполняется оценка

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} w(x, y, t) - w^N(x, y, t) \right\|_{L_\infty(0, T;\, W_2^1(\Omega))} +$$

$$+ \| w(x, y, t) - w^N(x, y, t) \|_{L_\infty(0, T;\, W_2^1(\Omega))} \le C h^k, \tag{28}$$

где C зависит от T, констант $\beta_0^i, \beta_1^i, \gamma_i, k_j, \; i = 1, 2, \; j = \overline{0, 4}$, из (27) и норм $\|w\|_{L_2(0, T;\, W_2^{k+1}(\Omega))}$, $\|w_t'\|_{L_2(0, T;\, W_2^{k+1}(\Omega))}$, $\|w_{tt}''\|_{L_2(0, T;\, W_2^{k+1}(\Omega))}$; h — максимальная длина сторон треугольников, $k = 1, 2, 3$ — степень многочленов метода конечных элементов.

Доказательство. Положим

$$\psi = w^N - \widetilde{w}, \quad \eta = w - \widetilde{w}, \quad l = w - w^N, \tag{29}$$

где $\widetilde{w} = \widetilde{w}(x, y, t) \in Z^N$ и $\forall\, t \in (0, T]$ удовлетворяет условию

$$W_1(w_1; w_1 - \widetilde{w}_1, q_1) + \overline{W}(w_1; w_2 - \widetilde{w}_2, q_2) +$$

$$+ \langle K(x, y, \frac{\partial w_1}{\partial x}, \frac{\partial w_1}{\partial y})(w - \widetilde{w}), q\rangle = 0 \quad \forall\, q \in Z_0^N, \tag{30}$$

в котором

$$\overline{W}(w_1; w_2 - \widetilde{w}_2, q_2) =$$

$$= \iint\limits_{\Omega} K(x, y, \frac{\partial w_1}{\partial x}, \frac{\partial w_1}{\partial y}) \left(\frac{\partial (w_{21} - \widetilde{w}_{21})}{\partial x} \frac{\partial q_{21}}{\partial x} + \frac{\partial (w_{21} - \widetilde{w}_{21})}{\partial y} \frac{\partial q_{21}}{\partial y} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial (w_{22} - \widetilde{w}_{22})}{\partial x} \frac{\partial q_{22}}{\partial x} + \frac{\partial (w_{22} - \widetilde{w}_{22})}{\partial y} \frac{\partial q_{22}}{\partial y} \right) d\Omega, \tag{31}$$

а $W_1(w_1; w_1 - \widetilde{w}, q_1)$ имеет вид (14).

Тогда $\forall\, t \in (0, T]$ и для любой функции $q(x, y) \in Z_0^N$, используя равенства (29), (24), (21), получим

$$m\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, q \right) + \overline{m}\left(w^N; \frac{\partial \psi}{\partial t}, q \right) + a(w_1^N; \psi, q) =$$

$$= -m\left(\frac{\partial^2 \widetilde{w}}{\partial t^2}, q \right) - \overline{m}\left(w^N; \frac{\partial \widetilde{w}}{\partial t}, q \right) - a(w_1^N; \widetilde{w}, q) +$$

$$+ \langle \overline{F}, q\rangle = -m\left(\frac{\partial^2 \widetilde{w}}{\partial t^2}, q \right) - \overline{m}\left(w^N; \frac{\partial \widetilde{w}}{\partial t}, q \right) - a(w_1^N; \widetilde{w}, q) +$$

$$+ m\left(\frac{\partial^2 \widetilde{w}}{\partial t^2, q} \right) + \overline{m}\left(w; \frac{\partial \widetilde{w}}{\partial t}, q \right) + a(w_1; w, q) \pm \overline{m}\left(w; \frac{\partial \widetilde{w}}{\partial t}, q \right).$$

Из последнего равенства и соотношений (29), (30), (17) следует

$$m\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, q \right) + \overline{m}\left(w^N, \frac{\partial \psi}{\partial t}, q \right) + a(w_1^N; \psi, q) =$$

$$= m\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, q \right) + \overline{m}\left(w; \frac{\partial \eta}{\partial t}, q \right) + \overline{m}\left(w; \frac{\partial \widetilde{w}}{\partial t}, q \right) -$$

$$- \overline{m}\left(w^N; \frac{\partial \widetilde{w}}{\partial t}, q \right) + W_1(w_1; \widetilde{w}_1, q_1) - W_1(w_1^N; \widetilde{w}_1, q_1) + W_2(\eta, q) -$$

$$- \overline{W}(w_1; \eta_2, q_2) - \langle K(x, y, \frac{\partial w_1}{\partial x}, \frac{\partial w_1}{\partial y}) \eta, q\rangle \quad \forall\, q \in Z_0^N, \quad \forall\, t \in (0, T]. \tag{32}$$

Положив в формуле (32) $q := \dfrac{\partial \psi}{\partial t}$, имеем:

$$m\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) + \overline{m}\left(w^N; \frac{\partial \psi}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) + a\left(w_1^N; \psi, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) =$$

$$= m\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) + \overline{m}\left(w; \frac{\partial \eta}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) +$$

$$+ \overline{m}\left(w; \frac{\partial \widetilde{w}}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) - \overline{m}\left(w^N; \frac{\partial \widetilde{w}}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) + W_1\left(w_1; \widetilde{w}_1, \frac{\partial \psi_1}{\partial t}\right) - W_1\left(w_1^N; \widetilde{w}_1, \frac{\partial \psi_1}{\partial t}\right) +$$

$$+ W_2\left(\eta, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) - \overline{W}\left(w_1; \eta_2, \frac{\partial \psi_2}{\partial t}\right) - \langle K\,(x, y, \frac{\partial w_1}{\partial x}, \frac{\partial w_1}{\partial y})\,\eta, \frac{\partial \psi}{\partial t}\rangle \quad \forall\, t \in (0, T]. \tag{33}$$

Рассмотрим выражения

$$m\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) = \iint\limits_{\Omega} \left[\rho_{\text{ch}}\,(1-m)\left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2}, \frac{\partial \psi_1}{\partial t}\right) + \rho_{\text{в}} m\left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2}, \frac{\partial \psi_2}{\partial t}\right)\right] d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt} m\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right), \quad a\left(w_1^N; \psi, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt} a\,(w_1^N; \psi, \psi) - \frac{1}{2}\hat{W}(w_1^N; \psi_1, \psi_1) \quad \forall\, t \in (0, T], \tag{34}$$

где

$$\hat{W}(w_1^N; \psi_1, \psi_1) =$$

$$= \iint\limits_{\Omega} \left[\lambda_t'(w_1^N)\left(\frac{\partial \psi_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{12}}{\partial y}\right)^2 + 2\mu_t'(w_1^N)\left(\left(\frac{\partial \psi_{11}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_{12}}{\partial y}\right)^2\right)\right.$$

$$\left. + \mu_t'(w_1^N)\left(\frac{\partial \psi_{11}}{\partial y} + \frac{\partial \psi_{12}}{\partial x}\right)^2\right] d\Omega \quad \forall\, t \in (0, T].$$

Из последнего равенства, представлений (4) и условий (27) следует, что

$$\frac{1}{2}\hat{W}(w_1^N; \psi_1, \psi_1) \le$$

$$\le \frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega} \left\{|\lambda_t'(w_1^N)|\left(\frac{\partial \psi_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{12}}{\partial y}\right)^2 + 2|\mu_t'(w_1^N)|\left(\left(\frac{\partial \psi_{11}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_{12}}{\partial y}\right)^2\right)\right.$$

$$\left. + |\mu_t'(w_1^N)|\left(\frac{\partial \psi_{11}}{\partial y} + \frac{\partial \psi_{12}}{\partial x}\right)^2\right\} d\Omega \le k_3\,(\beta_1^1 + \beta_1^2)||\psi_1||^2_{H_0^1(\Omega)} \quad \forall\, t \in (0, T]. \tag{35}$$

Оценим правую часть равенства (33). Имеем

$$\left| m\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}, \frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\right| \le \iint\limits_{\Omega} \left| \rho_{\text{ch}}(1-m)\left(\frac{\partial^2\eta_1}{\partial t^2}, \frac{\partial\psi_1}{\partial t}\right) + \rho_{\text{в}} m \left(\frac{\partial^2\eta_2}{\partial t^2}, \frac{\partial\psi_2}{\partial t}\right)\right| d\Omega \le$$

$$\le P_1 \left\| \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} \right\|_{L_2(\Omega)} \left\| \frac{\partial\psi}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)},$$

$$\left| \overline{m}\left(w; \frac{\partial\eta}{\partial t}, \frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\right| \le \iint\limits_{\Omega} \left|\left(P(w)\frac{\partial}{\partial t}(\eta_1-\eta_2), \frac{\partial}{\partial t}(\psi_1-\psi_2)\right)\right| d\Omega \le$$

$$\le P_2 \left\| \frac{\partial\eta}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)} \left\| \frac{\partial\psi}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)} \quad \forall\, t \in (0, T], \tag{36}$$

где

$$P_1 = \max\{\rho_{\text{ch}}(1-m), \rho_{\text{в}} m\}, \;\; P_2 = 2\rho_{\text{в}} g m^2 \max\left\{ \|K^{-1}_{\text{ф}, x}\|_{L_\infty(\Omega_T)}, \|K^{-1}_{\text{ф}, y}\|_{L_\infty(\Omega_T)} \right\}.$$

Рассмотрим разности

$$\left| \overline{m}\left(w; \frac{\partial\tilde{w}}{\partial t}, \frac{\partial\psi}{\partial t}\right) - \overline{m}\left(w^N; \frac{\partial\tilde{w}}{\partial t}, \frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\right| \le$$

$$\le \iint\limits_{\Omega} \left|\left((P(w) - P(w^N))\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2), \frac{\partial}{\partial t}(\psi_1-\psi_2)\right)\right| d\Omega \le$$

$$\le P_3 \| l \|_{L_2(\Omega)} \left\| \frac{\partial\psi}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)} \quad \forall\, t \in (0, T], \tag{37}$$

$$\left| W_1\left(w_1; \tilde{w}_1, \frac{\partial\psi_1}{\partial t}\right) - W_1\left(w_1^N; \tilde{w}_1, \frac{\partial\psi_1}{\partial t}\right)\right| \le$$

$$\le \iint\limits_{\Omega} \left[|\lambda(w_1) - \lambda(w_1^N)| \left| \frac{\partial\tilde{w}_{11}}{\partial x} + \frac{\partial\tilde{w}_{12}}{\partial y}\right| \left| \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t} + \frac{\partial^2\psi_{12}}{\partial y\partial t}\right| + \right.$$

$$+ 2|\mu(w_1) - \mu(w_1^N)| \left| \frac{\partial\tilde{w}_{11}}{\partial x}\frac{\partial^2\psi_{11}}{\partial x\partial t} + \frac{\partial\tilde{w}_{12}}{\partial y}\frac{\partial^2\psi_{12}}{\partial y\partial t}\right| + |\mu(w_1) - \mu(w_1^N)| \times$$

$$\left. \times \left| \frac{\partial\tilde{w}_{11}}{\partial y} + \frac{\partial\tilde{w}_{12}}{\partial x}\right| \left| \frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial t} + \frac{\partial^2\psi_{12}}{\partial x\partial t}\right| \right] d\Omega \le P_4 \| l_1 \|_{H_0^1(\Omega)} \left\| \frac{\partial\psi_1}{\partial t} \right\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \forall\, t \in (0, T], \tag{38}$$

где

$$P_3 = 2\rho_{\text{w}} g m^2 \max\left\{ \gamma_1 \left\| \frac{\partial}{\partial t}(\tilde{w}_{11} - \tilde{w}_{21}) \right\|_{L_\infty(\Omega_T)}, \gamma_2 \left\| \frac{\partial}{\partial t}(\tilde{w}_{21} - \tilde{w}_{22}) \right\|_{L_\infty(\Omega_T)} \right\},$$

константа P_4 зависит от k_2, β_1^1, β_1^2 из (27), а также от норм $\left\| \frac{\partial \widetilde{w}_{1i}}{\partial x} \right\|_{L_\infty(\Omega_T)}$ и $\left\| \frac{\partial \widetilde{w}_{1i}}{\partial y} \right\|_{L_\infty(\Omega_T)}$, $i = 1, 2$.

Используя (14), (31), (27), оценим формы:

$$\left| W_2\left(\eta, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) \right| \le M^B \iint_\Omega \left| \frac{(1-m)^2}{m} \operatorname{div} \eta_1 \operatorname{div} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + (1-m) \operatorname{div} \eta_2 \operatorname{div} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \right.$$

$$\left. +(1-m) \operatorname{div} \eta_1 \operatorname{div} \frac{\partial \psi_2}{\partial t} + m \operatorname{div} \eta_2 \operatorname{div} \frac{\partial \psi_2}{\partial t} \right| d\Omega \le P_5 ||\eta||_{H_0^1(\Omega)} \left\| \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\|_{H_0^1(\Omega)},$$

$$\left| \overline{W}\left(w_1; \eta_2, \frac{\partial \psi_2}{\partial t} \right) \right| \le k_1 ||\eta_2||_{H_0^1(\Omega)} \left\| \frac{\partial \psi_2}{\partial t} \right\|_{H_0^1(\Omega)},$$

$$\left| \left\langle K\left(x, y, \frac{\partial w_1}{\partial x}, \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) \eta, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\rangle \right| \le k_1 ||\eta||_{L_2(\Omega)} \left\| \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)} \quad \forall\, t \in (0, T]. \tag{39}$$

Подставим в равенство (33) полученные соотношения (34)–(39) и учтем, что форма $\overline{m}\left(w^N; \frac{\partial \psi}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)$ неотрицательна. Будем иметь

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[m\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + a\,(w_1^N; \psi, \psi) \right] \le$$

$$\le k_3 (\beta_1^1 + \beta_1^2) ||\psi_1||_{H_0^1(\Omega)} + P_1 \left\| \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \right\|_{L_2(\Omega)} \left\| \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)} +$$

$$+ P_2 \left\| \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)} \left\| \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)} + P_3 ||l||_{L_2(\Omega)} \left\| \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)} + P_4 ||l_1||_{H_0^1(\Omega)} \left\| \frac{\partial \psi_1}{\partial t} \right\|_{H_0^1(\Omega)}$$

$$+ P_5 ||\eta||_{H_0^1(\Omega)} \left\| \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\|_{H_0^1(\Omega)} + k_1 ||\eta_2||_{H_0^1(\Omega)} \left\| \frac{\partial \psi_2}{\partial t} \right\|_{H_0^1(\Omega)}$$

$$+ k_1 ||\eta||_{L_2(\Omega)} \left\| \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)} \quad \forall\, t \in (0, T]. \tag{40}$$

Далее, используя неравенство треугольника $||l|| \le ||\psi|| + ||\eta||$ и неравенство $ab \le \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, получим

$$\frac{d}{dt} \left[m\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + a\,(w_1^N; \psi, \psi) \right] \le C_1 \left(||\psi||^2_{W_2^1(\Omega)} + \left\| \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\|^2_{W_2^1(\Omega)} \right) +$$

$$+C_2\left(||\eta||_{W_2^1(\Omega)}+\left\|\frac{\partial\eta}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega)}+\left\|\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\right\|^2_{L_2(\Omega)}\right)\quad\forall\, t\in(0,T],\tag{41}$$

где константы C_1, C_2, выражаются через k_3, β_1^1, β_1^2, k_1, P_i, $i=\overline{1,5}$.

Для положительно-определенных форм справедливы следующие неравенства:

$$m\left(\frac{\partial\psi}{\partial t},\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)=\iint\limits_{\Omega}\left[\rho_{\text{p}}(1-m)\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial t},\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\right)+\rho_{\text{w}}m\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial t},\frac{\partial\psi_2}{\partial t}\right)\right]d\Omega\ge C_3\left\|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega)},$$

$$a\,(w_1^N;\psi,\psi)=W_1(w_1^N;\psi_1,\psi_1)+W_2(\psi,\psi)\ge C_4||\psi_1||^2_{H_0^1(\Omega)}\quad\forall\, t\in(0,T],\tag{42}$$

где $C_3=\min\{\rho_{\div}(1-m),\rho_{в}m\}$, а C_4 зависит от k_0, β_0^1, β_0^2.

Проинтегрируем соотношение (41) по t от 0 до $s\,\#\, s\le T$, учтем оценки (42) и тот факт, что $\exists\,\mathrm{const}\; L_1=L_1(s)>0$, $L_2=L_2(s)>0$, для которых справедливы неравенства

$$\left\|\frac{\partial\psi}{\partial t}(\cdot,\cdot,s)\right\|^2_{H_0^1(\Omega)}\le L_1\int\limits_0^s\left\|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\|^2_{H_0^1(\Omega)}dt,\;||\psi(\cdot,\cdot,s)||^2_{W_2^1(\Omega)}\le L_2\int\limits_0^s||\psi||^2_{W_2^1(\Omega)}dt.$$

Получим

$$C_3\left\|\frac{\partial\psi}{\partial t}(\cdot,\cdot,s)\right\|^2_{L_2(\Omega)}+\left\|\frac{\partial\psi}{\partial t}(\cdot,\cdot,s)\right\|^2_{H_0^1(\Omega)}+C_4||\psi_1(\cdot,\cdot,s)^2_{H_0^1(\Omega)}+$$

$$+||\psi(\cdot,\cdot,s)^2_{W_2^1(\Omega)}\le C_3\left\|\frac{\partial\psi}{\partial t}(\cdot,\cdot,0)\right\|^2_{L_2(\Omega)}+C_4||\psi_1(\cdot,\cdot,0)||^2_{H_0^1(\Omega)}+$$

$$+\int\limits_0^s(C_1+C_5)\left(||\psi||_{W_2^1(\Omega)}+\left\|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\|^2_{W_2^1(\Omega)}\right)dt+$$

$$+C_2\int\limits_0^s\left(||\eta||^2_{W_2^1(\Omega)}+\left\|\frac{\partial\eta}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega)}+\left\|\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\right\|^2_{L_2(\Omega)}\right)dt,\tag{43}$$

где $C_5=\max\{L_1,L_2\}$.

Используем лемму Гронуола–Беллмана [6], из которой следует, что если $u(s), v(s)\ge 0$, $\tilde c$ — положительная постоянная, и если для $s\ge 0$ $u(s)\le\tilde c+\int\limits_0^s u(t)v(t)dt$, то выполняется неравенство $u(s)\le\;\le\tilde c\exp\left(\int\limits_0^s v(t)dt\right)$.

Применив лемму к неравенству (43) и взяв в левой части супремум по $0<s\le T$, будем иметь

$$\left\|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\|^2_{L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))}+||\psi||^2_{L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))}$$

$$\le C_6\left(\left\|\frac{\partial\psi}{\partial t}(\cdot,\cdot,0)\right\|^2_{L_2(\Omega)}+||\psi_1(\cdot,\cdot,0)||^2_{H_0^1(\Omega)}\right.$$

$$\left.+||\eta||_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}+\left\|\frac{\partial\eta}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}+\left\|\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\right\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}\right). \qquad (44)$$

Из условий (22), (23), (25), (26) следует что

$$(l(\cdot,\cdot,0),q)=0,\quad \left(\frac{\partial l}{\partial t}(\cdot,\cdot,0),q\right)=0\quad \forall\, q\in Z_0^N.$$

Учитывая последние равенства и тот факт, что

$$\left\|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\|^2_{L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))}+||\psi||^2_{L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))}\le$$

$$\le C_6\left(\left\|\frac{\partial\psi}{\partial t}(\cdot,\cdot,0)\right\|^2_{L_2(\Omega)}+||\psi_1(\cdot,\cdot,0)||^2_{H_0^1(\Omega)}+\right.$$

$$\left.+||\eta||_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}+\left\|\frac{\partial\eta}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}+\left\|\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\right\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}\right)., \qquad (45)$$

запишем

$$||\psi_1(\cdot,\cdot,0)||_{H_0^1(\Omega)}\le||l_1(\cdot,\cdot,0)||_{H_0^1(\Omega)}+||\eta_1(\cdot,\cdot,0)||_{H_0^1(\Omega)}\le||\eta_1||_{L_\infty(0,T;H_0^1(\Omega))}\le$$

$$\le C_7\left(||\eta_1||_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))}+\left\|\frac{\partial\eta_1}{\partial t}\right\|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))}\right),$$

$$\left\|\frac{\partial\psi}{\partial t}(\cdot,\cdot,0)\right\|_{L_2(\Omega)}\le\left\|\frac{\partial l}{\partial t}(\cdot,\cdot,0)\right\|_{L_2(\Omega)}+\left\|\frac{\partial\eta}{\partial t}(\cdot,\cdot,0)\right\|_{L_2(\Omega)}$$

$$\le\left\|\frac{\partial\eta}{\partial t}\right\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}\le C_8\left(\left\|\frac{\partial\eta}{\partial t}\right\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}+\left\|\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\right\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}\right).$$

Таким образом, в соотношении (44) имеем

$$\left\|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\|^2_{L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))}+||\psi||^2_{L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))}\le$$

$$\le C_9\left(||\eta||^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}+\left\|\frac{\partial\eta}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}+\left\|\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\right\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}\right).$$

Из последнего неравенства и неравенства треугольника с учетом оценок (45) получим

$$\left\| \frac{\partial l}{\partial t} \right\|_{L_\infty(0,T;\, W_2^1(\Omega))} + ||l||_{L_\infty(0,T;\, W_2^1(\Omega))} \le$$

$$\le C_{10} \left(||\eta||_{L_2(0,T;\, W_2^1(\Omega))} + \left\| \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\|_{L_2(0,T;\, W_2^1(\Omega))} + \left\| \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \right\|_{L_2(0,T;\, L_2(\Omega))} \right). \quad (46)$$

Для оценок норм η, $\dfrac{\partial \eta}{\partial t}$, $\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$ используем известные результаты.

Для положительного целого k и параметра h, $0 < h < 1$, введем конечномерное подпространство [7, 8] $S_k^h(\Omega) \subset W_2^{k+1}(\Omega)$ с нормой $||\cdot||_{W_2^{k+1}(\Omega)}$, которое удовлетворяет следующему: $\forall\, v \in W_2^j(\Omega)$ существует константа M, не зависящая от h и v, такая что

$$\inf_{\chi \in S_k^h(\Omega)} ||v - \chi||_{W_2^l(\Omega)} \le M h^{j-l} ||v||_{W_2^l(\Omega)}, \quad (47)$$

для любых неотрицательных j и l, $2 \le j \le k+1$, $0 \le l \le k+1$.

Для билинейной формы вида

$$a(w, v) = \sum_{|p|,\,|q| \le 1} \int_\Omega c_{pq}(x) D^p w(x) D^q v(x), \quad w, v \in W_2^1(\Omega), \quad c_{pq} \in L_\infty(\Omega),$$

для которой выполняются оценки

$$|a(w, v)| \le c_0 ||w||_{W_2^1(\Omega)} ||v||_{W_2^1(\Omega)}, \quad a(w, w) \ge \zeta ||w||^2_{W_2^1(\Omega)}, \quad w, v \in W_2^1(\Omega),$$

а сопряженная форма $a^*(w, v) = a(v, w)$, введем следующее понятие k-регулярности [7].

Определение 3. Форма $a(\cdot,\cdot)$ называется k-регулярной на $W_2^1(\Omega)$, если для данной $f \in W_2^s(\Omega)$, $0 \le s \le k$, любое решение $w \in W_2^1(\Omega)$ уравнения $a(w, v) = \langle f, v \rangle$ для любого $v \in W_2^1(\Omega)$ принадлежит $W_2^{s+2}(\Omega)$.

Согласно [7], если $a^*(\cdot,\cdot)$ 0-регулярная на $W_2^1(\Omega)$, то для $w \in W_2^{k+1}(\Omega) \cap W_2^1(\Omega)$ и $\tilde{w} \in S_k^h(\Omega)$, таких что $a(w - \tilde{w}, v) = 0$, $v \in S_k^h(\Omega)$, справедливы неравенства

$$||w - \tilde{w}||_{L_2(\Omega)} \le c' c_0 M h ||w - \tilde{w}||_{W_2^1(\Omega)},$$
$$||w - \tilde{w}||_{L_2(\Omega)} \le c' c_0^2 M^2 \zeta^{-1} h^{k+1} ||w||_{W_2^{k+1}(\Omega)},$$
$$||w - \tilde{w}||_{H_0^1(\Omega)} \le c_0 M \zeta^{-1} h^k ||w||_{W_2^{k+1}(\Omega)}, \quad (48)$$

где c' — некоторая константа, не зависящая от w и h.

Из [7] следует, что билинейная форма

$$\bar{a}(w_1; w, q) = W_1(w_1; w_1, q_1) + \overline{W}(w_1; w_2, q_2) + \langle K(x, y, \frac{\partial w_1}{\partial x}, \frac{\partial w_1}{\partial y}) w, q \rangle$$

будет регулярной на $W_2^1(\Omega)$.

Введенные выше пространства Z^N и Z_0^N обладают свойствами пространства S_k^h, $k=1,2,3$, где h — максимальная длина сторон треугольников при разбиении области $\overline{\Omega}$ [8, 9]. Поскольку для формы $\overline{a}\,(w_1;\eta,q)$ выполняется условие (30), то для $\eta = w-\widetilde{w}$ справедливы оценки (48):

$$||\eta||_{L_2(\Omega)}\,(t) \le S_1 h^{k+1} ||w||_{W_2^{k+1}(\Omega)}\,(t), \quad ||\eta||_{H_0^1(\Omega)}\,(t) \le S_2 h^k ||w||_{W_2^{k+1}(\Omega)}\,(t).$$

Оценки для $\left\|\dfrac{\partial\eta}{\partial t}\right\|_{H_0^1(\Omega)}(t)$, $\left\|\dfrac{\partial\eta}{\partial t}\right\|_{L_2(\Omega)}(t)$, $\left\|\dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\right\|_{L_2(\Omega)}(t)$, $\left\|\dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\right\|_{H_0^1(\Omega)}(t)$ выводятся аналогично [7].

Таким образом, существует константа

$$C_{11} = C_{11}\Big(\beta_0^i, \beta_1^i, \gamma_i, k_j, ||w||_{L_2(0,T;\, W_2^{k+1}(\Omega))}, ||w_t'||_{L_2(0,T;\, W_2^{k+1}(\Omega))},$$

$$||w_{tt}''||_{L_2(0,T;\, W_2^{k+1}(\Omega))}\Big)\; i=1,2, \quad j=\overline{0,4},$$

такая что

$$||\eta||_{L_2(0,T;\, W_2^1(\Omega))} + \left\|\frac{\partial\eta}{\partial t}\right\|_{L_2(0,T;\, W_2^1(\Omega))} + \left\|\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\right\|_{L_2(0,T;\, L_2(\Omega))} \le C_{11} h^k. \tag{49}$$

Из неравенств (46), (49) следует оценка (28).

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Био М.А. Механика деформирования и распространения волн в пористой среде // Механика. Период. сборник переводов иностр. статей. — 1963. — **6**, № 82. — С. 103–134.
2. Зарецкий Ю.К. Лекции по современной механике грунтов. — Рн/Д.: Изд-во Ростов. ун-та, 1989. — 608 с.
3. Колдоба А.В., Пергамент А.Х., Повещенко Ю.А., Симус Н.А. Напряженно-деформированное состояние насыщенной пористой среды, вызванное фильтрацией жидкости // Математическое моделирование. — 1999. — **11**, № 10. — С. 3–16.
4. Скопецкий В.В., Марченко О.А. Исследование систем динамической консолидации анизотропных сред // Кибернетика и системный анализ. — 2003. — № 4. — С. 138–155.
5. Скопецкий В.В., Марченко О.А. Постановка и исследование задач для динамических систем неоднородных двухфазных сред // Там же. — 2005. — № 6. — С. 87–102.
6. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. — М.: Изд-во иностр. лит., 1954. — 215 с.
7. Wheeler M.F. A priori error estimates for Galerkin approximations to parabolic partial differential equations // SIAM J. Numer. Anal. — 1973. — **10**, N 4. — P. 723–759.
8. Garth A. Baker. Error estimates for finite element methods for second order hyperbolic equations // Ibid. — 1976. — **13**, N 4. — P. 564–576.
9. Garth A. Baker, Vassillious A. Dougalis. The effect of quadrature errors of finite element approximations for second order hyperbolic equations // Ibid. — 1976. — **13**, N 4. — P. 577–598.

Поступила 15.11.2007