УДК 519.8

О.А. БЕРЕЗОВСКИЙ

О НИЖНЕЙ ОЦЕНКЕ ДЛЯ ОДНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ НА МНОГООБРАЗИИ ШТИФЕЛЯ

Ключевые слова: *оптимизационная квадратичная задача, двойственная лагранжевая оценка, функционально избыточные ограничения, двойственные переменные, положительно определенная матрица.*

Рассматриваемая в данной работе задача, для которой предлагается нижняя оценка, состоит в нахождении глобального минимума суммы квадратичных форм $f(x)=f(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_k)=\sum_{i=1}^{k}\vec{x}_i^T A_i\vec{x}_i$ на многообразии Штифеля, где $A_i=\{A_{ijl}: j=\overline{1,n},\ l=\overline{1,n}\},\ i=\overline{1,k},$ — заданные $n\times n$ вещественные симметричные матрицы, $\vec{x}_i=(x_{i1},x_{i2},\ldots,x_{in})\in R^n,\ i=\overline{1,k},$ — векторы переменных, $k\le n.$ Под многообразием Штифеля (Stiefel manifolds) понимают множество всех ортонормированных систем векторов $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k\}$ в пространстве R^n.

В общем случае данная задача является многоэкстремальной задачей нелинейного программирования и ее решение достаточно сложно даже при небольших размерностях [1, 2]. В связи с этим определенный интерес представляет нахождение оценок глобального минимума задачи, которые можно получить, например, используя технику двойственных лагранжевых оценок для квадратичных задач [3]. Кратко суть данного подхода заключается в том, чтобы рассматривать задачу максимизации по двойственным переменным функции Лагранжа $L(x, u)$, построенной для исходной оптимизационной квадратичной задачи, на более узкой области определения, на которой квадратичная форма $L(x, u)$ по прямым переменным положительно определена и внутренняя задача является выпуклой.

В [4] приведена постановка исходной задачи в виде оптимизационной квадратичной задачи

$$f^* = \min \sum_{i=1}^{k} \vec{x}_i^T A_i \vec{x}_i \tag{1}$$

при ограничениях

$$\vec{x}_i^T \vec{x}_i = 1, \quad i = 1, \ldots, k, \tag{2}$$

$$\vec{x}_i^T \vec{x}_j = 0, \; i = 1, \ldots, k-1, \; j = i+1, \ldots, k \tag{3}$$

(здесь ограничения (2) соответствуют условию нормированности векторов $\vec{x}_i$, $i = 1, \ldots, k$, а ограничения (3) — условию их ортогональности). В результате применения техники двойственных лагранжевых оценок по отношению к квадратичной постановке (1)–(3) (а также благодаря ее однородности) в [4] получена нижняя оценка

$$f^* \geq \psi_1^* = \psi_1(u^*) = \max_{u: K(u) \geq 0} \psi_1(u), \tag{4}$$

где функция $\psi_1(u) = -\sum_{i=1}^{k} u_{ii}$, а $K(u) \geq 0$ обозначает неотрицательную определенность семейства симметричных $(kn \times kn)$-матриц вида

$$K(u) = K_0 + \sum_{i=1}^{k} u_{ii} K_{ii} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k} u_{ij} (K_{ij} + K_{ji}).$$

Здесь u — вектор множителей Лагранжа для задачи (1)–(3), причем

- $\{u_{ii}, i = \overline{1, k}\}$ соответствуют ограничениям (2),
- $\{u_{ij}, i = \overline{1, k-1}, \; j = \overline{i+1, k}\}$ — ограничениям (3),

а матрицы K_0 и K_{ij} состоят из k^2 блоков размером $n \times n$ и задаются следующим образом:

- K_0 — матрица, по диагонали которой размещены блоки, заданные симметричными $(n \times n)$-матрицами A_i, $i = \overline{1, k}$, а все внедиагональные блоки равны нулевым $(n \times n)$-матрицам;
- K_{ij} — матрица, (i, j)-й блок которой равен единичной $(n \times n)$-матрице, а все остальные блоки равны нулевым $(n \times n)$-матрицам.

Далее предлагается другая нижняя оценка ψ_2^* для исходной задачи, вывод которой базируется на той же технике Н.З. Шора [3, 5] и использует одно ее замечательное свойство. Оно заключается в возможности улучшения двойственных лагранжевых оценок путем добавления к исходной квадратичной постановке задачи функционально избыточных ограничений, которые являются следствиями уже имеющихся ограничений. Эти ограничения не несут никакой дополнительной информации с точки зрения исходной задачи, но изменяют функцию Лагранжа и расширяют область определения двойственных переменных в максиминной задаче. В результате в ряде случаев лагранжевая двойственная оценка для новой «расширенной» квадратичной постановки может оказаться более точной, чем для исходной. Предлагаемая в статье оценка ψ_2^*, построенная с использованием добавления к задаче (1)–(3) семейства функционально избыточных ограничений определенного вида, показывает эффективность «работы» таких ограничений (по крайней мере, для всех примеров из [1], в том числе и в случае, когда оценка ψ_1^* [4] оказалась неточной, новая оценка ψ_2^* дала точные результаты).

Перейдем непосредственно к формированию «расширенной» квадратичной постановки исходной задачи, т.е. к построению тех квадратичных равенств (нетривиальных следствий равенств (2), (3)), которые предлагаем использовать в качестве дополнительных ограничений для задачи (1)–(3).

Без ограничения общности в дальнейшем будем считать, что $k = n$. Этого всегда можно добиться путем дополнения множества векторов $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k\}$ переменных задачи до полного базиса ортонормированных векторов в R^n, т.е. путем введения дополнительных векторов $\vec{x}_{k+1}, \vec{x}_{k+2}, \dots, \vec{x}_n \in R^n$, для которых A_i, $i = \overline{k+1, n}$, — нулевые $n \times n$-матрицы, и расширения соответствующим образом множества ограничений (2), (3) так, чтобы они определяли ортонормированность по всем n векторам. Следует отметить, что при таком переходе от $k < n$ к $k = n$ двойственные оценки, полученные согласно (4) для обоих случаев, совпадают. Справедливость этого утверждения легко следует из рассмотрения задачи (4) для последнего случая, из которого видно, что $u_{ij}^* = 0$, $i = \overline{1, n-1}$, $j = \overline{i+1, n}$ (эти переменные не влияют на целевую функцию, и при их нулевом значении область определения других переменных максимальна), $u_{ii}^* = 0$, $i = \overline{k+1, n}$ (учитывая вид целевой функции, они стремятся к $-\infty$, но ограничены условием неотрицательной определенности матрицы $K(u)$, что по отношению к этим переменным эквивалентно ограничениям $u_{ii}^* \geq 0$, $i = \overline{k+1, n}$). Таким образом, получаем задачу (4), соответствующую исходному случаю (когда $k < n$).

Поскольку известно, что если строки квадратной матрицы — ортонормированные векторы, то и столбцы матрицы — ортонормированные векторы, можем записать:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2 = 1, \; j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{l=1}^{n} x_{li} x_{lj} = 0, \; i = 1, \dots, n-1, \; j = i+1, \dots, n.$$

Расширим за счет этих функционально избыточных ограничений задачу (1)–(3). Это приведет к решению задачи вида

$$f^* = \min \sum_{i=1}^{k} \vec{x}_i^T A_i \vec{x}_i \tag{5}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 = 1, \; i = 1, \dots, n, \tag{6}$$

$$\sum_{l=1}^{n} x_{il} x_{jl} = 0, \; i = 1, \dots, n-1, \; j = i+1, \dots, n, \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2 = 1, \; j = 1, \dots, n, \tag{8}$$

$$\sum_{l=1}^{n} x_{li} x_{lj} = 0, \; i = 1, \dots, n-1, \; j = i+1, \dots, n. \tag{9}$$

Дальнейшие действия по отношению к расширенной задаче (5)–(9) идентичны проведенным в [4] для квадратичной постановки (1)–(3) — согласно [3] «новой» задаче соответствует двойственная лагранжевая оценка

$$\psi_2^* = \psi_2(u^*, v^*) = \sup_{(u,v):\, K(u,v)>0} \inf_x L(x,u,v) =$$
$$= \sup_{(u,v): K(u,v)>0} L(\mathbf{0},u,v) = \max_{(u,v): K(u,v)\ge 0} \psi_2(u,v), \tag{10}$$

где функция Лагранжа $L(x,u,v) = x^T K(u,v) x - \sum_{i=1}^{n} (u_{ii} + v_{ii})$, функция $\psi_2(u,v) = -\sum_{i=1}^{n} (u_{ii} + v_{ii})$, а $K(u,v) \ge 0$ обозначает неотрицательную определенность семейства симметричных $(n^2 \times n^2)$-матриц вида

$$K(u,v) = K_0 + \sum_{i=1}^{n} u_{ii} K_{ii} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} (K_{ij} + K_{ji}) + V;$$

$x = (x_{11}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, \ldots, x_{2n}, \ldots, x_{n1}, \ldots, x_{nn})$ — вектор прямых переменных задачи размерности n^2, $\mathbf{0}$ — нулевой n^2-мерный вектор.

Здесь (u,v) — вектор множителей Лагранжа, причем

- $\{u_{ii}, i = \overline{1,n}\}$ соответствуют ограничениям (6),
- $\{u_{ij}, i = \overline{1,n-1},\ j = \overline{i+1,n}\}$ — ограничениям (7),
- $\{v_{ii},\ i = \overline{1,n}\}$ — ограничениям (8),
- $\{v_{ij}, i = \overline{1,n-1},\ j = \overline{i+1,n}\}$ — ограничениям (9);

матрицы K_0 и K_{ij} задаются так же, как при определении оценки ψ_1^*, а матрица V является симметричной матрицей из n^2 блоков размером $n \times n$, n диагональных блоков которой совпадают и представляют собой матрицу двойственных переменных v_{ij} с коэффициентом 1, если $i = j$, и $\frac{1}{2}$, если $i \ne j$ (все внедиагональные блоки матрицы V равны нулевым $(n \times n)$-матрицам). Таким образом, диагональный ii-блок $(i = \overline{1,n})$ симметричной матрицы $K(u,v)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix}
A_{i11} + u_{ii} + v_{11} & A_{i12} + \frac{v_{12}}{2} & \ldots & A_{i1j} + \frac{v_{1j}}{2} & \ldots & A_{i1n} + \frac{v_{1n}}{2} \\
A_{i12} + \frac{v_{12}}{2} & A_{i22} + u_{ii} + v_{22} & \ldots & A_{i2j} + \frac{v_{2j}}{2} & \ldots & A_{i2n} + \frac{v_{2n}}{2} \\
\ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \ldots & \ldots \\
A_{i1j} + \frac{v_{1j}}{2} & A_{i2j} + \frac{v_{2j}}{2} & \ldots & A_{ijj} + u_{ii} + v_{jj} & \ldots & A_{inj} + \frac{v_{nj}}{2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\
A_{i1n} + \frac{v_{1n}}{2} & A_{i2n} + \frac{v_{2n}}{2} & \ldots & A_{inj} + \frac{v_{nj}}{2} & \ldots & A_{inn} + u_{ii} + v_{nn}
\end{pmatrix},$$

а внедиагональные ij- и ji-блоки $(i = \overline{1,n-1},\ j = \overline{i+1,n})$ равны $\frac{u_{ij}}{2} I_n$, где I_n — единичная матрица.

Поскольку в задаче (10) переменные $\{u_{ij}, i = \overline{1,n-1},\ j = \overline{i+1,n}\}$ не входят в целевую функцию и при их нулевом значении область неотрицательной определенности матрицы $K(u,v)$ относительно других переменных максимальна (для того чтобы матрица была неотрицательно определена, диагональные блоки должны быть также неотрицательно определены), их можно сразу обнулить. Это означает, что ограничения (7) не влияют на величину двойственной оценки ψ_2^*, их можно исключить из квадратичной постановки и рассматривать задачу (5), (6), (8), (9) (отметим, что с точки зрения исходной задачи ограничения (7) также не нужны для задания многообразия Штифеля, так как они являются следствием ограничений (8), (9)).

Таким образом, предлагаемая в данной работе нижняя оценка для задачи минимизации квадратичной функции специального вида (1) на многообразии Штифеля примет окончательный вид

$$\psi_2^* = \max_{\lambda_{\min}(K(u,v)) \geq 0} \psi_2(u,v). \tag{11}$$

Здесь функция $\psi_2(u,v) = -\sum_{i=1}^{n}(u_{ii} + v_{ii})$, а условие неотрицательной определенности матрицы $K(u,v) = K_0 + \sum_{i=1}^{n} u_{ii}K_{ii} + V$ записано в виде неотрицательности ее минимального собственного числа; размерность задачи (11) равна $\frac{n(n+3)}{2}$ (вектор переменных $\{u_{ii}, i = \overline{1,n};\ v_{ij}, i = \overline{1,n},\ j = \overline{i,n}\}$).

Утверждение 1. Для задачи (1) на многообразии Штифеля оценка ψ_2^* (11) всегда не хуже оценки ψ_1^* (4) — $f^* \geq \psi_2^* \geq \psi_1^*$.

Это утверждение очевидно следует из построения оценки ψ_2^*:

$$\psi_2^* = \max_{\lambda_{\min}(K(u,v)) \geq 0} \psi_2(u,v) \geq \max_{\lambda_{\min}(K(u,\mathbf{0})) \geq 0} \psi_2(u,\mathbf{0}) = \psi_1^*.$$

Здесь $\mathbf{0}$ — нулевой $\frac{n(n+1)}{2}$-мерный вектор.

Утверждение 2. Нахождение оценки ψ_2^* (11) сводится к решению безусловной задачи максимизации вогнутой функции

$$\psi_2^* = \max_{u,v}\left(-\sum_{i=1}^{n}(u_{ii} + v_{ii}) + n\,\lambda_{\min}(K(u,v))\right).$$

Доказательство. Для задачи вида

$$\psi^* = \min_{y \in R^m}\left(\sum_{i=1}^{m} c_i y_i\right) \tag{12}$$

при ограничении

$$\lambda_{\max}(K(y)) \leq 0 \tag{13}$$

в [6] приводится следующая теорема.

Теорема. Пусть $\inf_t \frac{V(t) - V(0)}{t} = -L > -\infty$, где $V(t) = \inf_y \left\{\sum_{i=1}^{m} c_i y_i : \lambda_{\max}(K(y)) \leq t;\ y \in R^m\right\}$, $t \in R^1$. Тогда решение задачи (12), (13) имеет вид

$$\psi^* = \min_{y \in R^m}\left(\sum_{i=1}^{m} c_i y_i + L\lambda_{\max}(K(y))\right).$$

Воспользуемся данным результатом. Перепишем задачу (11), соответствующую нахождению ψ_2^*, в виде задачи минимизации

$$\psi_2^* = \max_{\lambda_{\min}(K(u,v))\geq 0}\left(-\sum_{i=1}^{n}(u_{ii}+v_{ii})\right) = -\min_{\lambda_{\max}(-K(u,v))\leq 0}\sum_{i=1}^{n}(u_{ii}+v_{ii}).$$

Тогда имеем

$$V(t) = \inf_{u,v}\left\{\sum_{i=1}^{n}(u_{ii}+v_{ii}) : \lambda_{\max}(-K(u,v))\leq t\right\} =$$

$$= \inf_{u,v}\left\{\sum_{i=1}^{n}(u_{ii}+v_{ii}) :\ \lambda_{\max}(-K_0 - \sum_{i=1}^{n}u_{ii}K_{ii} - V - tI)\leq 0\right\} =$$

$$= \inf_{\tilde{u},v}\left\{\sum_{i=1}^{n}((\tilde{u}_{ii}-t)+v_{ii}) :\ \lambda_{\max}(-K_0 - \sum_{i=1}^{n}\tilde{u}_{ii}K_{ii} - V)\leq 0\right\} =$$

$$= \inf_{\tilde{u},v}\left\{\sum_{i=1}^{n}(\tilde{u}_{ii}+v_{ii}) - nt : \lambda_{\max}(-K(\tilde{u},v))\leq 0\right\} = V(0)-nt,$$

где $\tilde{u}_{ii} = u_{ii}+t,\ i=\overline{1,n}$, I — единичная матрица размерности $n^2\times n^2$.

Подставляя выражение $V(t)$ в формулу для определения множителя L из приведенной теоремы, получаем

$$\inf_{t>0}\frac{V(t)-V(0)}{t} = \inf_{t>0}\frac{V(0)-nt-V(0)}{t} = -n = -L > -\infty.$$

Таким образом, в соответствии с теоремой

$$\psi_2^* = -\min_{\lambda_{\max}(-K(u,v))\leq 0}\sum_{i=1}^{n}(u_{ii}+v_{ii}) = -\min_{u,v}\left(\sum_{i=1}^{n}(u_{ii}+v_{ii}) + n\lambda_{\max}(-K(u,v))\right) =$$

$$= \max_{u,v}\left(-\sum_{i=1}^{n}(u_{ii}+v_{ii}) + n\lambda_{\min}(K(u,v))\right).$$

Доказательство утверждения 2 завершено.

Рассмотрена минимизация квадратичной функции (1) на многообразии Штифеля, когда компоненты векторов $\vec{x}_i$, $i=\overline{1,k}$, принадлежат множеству действительных чисел. Встречаются варианты этой задачи (например, в [1, 4]), когда компоненты векторов $\vec{x}_i$, $i=\overline{1,k}$, принадлежат множеству целых чисел (что с учетом нормированности векторов соответствует $x_{ij}\in\{-1,0,1\}$) или множеству целых неотрицательных чисел (эквивалентно условию булевости переменных x_{ij}). Они интересны в первую очередь тем, что с помощью использования техники двойственных квадратичных оценок для них, как будет показано далее, можно получить точные оценки (эти задачи полиномиально разрешимы). Оба случая эквивалентны: оптимальное значение одно и то же, отличается лишь множество точек глобального экстремума — если для некоторой конкретной задачи на множестве целых неотрицательных чисел их количество составляет L, то для той же задачи на множестве целых чисел — $2^k L$ (за счет всех возможных вариантов замен 1 на –1), и наоборот (заменив все –1 на 1). Поэтому достаточно исследовать вторую из них.

Рассмотрим квадратичную постановку для исходной задачи на множестве целых неотрицательных чисел (как и ранее, без ограничения общности считаем $k = n$)

$$f_B^* = \min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ijj} x_{ij}^2 \tag{14}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 = 1, \ \ i = 1, \ldots, n, \tag{15}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2 = 1, \ j = 1, \ldots, n, \tag{16}$$

$$x_{ij}^2 - x_{ij} = 0, \ \ i = 1, \ldots, n, \ \ j = 1, \ldots, n, \tag{17}$$

где A_{ijj} — j-й диагональный элемент матрицы A_i (от недиагональных членов задача не зависит, поскольку в силу ортонормированности каждый вектор $\vec{x}_i$, $i = \overline{1, n}$, содержит одну, и только одну компоненту, отличную от нуля). Задача (14)–(17) получается в результате добавления к задаче (5), (6), (8), (9) условия булевости переменных и исключения ограничений (9), которые не нужны как с точки зрения исходной задачи (являются следствием ограничений (15)–(17)), так и квадратичной оценки (не влияют на ее решение).

В отличие от предыдущего случая квадратичная задача (14)–(17) не однородна, в силу чего нахождение двойственной лагранжевой оценки потребует больших усилий — решение внутренней задачи уже не будет тривиальным (равным нулевому вектору) и для его нахождения при фиксированных двойственных переменных потребуется решение системы линейных уравнений. В данном случае двойственная лагранжевая оценка имеет общий вид

$$\psi_B^* = \psi_B(u^*, v^*, w^*) = \sup_{(u,v,w):\, K(u,v,w) > 0} \psi_B(u, v, w), \tag{18}$$

где (u, v, w) — вектор множителей Лагранжа ($u = \{u_i, i = \overline{1, n}\}$ соответствуют ограничениям (15), $v = \{v_i, i = \overline{1, n}\}$ — ограничениям (16), $w = \{w_{ij}, i = \overline{1, n}, \ j = \overline{1, n}\}$ — ограничениям (17));

$$\psi_B(u, v, w) = \inf_x \left(x^T K(u, v, w) x - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} w_{ij} x_{ij} - \sum_{i=1}^{n} (u_i + v_i) \right)$$

при $K(u, v, w) > 0$;

$$K(u, v, w) = K_0 + \sum_{i=1}^{n} (u_i K_{ii} + V_{ii} + W_{ii})$$

(задание матриц K_0 и K_{ii} определено ранее, V_{ii} — матрица из n^2 блоков размером $n \times n$, все внедиагональные блоки которой равны нулевым $(n \times n)$-матрицам, а i-й диагональный блок представляет собой диагональную матрицу $\mathrm{diag}(v_j, j = \overline{1, n})$, W_{ii} — матрица, построенная аналогично матрице V_{ii}, с тем отличием, что i-й диагональный блок задается матрицей $\mathrm{diag}(w_{ij}, j = \overline{1, n})$).

С помощью равенств (17) задача (14)–(17) сводится к задаче линейного программирования на булевых переменных, которая известна как классическая задача о назначениях:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ijj} x_{ij}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ \ i = 1,\ldots,n, \qquad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ \ j = 1,\ldots,n,$$

$$x_{ij}^2 - x_{ij} = 0,\ \ i = 1,\ldots,n,\ \ j = 1,\ldots,n.$$

При этом двойственная оценка не меняется, поскольку исключение квадратичных членов равносильно замене $w_{ij} = \widetilde{w}_{ij} - A_{ijj} - u_i - v_j$ в функции Лагранжа. В силу унимодальности матрицы ограничений условия $x_{ij}^2 - x_{ij} = 0, i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,n,$ можно заменить неравенствами $x_{ij}^2 - x_{ij} \le 0$, в результате чего получаем задачу выпуклого квадратичного программирования, для которой двойственная лагранжевая оценка всегда точна [3]. Таким образом, доказана справедливость следующего утверждения.

Утверждение 3. Оценка ψ_B^* (18) для задачи (14)–(17) точная — $f_B^* = \psi_B^*$.

Эффективность двойственных оценок исследовалась на ряде тестовых задач. Для нахождения оценок ψ_2^* и ψ_B^*, как и в [4], использовалась программа DSQTPR с применением модификации r-алгоритма [7], предназначенная для нахождения двойственных лагранжевых оценок в квадратичных задачах общего вида. Заметим, что хотя для вычисления ψ_2^* не требуется решения общей задачи (см., например, утверждение 2), однако ее использование позволяет решить проблему нахождения конкретных решений задачи (1) на многообразии Штифеля. Эта проблема, возникающая при нахождении любой двойственной лагранжевой оценки, состоит в том, что даже в случае получения точной оценки в связи с неоднозначностью решения прямой задачи (всегда для задачи (5), (6), (8), (9) и, как правило, для задачи (14)–(17)) оценка достигается на границе положительной определенности матрицы, что не позволяет определить x^*. В этом случае, для того чтобы получить одну из точек глобального минимума, на практике можно воспользоваться возмущением элементов квадратичной формы функции Лагранжа (матричной и линейной ее части) на сравнительно малые величины.

Приведем результаты решения некоторых тестовых примеров.

Пример 1. Заданы матрицы $A_1 = \mathrm{diag}\,(1,2,3)$, $A_2 = \mathrm{diag}\,(4,5,6)$, $A_3 = \mathrm{diag}\,(7,8,9)$, т.е. целевая функция имеет вид

$$f(x) = x_{11}^2 + 2x_{12}^2 + 3x_{13}^2 + 4x_{21}^2 + 5x_{22}^2 + 6x_{23}^2 + 7x_{31}^2 + 8x_{32}^2 + 9x_{33}^2.$$

Для данного примера $f^* = 15$, а двойственные оценки $\psi_1^* = 12$ и $\psi_2^* = 15$. Как видно, во втором случае имеем точную нижнюю оценку. Заметим, что разрыв двойственности $\Delta_1 = f^* - \psi_1^*$ в первом случае равен трем и достаточно велик ($\approx 20\%$).

Пример 2. Заданы матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 7/2 & -2 \\ 7/2 & 6 & -9 \\ -2 & -9 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 7/2 \\ -3 & 5 & -6 \\ 7/2 & -6 & 3 \end{pmatrix},$$

т.е. целевая функция имеет вид

$$f(x) = 3x_{11}^2 + 6x_{12}^2 + 4x_{13}^2 + 7x_{11}x_{12} - 4x_{11}x_{13} -$$

$$-18x_{12}x_{13} - 3x_{21}^2 + 5x_{22}^2 + 3x_{23}^2 - 6x_{21}x_{22} + 7x_{21}x_{23} - 12x_{22}x_{23}.$$

Для данного примера двойственные оценки $\psi_1^* = -8{,}78798$ и $\psi_2^* = -8{,}50412$. Во втором случае имеем точную нижнюю оценку. В этом можно убедиться, заменив в задаче (5), (6), (8), (9) $f(x) = \vec{x}_1^T A_1 \vec{x}_1 + \vec{x}_2^T A_2 \vec{x}_2$ возмущенной функцией $f(x) + \sum_{i,j=1}^{3} 10^{-6} x_{ij}$. При этом нахождение оценки ψ_2^* не упрощается до вида (11), а имеет «исходное» представление (для квадратичной задачи общего вида)

$$\psi_2^* = \psi_2(u^*, v^*, w^*) = \sup_{(u,v):K(u,v)>0} \inf_x \left(x^T K(u,v) x + \sum_{i,j=1}^{n} 10^{-6} x_{ij} - \sum_{i=1}^{n} (u_{ii} + v_{ii}) \right).$$

Для такой возмущенной задачи получено

$$x_1^* = (0{,}03070,\ 0{,}68053,\ -0{,}73207)^{\mathrm{T}}, \quad x_2^* = (-0{,}95325,\ -0{,}24022,\ 0{,}18333)^{\mathrm{T}},$$
$$x_3^* = (-0{,}30062,\ 0{,}69222,\ -0{,}65609)^{\mathrm{T}},$$

при котором $\psi_2^* = -8{,}50412$ и невязки всех ограничений меньше 10^{-6} (отметим, что вектор x_3^* играет вспомогательную роль и не входит в решение исходной задачи при $k = 2$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rapcsak T. On minimization on Stiefel manifold // Eur. J. Oper. Res. — 2002. — **143**. — P. 365–376.
2. Balogh J., Csendes T., Rapcsak T. Global optimization problems on Stiefel manifold // NMCM-2002 Book of Abstracts. — Miscolc, Hungary, 2002. — P. 19–21.
3. Шор Н.З., Стеценко С.И. Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация. — Киев: Наук. думка, 1989. — 208 с.
4. Шор Н.З., Стецюк П.И., Березовский О.А. Двойственные оценки для специальной оптимизационной задачи квадратичного типа на многообразии Штиффеля // Теория оптимальных решений. — Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 2004. — № 3. — С. 3–10.
5. Shor N.Z. Nondifferentiable optimization and polynomial problems. — Dordrecht: Kluwer, 1998. — 394 p.
6. Березовский О.А. Сведение нахождения двойственных оценок для квадратичных задач к решению задач безусловной оптимизации // Работы междунар. симп. «Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXIII)». — Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 2007. — С. 32–33.
7. Shor N.Z. and Stetsyuk P.I. Dual solution of quadratic-type problems by *r*-algorithm (subroutine DSQTPr) // Abstracts of Second Intern. Workshop «Recent Advances in Non-Differentiable Optimization» (Oct., 1–4, 2001, Kyiv, Ukraine). — P. 36.

Поступила 26.09.2007