УДК 518.9

А.А. ЧИКРИЙ, И.С. РАППОПОРТ, К.А. ЧИКРИЙ

СРАВНЕНИЕ ГАРАНТИРОВАННЫХ ВРЕМЕН ПРИ УПРАВЛЕНИИ ДВИЖЕНИЕМ В УСЛОВИЯХ КОНФЛИКТА

Ключевые слова: *конфликтно-управляемый процесс, выпуклозначное отображение, контруправление, суперпозиционная измеримость, гарантированное время.*

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа является продолжением исследований [1, 2], примыкает к публикациям [3–11] и посвящена изучению гарантированных времен сближения квазилинейного конфликтно-управляемого процесса с заданным цилиндрическим множеством. Рассмотрены различные схемы метода разрешающих функций. Показано, что достаточным условием реализации основной схемы метода разрешающих функций в классе стробоскопических стратегий является выпуклозначность специального многозначного отображения. Предложена отдельная схема метода разрешающих функций, гарантирующая окончание игры с помощью конруправлений без дополнительных предположений, а также схема с фиксированными точками телесной части терминального множества. Получена функциональная форма первого прямого метода Понтрягина с использованием соответствующих разрешающих функций. Для упомянутых выше схем характерна единая последовательность построений, отличающихся некоторыми нюансами и подчеркивающих определенное качество конфликтно-управляемого процесса. Установлены соотношения между гарантированными временами, а также условия их совпадения для разных схем. При этом ключевыми являются условия выпуклозначности отображения и аффинности терминального множества. Эти условия носят глобальный характер и не зависят от начальных условий.

Отдельно изучен случай совпадения и отличия гарантированных времен в зависимости от начальных условий. Достаточные условия выражены в терминах конусов для соответствующих многозначных отображений.

Теоретические результаты иллюстрируются на плоском модельном примере с простым движением и телесным терминальным множеством. При этом область управления преследователя специфична: она является объединением круга и треугольника. Соответственно область управления убегающего — круг. Это приводит к неполному выметанию в условии Понтрягина. Тем не менее в примере вычислены все рассмотренные гарантированные времена и они отличаются между собой. Даны такие необходимые и достаточные условия окончания игры, в которые превращаются общие достаточные условия в терминах конусов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, ИНФОРМИРОВАННОСТЬ

Рассмотрим конфликтно-управляемый процесс, эволюция которого описывается равенством

$$z(t) = g(t) + \int_0^t \Omega(t,\tau)\varphi(u(\tau),\upsilon(\tau))\,d\tau,\ \ t \geq 0. \tag{1}$$

Здесь $z(t) \in R^n$, функция $g(t)$, $g: R_+ \to R^n$, является измеримой по Лебегу и ограниченной при $t > 0$, матричная функция $\Omega(t,\tau)$, $t \geq \tau \geq 0$, измерима по t, а также суммируема по τ для каждого $t \in R_+$. Блок управления задается функцией $\varphi(u,\upsilon)$, $\varphi: U \times V \to R^n$, которая считается непрерывной по совокупности переменных на прямом произведении непустых компактов U и V, т.е. $U \in K(R^m)$, $V \in K(R^l)$, m, l, n — натуральные числа.

Управления игроков $u(\tau)$, $u: R_+ \to U$, и $v(\tau)$, $v: R_+ \to V$, являются измеримыми функциями времени.

Кроме процесса (1) задано терминальное множество M^*, имеющее цилиндрический вид

$$M^* = M_0 + M, \tag{2}$$

где M_0 — линейное подпространство из R^n, а $M \in K(L)$, где L — ортогональное дополнение к M_0 в R^n.

Цели первого (u) и второго (v) игроков противоположны. Первый старается вывести траекторию процесса (1) на терминальное множество за кратчайшее время, а второй — максимально оттянуть момент попадания траектории на множество M^* или вообще избежать этой встречи.

Примем сторону первого игрока и будем ориентироваться на выбор противником в качестве управления произвольной измеримой функции, которая принимает значения из V. Если игра (1), (2) происходит на интервале $[0,T]$, то управление первого игрока в момент t выбираем на основе информации о $g(T)$ и $v_t(\cdot)$, т.е. в виде измеримой функции

$$u(t) = u(g(T), v_t(\cdot)),\ t \in [0,T],\ u(t) \in U, \tag{3}$$

где $v_t(\cdot) = \{v(s): s \in [0,t]\}$ — предыстория управления второго игрока до момента t, или в виде контруправления

$$u(t) = u(g(T), v(t)),\ t \in [0,T],\ u(t) \in U. \tag{4}$$

Если, в частности, $g(t) = e^{At} z_0$, $\Omega(t,\tau) = e^{A(t-\tau)}$, $z(0) = z_0$, а e^{At} — матричная экспонента, то говорят, что управление $u(t) = u(z_0, v_t(\cdot))$ реализует квазистратегию [3], а контруправление $u(t) = u(z_0, v(t))$ — проявление стробоскопической стратегии [4, 5].

Цель работы — установить для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) достаточные условия окончания игры сближения за гарантированное время метода разрешающих функций [6] в классе стробоскопических стратегий и сравнить их с первым прямым методом Л.С. Понтрягина [4, 5].

Обозначим π ортопроектор, который действует из R^n в L. Положив $\varphi(U,v) = \{\varphi(u,v): u \in U\}$, рассмотрим многозначные отображения

$$W(t,\tau,v) = \pi\Omega(t,\tau)\varphi(U,v),\ W(t,\tau) = \bigcap_{v \in V} W(t,\tau,v)$$

на множествах $\Delta \times V$ и Δ соответственно, где $\Delta = \{(t,\tau): 0 \le \tau \le t < \infty\}$.

Условие Понтрягина. Многозначное отображение $W(t,\tau)$ принимает непустые значения на множестве Δ.

В силу свойств параметров конфликтно-управляемого процесса (1) отображение $\varphi(U,v)$, $v \in V$, — непрерывное в метрике Хаусдорфа многозначное отображение. Поэтому с учетом предположений о матричной функции $\Omega(t,\tau)$ можно сделать вывод, что при любом фиксированном $t > 0$ отображение $W(t,\tau,v)$ является измеримым по τ на интервале $[0,\ t]$ и замкнутым по v, $v \in V$, многозначным отображением. Тогда [13] отображение $W(t,\tau)$ — измеримое по τ замкнутозначное отображение на интервале $[0,t]$. Заметим, что отображения $W(t,\tau,v)$, $W(t,\tau)$, вообще говоря, не компактозначны, их значения могуть быть неограниченными множествами.

Из условия Понтрягина и теоремы измеримого выбора [13] вытекает, что при любом $t \ge 0$ существует хотя бы один измеримый по τ селектор $\gamma(t,\tau)$ такой, что $\gamma(t,\tau) \in W(t,\tau)$, $(t,\tau) \in \Delta$. Обозначим множество таких селекторов Γ_t и введем функцию

$$\xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot)) = \pi g(t) + \int_0^t \gamma(t, \tau) d\tau, \tag{5}$$

где $\gamma(\cdot, \cdot) \in \Gamma = \bigcup_{t \geq 0} \Gamma_t$ — некоторый фиксированный селектор. В силу предположений селектор $\gamma(t, \tau)$ является суммируемой по τ, $\tau \in [0, t]$, функцией при любом $t > 0$.

СХЕМЫ ПОЛУЧЕНИЯ ГАРАНТИРОВАННЫХ ВРЕМЕН

Рассмотрим многозначное отображение

$$\mathfrak{A}(t, \tau, v) = \{\alpha \geq 0 \colon [W(t, \tau, v) - \gamma(t, \tau)] \cap \alpha[M - \xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot))] \neq \varnothing\},$$
$$\mathfrak{A} \colon \Delta \times V \to 2^{R_+}, \tag{6}$$

и его опорную функцию в направлении $+1$ $\alpha(t, \tau, v) = \sup\{\alpha \colon \alpha \in \mathfrak{A}(t, \tau, v)\}$, $(t, \tau) \in \Delta$, $v \in V$.

Данную функцию называют разрешающей [6].

Поскольку выполнено условие Понтрягина, многозначное отображение $\mathfrak{A}(t, \tau, v)$ на множестве $\Delta \times V$ имеет непустой замкнутый образ. Следует также заметить, что при $\xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot)) \in M$ имеем $\mathfrak{A}(t, \tau, v) = [0, +\infty)$ и соответственно $\alpha(t, \tau, v) = +\infty$ при любых $\tau \in [0, t]$ и $v \in V$.

Учитывая свойства параметров конфликтно-управляемого процесса (1), (2), теорем о характеризации и обратном образе, можно показать, что многозначное отображение $\mathfrak{A}(t, \tau, v)$ является $L \times B$-измеримым [13] по τ, v, $\tau \in [0, t]$, $v \in V$, а разрешающая функция $\alpha(t, \tau, v)$ — $L \times B$-измеримой по τ, v в силу теоремы об опорной функции [13] при $\xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot)) \notin M$.

Рассмотрим функцию

$$T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) = \inf\left\{ t \geq 0 \colon \int_0^t \inf_{v \in V} \alpha(t, \tau, v)\, d\tau \geq 1 \right\}. \tag{7}$$

Если для некоторого $t > 0$ $\xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot)) \notin M$, то можно показать, что функция $\inf_{v \in V} \alpha(t, \tau, v)$ измерима по τ, $\tau \in [0, t]$.

Если $\xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot)) \in M$, то $\inf_{v \in V} \alpha(t, \tau, v) = +\infty$ для $\tau \in [0, t]$ и в этом случае значение интеграла в соотношении (7) естественно положить равным $+\infty$, а соответствующее неравенство выполнено автоматически. В случае, когда неравенство в фигурных скобках в (7) не выполняется при всех $t > 0$, будем предполагать, что $T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) = +\infty$.

Теорема 1. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие Понтрягина, множество M — выпуклое и для заданной функции $g(\cdot)$ и некоторого селектора $\gamma(\cdot, \cdot) \in \Gamma$ точная нижняя грань в (7) по t достигается, $T = T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) < +\infty$.

Тогда траектория процесса (1) может быть приведена на терминальное множество (2) в момент T с помощью управления вида (3).

Доказательство теоремы 1 приведено в [1].

Представляет интерес вопрос о том, при каких условиях эта теорема может быть реализована в классе контруправлений (4). Таковым условием является следующее условие выпуклозначности отображения $\mathfrak{A}(T, \tau, v)$, что приводит к справедливости соответствующей теоремы.

Условие 1. При $\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot)) \notin M$ отображение $\mathfrak{A}(T, \tau, v)$, $T \geq \tau \geq 0$, $v \in V$, выпуклозначно, т.е. $\mathfrak{A}(T, \tau, v) = [0, \alpha(T, \tau, v)]$.

Теорема 2. Пусть для игровой задачи (1), (2) выполнены условие Понтрягина и условие 1 с селектором $\gamma(T,\cdot)$, а множество M является выпуклым, причем для заданной функции $g(\cdot)$ и селектора $\gamma(T,\cdot)\in\Gamma_T$ точная нижняя грань в (7) по t достигается и $T=T(g(\cdot),\ \gamma(\cdot,\cdot))<+\infty$. Тогда траектория процесса (1) может быть приведена на терминальное множество (2) в момент T с помощью контруправления (4).

Замечание 1. Условие 1 выполнено автоматически, если отображение $W(T,\tau,v)$ выпуклозначно для $\tau\in[0,T]$, $v\in V$, а множество M — выпуклый компакт.

Модифицируем схему (5)–(7) таким образом, чтобы полученное в результате гарантированное время сближения обеспечивалось стробоскопической стратегией без каких-либо дополнительных предположений.

Рассмотрим многозначное отображение $\mathfrak{A}(t,\tau)=\bigcap\limits_{v\in V}\mathfrak{A}(t,\tau,v)$, $t\geq\tau\geq 0$, которое имеет непустой образ, поскольку по крайней мере $0\in\mathfrak{A}(t,\tau,v)$ для $t\geq\tau\geq 0$, $v\in V$, и его опорную функцию в направлении +1 $\alpha(t,\tau)=\sup\{\alpha\geq 0: \alpha\in\mathfrak{A}(t,\tau)\}$. Если $\xi(t,g(t),\gamma(t,\cdot))\notin M$, то отображение $\mathfrak{A}(t,\tau)$ является замкнутозначным и измеримым по τ, $\tau\in[0,t]$, а значит, в силу теоремы об опорной функции, измерима по τ и функция $\alpha(t,\tau)$.

Введем функцию

$$\Theta(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=\inf\{t\geq 0: \int\limits_0^t \alpha(t,\tau)d\tau\geq 1\}. \tag{8}$$

Если при некотором $t>0$ $\xi(t,g(t),\gamma(t,\cdot))\in M$, то, очевидно, $\mathfrak{A}(t,\tau)=[0,+\infty)$, а $\alpha(t,\tau)\equiv+\infty$ для $\tau\in[0,t]$. В этом случае естественно положить значение интеграла в (8) равным $+\infty$, а соответствующее неравенство выполнено автоматически. Если же неравенство в (8) не выполняется для всех $t>0$, то положим $\Theta(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=+\infty$.

Теорема 3. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие Понтрягина и $M=\mathrm{co}M$, причем для заданной функции $g(\cdot)$ и некоторого селектора $\gamma(\cdot,\cdot)\in\Gamma$ точная нижняя грань в (8) достигается и $\Theta=\Theta(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))<+\infty$. Тогда траектория процесса (1) может быть приведена на терминальное множество (2) в момент Θ с помощью управления вида (4).

Следствие 1. Если для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие Понтрягина, $M=\mathrm{co}M$, для заданной функции $g(\cdot)$ и некоторого селектора $\gamma(\cdot,\cdot)\in\Gamma$ точная нижняя грань по t в (7), (8) достигается, причем $T(g(\cdot),$ $\gamma(\cdot,\cdot))<+\infty$, $\Theta(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))<+\infty$, и выполнено условие 2, то $T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=$ $=\Theta(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$.

В общем случае всегда имеет место неравенство $T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))\leq\Theta(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$.

Учитывая полученные выше результаты, целесообразно сравнить гарантированные времена схем, связанных с разрешающими функциями, со временем первого прямого метода Понтрягина.

Рассмотрим функцию Понтрягина для конфликтно-управляемого процесса (1), (2)

$$P(g(\cdot))=\inf\left\{t\geq 0:\ \pi g(t)\in M-\int\limits_0^t W(t,\tau)\,d\tau\right\}. \tag{9}$$

Здесь, как и раньше, интеграл от многозначного отображения — интеграл Аумана [15]. Если включение в фигурных скобках не выполняется ни для каких $t\geq 0$, то положим $P(g(\cdot))=+\infty$.

Теорема 4. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие Понтрягина, точная нижняя грань в (9) достигается и $P=P(g(\cdot))<+\infty$. Тогда траектория процесса (1) может быть приведена на терминальное множество (2) в момент P с помощью управления вида (4).

Из теоремы 4, которая обобщает первый прямой метод на конфликтно-управляемые процессы вида (1), вытекают следствия.

Следствие 2. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие Понтрягина. Тогда для того, чтобы $\pi g(t) \in M - \int_0^t W(t,\tau)\,d\tau,\ t \geq 0$, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой селектор $\gamma(t,\cdot) \in \Gamma_t$, что

$$\xi(t, g(t), \gamma(t,\cdot)) \in M. \tag{10}$$

Заметим, что в схеме метода разрешающих функций выполнение включения (10) приводит к вырождению упомянутых выше функций, т.е. их значения становятся равными $+\infty$. Данная ситуация полностью отвечает первому прямому методу Понтрягина, и игра в этом случае может быть закончена за время Понтрягина в классе стробоскопических стратегий без каких-либо допущений относительно параметров конфликтно-управляемого процесса (1), (2), кроме, естественно, условия Понтрягина.

Следствие 3. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие Понтрягина. Тогда существует такой селектор $\gamma(\cdot,\cdot)$, что $T(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) \leq P(g(\cdot))$ при любых измеримых ограниченных для $t > 0$ функциях $g(t)$.

Следствие 4. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие Понтрягина. Тогда существует такой селектор $\gamma(\cdot,\cdot) \in \Gamma$, что $\Theta(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) \leq P(g(\cdot))$ при любых измеримых ограниченных для $t > 0$ функциях $g(t)$.

Выразим время окончания игры (1), (2) по Понтрягину (9) в форме разрешающих функций. Для этого рассмотрим многозначное отображение

$$B(t,\tau) = \{\beta \geq 0:\ [W(t,\tau) - \gamma(t,\tau)] \cap \beta[M - \xi(t, g(t), \gamma(t,\cdot))] \neq \varnothing\} \tag{11}$$

и его опорную функцию в направлении $+1$

$$\beta(t,\tau) = \sup\{\beta : \beta \in B(t,\tau)\},\ \ t \geq \tau \geq 0. \tag{12}$$

Здесь $\gamma(t,\tau)$ — измеримый по τ селектор многозначного отображения $W(t,\tau)$, а функция $\xi(t, g(t), \gamma(t,\cdot))$ задается выражением (5).

Если $\xi(t, g(t), \gamma(t,\cdot)) \overline{\in} M$, то согласно теоремам о характеризации и обратном образе [13] отображение $B(t,\tau)$ измеримо и замкнутозначно по τ, $\tau \in [0,t]$. Соответственно на основе теоремы об опорной функции [13] измеримой по τ является функция $\beta(t,\tau)$. Если $\xi(t, g(t), \gamma(t,\cdot)) \in M$, то $B(t,\tau) = [0, +\infty)$, а $\beta(t,\tau) = +\infty$ для всех $\tau \in [0,t]$.

Введем функцию времени

$$P(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) = \inf\left\{ t \geq 0 : \int_0^t \beta(t,\tau)\,d\tau \geq 1 \right\}, \tag{13}$$

которую положим равной $+\infty$, если неравенство в фигурных скобках не имеет места при всех $t \geq 0$.

Теорема 5. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие Понтрягина, $M = \mathrm{co}M$ и для заданной функции $g(\cdot)$, $\gamma(\cdot,\cdot) \in \Gamma$ точная нижняя грань в (13) достигается, причем $P = P(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) < +\infty$. Тогда траектория процесса (1) может быть приведена на терминальное множество (2) в момент P с помощью определенного контруправления.

Теорема 6. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие Понтрягина, $M = \mathrm{co}M$ и точная нижняя грань в (13) достигается. Тогда для любой функции $g(t)$, при $t > 0$ измеримой и ограниченной, $\min\limits_{\gamma(\cdot,\cdot) \in \Gamma} P(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) = P(g(\cdot))$.

Схему (11)–(13) называют [2] функциональной формой первого прямого метода Понтрягина.

Установим соотношения между функциями времени $T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$ и $P(g(\cdot))$ для метода разрешающих функций и первого прямого метода Понтрягина.

Теорема 7. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнены условие Понтрягина и условие 1, терминальное множество M^* является аффинным многообразием, т.е. $M=\{m\}$ — точка, и точные нижние грани по t в (7), (13) достигаются. Тогда $\min\limits_{\gamma(\cdot,\cdot)\in\Gamma} T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=P(g(\cdot))$ для всех измеримых ограниченных при $t>0$ функций $g(t)$.

Следствие 5. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие Понтрягина, терминальное множество M^* является аффинным многообразием ($M=\{m\}$) и точные нижние грани по t в (8), (13) достигаются. Тогда для всех измеримых ограниченных при $t>0$ функций $g(t)$ справедливо $\min\limits_{\gamma(\cdot,\cdot)\in\Gamma} \Theta(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=P(g(\cdot))$.

Установим еще одну форму метода разрешающих функций с фиксированными точками множества M, которое, вообще говоря, не является выпуклым. Эта форма соответствует следующей ситуации. Если рассмотреть пересечение в соотношении (6), то точки из множества M, которые приведут к непустоте пересечения, вообще говоря, меняются с течением времени для разных v. Отдельно исследуем случай, когда точки касания в процессе игры не изменяются.

Пусть $m\in M$ и $\eta(t,m)=\xi(t,g(t),\gamma(t,\cdot))-m$, $\gamma(t,\cdot)\in\Gamma_t$, $t\ge 0$. Введем многозначное отображение $\mathfrak{A}(t,\tau,v,m)=\{\alpha\ge 0:\ -\alpha\eta(t,m)\in W(t,\tau,v)-\gamma(t,\tau)\}$ и его опорную функцию в направлении +1 $\alpha(t,\tau,v,m)=\sup\{\alpha:\alpha\in\mathfrak{A}(t,\tau,v,m)\}$, $t\ge\tau\ge 0$, $v\in V$. Поскольку предполагается, что выполнено условие Понтрягина, то $\operatorname{dom}\mathfrak{A}=$ $=\Delta\times V\times M$. Заметим, что при $\eta(t,m)=0$ $\mathfrak{A}(t,\tau,v,m)=[0,+\infty)$ для $\tau\in[0,t]$, $v\in V$, $m\in M$, и соответственно $\alpha(t,\tau,v,m)\equiv+\infty$.

В силу теоремы об обратном образе многозначное отображение $\mathfrak{A}(t,\tau,v,m)$ $L\times B$-измеримо по τ, v, $v\in V$, $\tau\in[0,t]$, а согласно теореме об опорной функции разрешающая функция $\alpha(t,\tau,v,m)$ является $L\times B$-измеримой по τ, v. Если для $t>0$ и $m\in M$ $\eta(t,m)\ne 0$, то можно показать, что $\inf\limits_{v\in V}\alpha(t,\tau,v,m)$ измерима по τ, $\tau\in[0,t]$.

Рассмотрим функцию

$$\mathfrak{T}(g(\cdot),m,\gamma(\cdot,\cdot))=\inf\left\{t\ge 0:\ \int_0^t \inf_{v\in V}\alpha(t,\tau,v,m)\,d\tau\ge 1\right\}. \tag{14}$$

Условие 2. Функция $\mathfrak{T}(g(\cdot),m,\gamma(\cdot,\cdot))$ полунепрерывна снизу по m, $m\in M$.

Тогда согласно теореме Вейерштрасса она порождает маргинальную функцию $\mathfrak{T}(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=\min\limits_{m\in M}\mathfrak{T}(g(\cdot),m,\gamma(\cdot,\cdot))$ и маргинальное многозначное отображение $\mathfrak{M}(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=\{m\in M:\ \mathfrak{T}(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=\mathfrak{T}(g(\cdot),m,\gamma(\cdot,\cdot))\}\subset M$. Заметим [6], что имеют место формулы для представления функций времени

$$T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=\inf\left\{t\ge 0:\ \int_0^t \inf_{v\in V}\max_{m\in M}\alpha(t,\tau,v,m)d\tau\ge 1\right\},$$

$$\mathfrak{T}(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=\inf\left\{t\ge 0:\ \max_{m\in M}\int_0^t \inf_{v\in V}\alpha(t,\tau,v,m)d\tau\ge 1\right\},$$

а также справедливо соотношение $\alpha(t,\tau,v)=\max\limits_{m\in M}\alpha(t,\tau,v,m)$ для $t\ge\tau\ge 0$, $v\in V$, $\gamma(\cdot,\cdot)\in\Gamma$. Если $\eta(t,m)=0$, то $\inf\limits_{v\in V}\alpha(t,\tau,v,m)=+\infty$ для $\tau\in[0,t]$ и значение интеграла в соотношении (14) естественно положить равным $+\infty$, а соответствующее неравенство выполнено автоматически. В случае, когда неравенство в (14) не выполняется при всех $t>0$ и $m \in M$, будем предполагать, что $\mathfrak{T}(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=+\infty$.

Теорема 8. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнены условие Понтрягина и условие 2, для заданной функции $g(\cdot)$ и некоторого селектора $\gamma(\cdot,\cdot)\in\Gamma$ внешняя точная грань достигается в (14) и $\mathfrak{T}=\mathfrak{T}(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))<+\infty$. Тогда проекция траектории процесса (1) $\pi z(t)$ может быть приведена в любую точку множества $\mathfrak{M}(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$ в момент $\mathfrak{T}$ с помощью управления первого игрока, назначенного соответствующей квазистратегией.

Из этой теоремы вытекает целый ряд содержательных следствий о соотношении гарантированных времен и связи с первым прямым методом Понтрягина.

Следствие 6. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие Понтрягина. Тогда для того, чтобы $\pi g(t)\in M-\int\limits_0^t W(t,\tau)d\tau$, $t\ge 0$, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой измеримый селектор $\gamma(t,\cdot)\in\Gamma_t$ и элемент $m\in M$, что $\eta(t,m)=0$.

Следствие 7. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие Понтрягина. Тогда

$$\inf_{\gamma(\cdot,\cdot)\in\Gamma} T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))\le \inf_{\gamma(\cdot,\cdot)\in\Gamma}\mathfrak{T}(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))\le P(g(\cdot)) \qquad (15)$$

для любой измеримой ограниченной для $t>0$ функции $g(t)$.

Следствие 8. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие Понтрягина, терминальное множество M^* — аффинное многообразие, т.е. $M=\{m\}$ — точка, и точные нижние грани по t в (7), (14) достигаются. Тогда для всех измеримых ограниченных функций $g(t)$, $t>0$, $\min\limits_{\gamma(\cdot,\cdot)\in\Gamma} T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=$ $=\min\limits_{\gamma(\cdot,\cdot)\in\Gamma}\mathfrak{T}(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$.

Реализацию гарантированного времени $T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$ в классе стробоскопических стратегий обеспечивает следующий аналог приведенного ранее условия выпуклозначности.

Условие 3. При заданной функции $g(\cdot)$ и выбранном селекторе $\gamma(\cdot,\cdot)\in\Gamma$ для таких элементов $\mathfrak{M}(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$, что $\eta(\mathfrak{T},m)\ne 0$, отображение $\mathfrak{A}(\mathfrak{T},\tau,v,m)$, $\tau\in[0,\mathfrak{T}]$, $v\in V$, выпуклозначно, т.е. $\mathfrak{A}(\mathfrak{T},\tau,v,m)=[0,\alpha(\mathfrak{T},\tau,v,m)]$.

Теорема 9. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнены условие Понтрягина и условия 2 и 3, в выражениях (9), (14) точная нижняя грань по t достигается и $\mathfrak{T}<+\infty$. Тогда проекция траектории процесса (1) на L может быть приведена в любую точку m, $m\in\mathfrak{M}(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$, в момент $\mathfrak{T}$ с помощью контруправления первого игрока, причем

$$\min_{\gamma(\cdot,\cdot)\in\Gamma}\mathfrak{T}(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=P(g(\cdot)). \qquad (16)$$

СРАВНЕНИЕ ВРЕМЕН МЕТОДА РАЗРЕШАЮЩИХ ФУНКЦИЙ И ПЕРВОГО ПРЯМОГО МЕТОДА ПОНТРЯГИНА

Введем многозначные отображения

$$\Phi(t,\tau,v)=W(t,\tau,v)\overset{*}{-}W(t,\tau),$$
$$K(t,\tau,v)=\operatorname{con}\Phi(t,\tau,v),\ K(t,\tau)=\bigcap_{v\in V}K(t,\tau,v),\quad t\ge\tau\ge 0. \qquad (17)$$

Поскольку $W(t,\tau)\subset W(t,\tau,v)$, $t\ge\tau\ge 0$, $v\in V$, по построению, $0\in\Phi(t,\tau,v)$. Отсюда вытекает, что многозначное отображение для указанных выше значений аргументов

$$\Lambda(t,\tau,v)=\{\lambda\ge 0:\ \Phi(t,\tau,v)\cap\lambda[M-\xi(t,g(t),\gamma(t,\cdot))]\ne\varnothing\},\ \gamma(\cdot,\cdot)\in\Gamma, \quad (18)$$

принимает значения, которые являются непустыми множествами.

В силу свойств многозначных отображений $W(t,\tau,v)$ и $W(t,\tau)$ и операции геометрической разности Минковского отображение $\Phi(t,\tau,v)$ является $L\times B$-измеримым по (τ,v), $\tau\in[0,t]$, $v\in V$, и замкнутозначным.

Опорная функция отображения $\Lambda(t,\tau,v)$ в направлении $+1$ имеет вид

$$\lambda(t,\tau,v)=\sup\{\lambda\colon \lambda\in\Lambda(t,\tau,v)\}. \tag{19}$$

Согласно теореме об опорной функции многозначного отображения $\lambda(t,\tau,v)$ — $L\times B$-измеримая функция по (τ,v), $\tau\in[0,t]$, $v\in V$. Для заданной функции $g(\cdot)$ рассмотрим функцию $\Gamma(g(\cdot))=\{\gamma(\cdot,\cdot)\in\Gamma\colon P(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=P(g(\cdot))\}$. В свою очередь для $\gamma((\cdot,\cdot))\in\Gamma$ обозначим

$$Q(\gamma(\cdot,\cdot))=\{g(\cdot)\colon \lambda(t,\tau,v)+\beta(t,\tau)=\alpha(t,\tau,v)\ \ \forall\ 0\le\tau\le t\le P(g(\cdot)), v\in V\},$$

$$Q_*(\gamma(\cdot,\cdot))=\{g(\cdot)\colon \lambda(t,\tau,v)+\beta(t,\tau)\le\alpha(t,\tau,v)\ \ \forall 0\le\tau\le t\le P(g(\cdot)), v\in V\}.$$

Для фиксированных $g(\cdot)$ и $\gamma((\cdot,\cdot))\in\Gamma$ введем функции $\alpha(t)=\int\limits_0^t \inf\limits_{v\in V}\alpha(t,\tau,v)d\tau$ и $\beta(t)=\int\limits_0^t \beta(t,\tau)d\tau,\ t\ge 0$.

Теорема 10. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие Понтрягина, для заданной функции $g(\cdot)$ существует такой селектор $\gamma(\cdot,\cdot)\in\Gamma(g(\cdot))$, что $g(\cdot)\in Q_*(\gamma(\cdot,\cdot))$, причем $T=T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))<+\infty$, для всех $t,\ \tau,\ v,\ 0\le\tau\le t<P(g(\cdot)),\ v\in V$, выполнено условие

$$[M-\xi(t,g(t),\gamma(t,\cdot))]\cap K(t,\tau,v)\ne\varnothing, \tag{20}$$

функция $\lambda(t,\tau,v)$ полунепрерывна снизу по v для $0\le\tau\le t<P(g(\cdot))$ и момент T — точка непрерывности функции $\alpha(t)$. Тогда

$$T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))<P(g(\cdot)). \tag{21}$$

Доказательство. По условиям теоремы из соотношения (20) с учетом выражений (18), (19) вытекает, что функция $\lambda(t,\tau,v)$ строго положительна при всех допустимых значениях аргументов.

Поскольку она полунепрерывна сверху по v [6], а по условию теоремы еще и снизу, то функция $\lambda(t,\tau,v)$ непрерывна по $v,\ v\in V$, для $0\le\tau\le t<P(g(\cdot))$ и

$$\min_{v\in V}\lambda(t,\tau,v)>0\quad\forall\,0\le\tau\le t<P(g(\cdot)). \tag{22}$$

Это означает в силу $g(\cdot)\in Q_*(\gamma(\cdot,\cdot))$, что $\inf\limits_{v\in V}\alpha(t,\tau,v)>\beta(t,\tau)$, $0\le\tau\le t<P(g(\cdot))$.

Поскольку момент T — точка непрерывности функции $\alpha(t)$, то $\alpha(T)=1>\beta(T)$.

Учитывая, что $\gamma(\cdot,\cdot)\in\Gamma(g(\cdot))$, из определения времен T и P получим неравенство (21).

Замечание 2. Вместо полунепрерывности снизу функции $\lambda(t,\tau,v)$ по v достаточно требовать только выполнения условия (22), а условие (20) эквивалентно включению $-\xi(t,g(t),\gamma(t,\cdot))\in\bigcap\limits_{v\in V}[K(t,\tau,v)-M]$.

Теорема 11. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие Понтрягина, для заданной функции $g(\cdot)$ существует такой селектор $\gamma(\cdot,\cdot)\in\Gamma(g(\cdot))$, что $g(\cdot)\in Q(\gamma(\cdot,\cdot))$, и для каждого набора t,τ, $0\le\tau\le t<P(g(\cdot))$, существует такое $v\in V$, что выполнено условие

$$[M-\xi(t,g(t),\gamma(t,\cdot))]\cap K(t,\tau,v)=\varnothing. \tag{23}$$

Тогда

$$T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=P(g(\cdot)). \tag{24}$$

Доказательство. Из соотношения (23) вытекает, что $\min\limits_{\upsilon \in V} \lambda(t,\tau,\upsilon) = 0$ для $0 \le \tau \le t < P(g(\cdot))$, а поскольку $g(\cdot) \in Q(\gamma(\cdot,\cdot))$, то $\inf\limits_{\upsilon \in V} \alpha(t,\tau,\upsilon) = \beta(t,\tau)$, $0 \le \tau \le$ $\le t < P(g(\cdot))$. Поэтому $\alpha(t) = \beta(t)$ и с учетом $\gamma(\cdot,\cdot) \in \Gamma(g(\cdot))$ получим равенство (24).

Замечание 3. Условие (23) для удобства использования можно записать в виде $-\xi(t,g(t),\gamma(t,\cdot)) \overline{\in} \bigcap\limits_{\upsilon \in V} [K(t,\tau,\upsilon) - M]$.

Рассмотрим случай, когда терминальное множество является аффинным многообразием.

Следствие 9. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие Понтрягина, $M = \{m\}$, для заданной функции $g(\cdot)$ существует такой селектор $\gamma(\cdot,\cdot) \in \Gamma(g(\cdot))$, что $T = T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)) < +\infty$, причем T является точкой непрерывности функции $\alpha(t)$ для всех t, τ, $0 \le \tau \le t < P(g(\cdot))$, $m - \xi(t,g(t),\gamma(t,\cdot)) \in K(t,\tau)$, а функция $\lambda(t,\tau,\upsilon)$ полунепрерывна снизу по υ. Тогда имеет место неравенство (21).

Доказательство. Из предположений данного утверждения с помощью рассуждений, аналогичных доказательству теоремы 10, получим неравенство (22). Для конечного вывода достаточно доказать, что $g(\cdot) \in Q_*(\gamma(\cdot,\cdot))$.

Из определения функции $\lambda(t,\tau,\upsilon)$ и свойства геометрической разности имеем $\lambda(t,\tau,\upsilon)[m - \xi(t,g(t),\gamma(t,\cdot))] + W(t,\tau) \subset W(t,\tau,\upsilon)$. Сдвинем левую и правую часть включения на вектор $\gamma(t,\tau)$, $\gamma(\cdot,\cdot) \in \Gamma(g(\cdot))$. Тогда

$$\lambda(t,\tau,\upsilon)[m - \xi(t,g(t),\gamma(t,\cdot))] + W(t,\tau) - \gamma(t,\tau) \subset W(t,\tau,\upsilon) - \gamma(t,\tau). \qquad (25)$$

В то же время, поскольку $m - \xi(t,g(t),\gamma(t,\cdot)) \ne 0$ для $t \in [0, P(g(\cdot)))$, по определению разрешающих функций $\alpha(t,\tau)$, $\alpha(t,\tau,\upsilon)$ имеем

$$\alpha(t,\tau)[m - \xi(t,g(t),\gamma(t,\cdot))] \in W(t,\tau) - \gamma(t,\tau), \qquad (26)$$

$$\alpha(t,\tau,\upsilon)[m - \xi(t,g(t),\gamma(t,\cdot))] \in W(t,\tau,\upsilon) - \gamma(t,\tau). \qquad (27)$$

Учитывая включения (25)–(27), получаем неравенство $\lambda(t,\tau,\upsilon) + \alpha(t,\tau) \le$ $\le \alpha(t,\tau,\upsilon)$, $0 \le \tau \le t < P(g(\cdot))$, $\upsilon \in V$, а значит, $g(\cdot) \in Q_*(\gamma(\cdot,\cdot))$.

Следствие 10. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие Понтрягина, $M = \{m\}$. Тогда, если для заданной функции $g(\cdot)$ существует такой селектор $\gamma((\cdot,\cdot)) \in \Gamma(g(\cdot))$, что $g(\cdot) \in Q(\gamma(\cdot,\cdot))$, и для $0 \le \tau \le t < P(g(\cdot))$ $m - \xi(t,g(t),\gamma(t,\cdot)) \notin K(t,\tau)$, имеет место равенство (24).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 11.

Условие 4. Отображение $\Lambda(t,\tau,\upsilon)$ выпуклозначно для $0 \le \tau \le t < P(g(\cdot))$, $\upsilon \in V$.

Утверждение 1. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнены условие Понтрягина и условие 4, а $M = \{m\}$. Тогда для всех $0 \le \tau \le t < P(g(\cdot))$, $\gamma(\cdot,\cdot) \in \Gamma$ имеем $\inf\limits_{\upsilon \in V} \lambda(t,\tau,\upsilon) = 0$.

Доказательство. Для $0 \le t < P(g(\cdot))$ справедливо $m - \xi(t,g(t),\gamma(t,\cdot)) \ne 0$ в силу следствия 2. Поэтому по определению функции $\lambda(t,\tau,\upsilon)$, $0 \le \tau \le t < P(g(\cdot))$, $\upsilon \in V$, имеет место включение $\lambda(t,\tau,\upsilon)[m - \xi(t,g(t),\gamma(t,\cdot))] \in \Phi(t,\tau,\upsilon)$, а с учетом условия 4

$$\inf_{\upsilon \in V} \lambda(t,\tau,\upsilon)[m - \xi(t,g(t),\gamma(t,\cdot))] \in \bigcap_{\upsilon \in V} \Phi(t,\tau,\upsilon). \qquad (28)$$

В то же время для $0 \le \tau \le t < P(g(\cdot))$ имеем

$$\bigcap_{v \in V} \Phi(t,\tau,v) = \bigcap_{v \in V} [W(t,\tau,v) \overset{*}{-} W(t,\tau)] =$$

$$= \bigcap_{v \in V} \left[\bigcap_{\gamma(t,\tau) \in W(t,\tau)} (W(t,\tau,v) - \gamma(t,\tau)) \right] = \bigcap_{\gamma(t,\tau) \in W(t,\tau)} \left[\bigcap_{v \in V} (W(t,\tau,v) - \gamma(t,\tau)) \right] =$$

$$= \bigcap_{\gamma(t,\tau) \in W(t,\tau)} [W(t,\tau) - \gamma(t,\tau)] = \{0\}.$$

Таким образом, из включения (28) вытекает, что $\inf\limits_{v \in V} \lambda(t,\tau,v) = 0$ для $0 \le \tau \le t < P(g(\cdot))$.

Утверждение 2. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнены условие Понтрягина и условие 4, а $M = \{m\}$. Тогда если функция $\lambda(t,\tau,v)$, $0 \le \tau \le t < P(g(\cdot))$, полунепрерывна снизу по v, $v \in V$, то

$$m - \xi(t, g(t), \gamma(t,\cdot)) \notin K(t,\tau) \tag{29}$$

для всех $0 \le \tau \le t < P(g(\cdot))$.

Доказательство. Из условий утверждения вытекает, что $\min\limits_{v \in V} \lambda(t,\tau,v) = 0$.

Это означает, что существует такое $v_*(t,\tau)$, что $\lambda(t,\tau,v_*(t,\tau)) = 0$, откуда вытекает соотношение (29).

ИЛЛЮСТРАТИВНЫЙ ПРИМЕР

Рассмотрим конфликтно-управляемый процесс в плоскости с простым движением

$$z(t) = z_0 + \int_0^t (u(\tau) - v(\tau))\, d\tau, \quad z(t) \in R^2, \quad t \ge 0.$$

Здесь $g(t) = z_0$, $\Omega(t,\tau) = E$ — единичная матрица, $\varphi(u,v) = u - v$. Области управления игроков $V = \{v \in R^2\colon ||v|| \le 1\}$ — единичный круг, а $U = \{u \in R^2\colon ||u|| \le 1\} \cup \{u = (u_1, u_2)\colon |u_1| \le u_2 \le 2\}$ — объединение единичного круга и треугольника. Терминальное множество $M^* = \{z \in R^2\colon ||z|| \le \varepsilon\}$, причем $M_0 = \{z \in R^2\colon z = 0\}$, а $M = \{z \in R^2\colon ||z|| \le \varepsilon\} = \varepsilon S$. Таким образом, $M_0^{\perp} = L = R^2$, а ортопроектор $\pi\colon R^2 \to R^2$ является оператором тождественного преобразования и задается единичной матрицей $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Далее, очевидно, $W(t,\tau,v) = U - v$, $W(t,\tau) = \bigcap\limits_{v \in V} (U - v) = U \overset{*}{-} V = \{0\}$ и условие Понтрягина выполнено. Поскольку $W(t,\tau) = \{0\}$, $0 \le \tau \le t$, то Γ состоит из единственного вектора $\gamma(\cdot,\cdot)$, тождественно равного нулю. Поэтому $\xi(t, z_0, 0) = z_0$, а разрешающая функция имеет вид $\alpha(z_0, v) = \alpha(t,\tau,v) = \sup\{\alpha\colon \alpha \in \mathfrak{A}(t,\tau,v)\}$, причем

$$\mathfrak{A}(t,\tau,v) = \{\alpha \ge 0\colon [U - v] \cap \alpha[\varepsilon S - z_0]\} \ne \varnothing.$$

Рассмотрим начальную точку $z_0 = (0, -b)$, $b > 0$. Будем считать, что $b >> \varepsilon$. Поскольку $\mathfrak{A}(t,\tau,v) = \mathfrak{A}(v)$, нетрудно посчитать, что при $v = (0, -1)$

$$\mathfrak{A}(v) = \left[0, \frac{1}{b - \varepsilon}\right],$$

при $v = (1, 0)$, $v = (-1, 0)$

$$\mathfrak{A}(v) = \left[0, \frac{2\varepsilon}{b^2 - \varepsilon^2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}b + 2\varepsilon}{(b^2 - \varepsilon^2)}, \frac{2}{b - \varepsilon}\right],$$

причем $\dfrac{\sqrt{2}b+2\varepsilon}{(b^2-\varepsilon^2)} > \dfrac{2\varepsilon}{b^2-\varepsilon^2}$ при малых ε, где члены неравенства — положительные корни квадратных уравнений относительно α $(\sqrt{2}-\alpha b)^2 = 2\alpha^2\varepsilon^2$, $\alpha^2 b^2 + 1 = (1+\alpha\varepsilon)^2$, которые выражают теорему Пифагора для соответствующих прямоугольных треугольников. В этом случае многозначное отображение $\mathfrak{A}(t,\tau,v)$ не выпуклозначно и условие 1 не выполнено. Очевидно, $\inf\limits_{\|v\|\le 1} \alpha(t,\tau,v) =$ $= \min\limits_{\|v\|\le 1} \sup\{\alpha \ge 0\colon\ \alpha \in \mathfrak{A}(v)\} = \dfrac{1}{b-\varepsilon}$, причем минимум по v достигается в точке $v = (0,\ -1)$.

В то же время $\mathfrak{A}\ (t,\tau) = \mathfrak{A} = \bigcap\limits_{\|v\|\le 1} \mathfrak{A}(v) = \left[0, \dfrac{2\varepsilon}{b^2-\varepsilon^2}\right]$. Поэтому $\alpha(t,\tau) = \sup\{\alpha \ge 0\colon$ $\alpha \in \mathfrak{A}\} = \dfrac{2\varepsilon}{b^2-\varepsilon^2}$. Поскольку в рассматриваемом случае $W(t,\tau) = \{0\}$, то и $B(t,\tau) = \{0\}$ для всех $0 \le \tau \le t < +\infty$. Соответственно $\beta(t,\tau) \equiv 0$.

Для схемы с фиксированной точкой $m \in \varepsilon S$ при заданном начальном положении z_0 будем считать, что $m \in \varepsilon S \cap \left\{ \bigcup\limits_{c\in[-\varepsilon,\varepsilon]} [0,c] \right\}$. Тогда при $v = (0,-1)$ $\mathfrak{A}(t,\tau,v,m) = \left[0, \dfrac{1}{b+m}\right]$, а $\alpha(t,\tau,v,m) = \min\limits_{\|v\|\le 1} \alpha(t,\tau,v,m) = \dfrac{1}{b+m}$, причем минимум по v достигается при $v = (0,-1)$. Соответственно функция времени $\mathfrak{T}(z_0, m, 0) =$ $= b + m$, отсюда автоматически вытекает, что $\mathfrak{T}\ (z_0, 0) = b - \varepsilon$, а маргинальное множество $\mathfrak{M}\ (z_0, 0) = \{(0, -\varepsilon)\}$ состоит лишь из одного элемента.

Таким образом, время окончания игры из начальной точки z_0 согласно рассмотренным схемам $T(z_0, 0) = \mathfrak{T}\ (z_0, 0) = b - \varepsilon$, $\Theta\ (z_0, 0) = \dfrac{b^2-\varepsilon^2}{2\varepsilon}$, $P\ (z_0) = +\infty$.

Равенство $T(z_0, 0) = \mathfrak{T}(z_0, 0)$ имеет место только потому, что многозначное отображение $M\ (z_0, v) = \{m \in M\colon\ \alpha\ (z_0, v)[m - z_0] \in U - v\}$ при любом $v \in V$ является точкой $(0, -\varepsilon)$.

Пусть теперь z_0, $z_0 \notin \varepsilon S$, — произвольная начальная точка. Поскольку $W\ (t,\tau) = \{0\}$ для $0 \le \tau \le t < +\infty$, то $\Phi\ (t,\tau,v) = W\ (t,\tau,v)$,

$$K = K(t,\tau) = \bigcap_{v\in S} \operatorname{con}\,[U - v] = \{z \in R^2\colon\ z_2 \ge \mu |z_1|\},$$

где μ — угловой коэффициент касательной к единичному кругу с центром в точке (2.2), которая проходит через начало координат и лежит ближе к оси ординат.

Легко видеть, что $\lambda(t,\tau,v) \equiv \alpha(t,\tau,v)$, $Q(0) = Q_*(0) = R^2 \setminus \varepsilon S$, $\Gamma(z_0) = \{0\}$ для $z_0 \in R^2 \setminus \varepsilon S$. Кроме того, $\min\limits_{v\in S} \lambda(t,\tau,v) = \dfrac{1}{b-\varepsilon}$, а функция $\alpha(t) = \dfrac{t}{b-\varepsilon}$ является непрерывной. Из теоремы 10 получим, если

$$-z_0 \in \bigcap_{v\in S} \{\operatorname{con}[U - v] + \varepsilon S\}, \tag{30}$$

то $T(z_0, 0) < +\infty$, а из теоремы 11 вытекает, что условие $-z_0\ \overline{\in}$ $\overline{\in} \bigcap\limits_{v\in S} \{\operatorname{con}[U - v] + \varepsilon S\}$ обеспечивает равенство $T(z_0, 0) = +\infty$.

Итак, получено необходимое и достаточное условие (30) окончания игры за конечное время. Кроме того, для фиксированной точки z_0 из множества

$-\bigcap\limits_{v \in S} \{\mathrm{con}\,[U - v] + \varepsilon S\}$ найдено время окончания игры по разным схемам метода разрешающих функций.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведено детальное сравнение различных форм метода разрешающих функций между собой и с первым прямым методом Понтрягина. Приведен иллюстративный пример с неполным выметанием, в котором можно найти гарантированные времена согласно разным схемам и сравнить их с временем первого прямого метода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чикрий А.А., Раппопорт И.С., Чикрий К.А. Многозначные отображения и их селекторы в теории конфликтно-управляемых процессов // Кибернетика и системный анализ.— 2007. — № 5. — С. 129–144.
2. Чикрий А.А., Питцык М.В., Шишкина Н.Б. Первый прямой метод Л.С. Понтрягина и некоторые эффективные способы преследования // Кибернетика. — 1986. — № 5. — С. 53–61.
3. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. — М.: Наука, 1981. — 288 с.
4. Никольский М.С. Первый прямой метод Л.С. Понтрягина в дифференциальных играх. — М.: Изд–во МГУ, 1984. — 65 с.
5. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. — М.: Наука, 1988. — **2.** — 576 с.
6. Chikrii A.A. Conflict controlled processes. — Boston; London; Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. — 424 p.
7. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. — М.: Наука, 1970. — 420 с.
8. Кривонос Ю.Г., Матичин И.И., Чикрий А.А. Динамические игры с разрывными траекториями. — К.: Наук. думка, 2005. — 220 с.
9. Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В. Дифференциальные игры. — К.: Наук. думка, 1992. — 260 с.
10. Чикрий А.А. Дифференциальные игры с несколькими преследователями // Тр. Междунар. мат. Центра им. С. Банаха, Варшава. — 1985. — **14.** — С. 81–107.
11. Чикрий А.А., Раппопорт И.С., Чикрий К.А. К теории преследования в классе стробоскопических стратегий // ДАН Украины. — 2006. — № 6. — С. 72–77.
12. Чикрий К.А. Гарантированный результат для конфликтно-управляемых процессов: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Киев, 2007. — 143 с.
13. Aubin J.–P., Frankowska H. Set-valued analysis. — Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 1990. — 461 p.
14. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. — М.: Наука, 1974. — 480 с.
15. Aumann R.J. Integrals of set valued functions // J. Math. Anal. Appl. — 1965. — **12.** — P. 1–12.

Поступила 19.12.2007