УДК 517.98

В.В. СЕМЕНОВ

ПРОЕКЦИОННАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ БАНАХОВЫХ И ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВ[1]

Ключевые слова: *билинейная форма, представление, линейный функционал, линейный оператор, теорема Лакса–Мильграма.*

КЛАССИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Вопрос о существовании обобщенных решений граничных задач математической физики, как правило, сводится функциональными методами к проблеме возможности представления линейных непрерывных функционалов с помощью заданной билинейной формы.

Для гильбертовых пространств известна классическая теорема Лакса–Мильграма.

Теорема 1 (Лакс, Мильграм). Пусть H — гильбертово пространство, b — ограниченная на $H \times H$ билинейная форма. Если существует такое $c > 0$, что

$$c\|x\|_H^2 \le |b(x,x)| \quad \forall x \in H,$$

то для любого $f \in H$ существует единственный элемент $x \in H$, удовлетворяющий тождеству

$$b(x, y) = (f, y)_H \quad \forall\, y \in H. \tag{1}$$

Доказательство теоремы 1 см. в [1, с. 134, 135] (впервые опубликована в [2, 3]).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке ГФФИ Украины.

Данная теорема стала эффективным средством изучения эллиптических граничних задач [4]. Следует отметить, что естественные обобщенные постановки эволюционных задач для уравнений в частных производных не имеют вид тождества (1) (типичные постановки см. в [5]). Поэтому Ж.-Л. Лионсом была сформулирована более общая «проекционная теорема», ориентированная на эволюционные задачи (впервые опубликована в [6]; см. также работу [7], содержащую некоторое усиление теоремы 2).

Теорема 2 (Ж.-Л. Лионс). Пусть F — гильбертово пространство, Φ — линейное подпространство F, снабженное новым скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_\Phi$. Предположим, что $||x||_F \le c||x||_\Phi \ \forall x \in \Phi$.

Пусть $b: F\times\Phi \to \mathbb{R}$ — билинейная форма и выполняются условия:

$$\forall\, y\in\Phi \quad x\mapsto b(x, y)\in F^*;$$

$$\exists\, c_1 > 0:\ |b(y, y)|\ge c_1||\,y||_\Phi^2 \quad \forall y\in\Phi.$$

Тогда для любого $f\in\Phi^*$ существует элемент $x\in F$, удовлетворяющий тождеству $b(x, y) = f(y) \ \ \forall y\in\Phi$.

Доказательство теоремы 2 и ее приложения см. в [8, с. 382, 383].

Цель данной работы — получение условий представимости семейств линейных функционалов и линейных операторов с помощью заданного билинейного оператора. Точнее, пусть E, F, G — линейные топологические пространства, $b: E\times F \to G$ — непрерывное билинейное отображение. Возникает вопрос: при каких условиях на билинейное отображение b для произвольного оператора $A\in L(F, G)$ существует единственная точка $x\in E$ такая, что $b(x, y) = Ay \ \ \forall y\in F$?

РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Рассмотрим случай банаховых пространств. Все пространства являются пространствами над полем действительных чисел. Обозначим $B_1(F) = \{y\in F: ||\,y||_F \le 1\}$ замкнутый единичный шар пространства F.

Предположим вначале, что $G = \mathbb{R}$. В банаховом случае справедлив следующий результат [9]. Его доказательство приводим из соображений удобства изложения.

Теорема 3. Пусть E — банахово пространство, F — рефлексивное банахово пространство, b — ограниченная на $E\times F$ билинейная форма. Тогда эквивалентны следующие утверждения.

1. $\forall f\in F^*\ \exists\,!\, x\in E$: $b(x, y) = \langle f, y\rangle_{F^*,\, F} \quad \forall y\in F$.

2. а) $\exists c > 0$: $c||x||_E \le \sup\limits_{y\in B_1(F)} |b(x, y)| \ \ \forall x\in E$; б) $b(x, y) = 0 \ \forall\, x\in E \Rightarrow y = 0$.

Доказательство. Введем оператор $E \xrightarrow{T} F^*$, действующий по правилу

$$E\ni x\mapsto Tx = b(x,\cdot)\in F^*.$$

Оператор T линейный и непрерывный, причем

$$||Tx||_{F^*} = ||b(x,\cdot)||_{F^*} = \sup_{y\in B_1(F)} |b(x, y)|\le M||x||_E.$$

Пусть выполнено утверждение 1, т.е. оператор T биективен. По теореме Банаха об обратном операторе он непрерывно обратим, т.е. $\exists c > 0: c||x||_E \le ||Tx||_{F^*}$, что равносильно условию 2а. Условие 2б означает тотальность $R(T)$ в F^*, что имеет место, когда $R(T) = F^*$.

Обратно, пусть справедливо утверждение 2. Из свойства 2а следует, что $c||x||_E \le ||Tx||_{F^*}$, т.е. оператор T непрерывно обратим на $R(T)\subseteq F^*$ и линейное многообразие $R(T)$ замкнуто в F^*. Поскольку $R(T)$ тотально в F^* (свойство 2б), то, учитывая рефлексивность F, получаем $R(T) = F^*$.

Теорема доказана.

Замечание 1. Если E — рефлексивное банахово пространство, а F — банахово, то условия 1 и 2 теоремы 3 также равносильны. Если с помощью формы b однозначно представимы все элементы, как E^*, так и F^*, то пространства E и F рефлексивны [9].

Пусть теперь G — конечномерное банахово пространство ($\dim G = n$). Фиксируем некоторый базис $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset G$. Если $b: E \times F \to G$ — непрерывный билинейный оператор, то справедливо представление

$$b(x, y) = \sum_{k=1}^{n} b_k(x, y) e_k, \quad x \in E, \quad y \in F,$$

где $b_k: E \times F \to \mathbb{R}$ — непрерывные билинейные формы.

Теорема 4. Пусть E — банахово пространство, F — рефлексивное банахово пространство, G конечномерно ($\dim G = n$), $b: E \times F \to G$ — непрерывный билинейный оператор. Тогда эквивалентны следующие утверждения.

1. $\forall\, A \in L(F, G)\ \exists\, !\, x \in E$: $b(x, y) = Ay\ \ \forall y \in F$.

2. а) $\exists c > 0$: $c\|x\|_E \le \sup\limits_{\{y_1, \ldots, y_n\} \subset B_1(F)} \left| \sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x, y_k) \right| \quad \forall x \in E$;

б) $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x, y_k) = 0\ \ \forall x \in E \Rightarrow y_k = 0, \ \ k = \overline{1, n}$.

Доказательство проводится с помощью рассуждений, подобных использованным при доказательстве теоремы 3, с учетом изоморфности банаховых пространств $L(F, G)$ и $\underbrace{F^* \oplus F^* \oplus \ldots \oplus F^*}_{n \text{ раз}}$.

Рассмотрим случай, когда G — бесконечномерное банахово пространство с базисом Шаудера (e_n). Пусть $b: E \times F \to G$ — непрерывный билинейный оператор, тогда для оператора b можем записать представление

$$b(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(x, y) e_k, \quad x \in E, \quad y \in F,$$

где $b_k: E \times F \to \mathbb{R}$ — непрерывные билинейные формы.

Обозначим $K(F, G)$ множество всех вполне непрерывных линейных операторов, действующих из пространства F в G, т.е. непрерывных линейных операторов, отображающих ограниченные множества из F в предкомпактные множества пространства G.

Теорема 5. Пусть E, F — рефлексивные банаховы пространства, G — банахово пространство с базисом Шаудера (e_n), $b: E \times F \to G$ — непрерывный билинейный оператор. Тогда эквивалентны следующие утверждения.

1. $\forall A \in K(F, G)\ \exists\, !\ x \in E$: $b(x, y) = Ay\ \ \forall y \in F$.

2. а) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists c_n > 0$: $c_n \|x\|_E \le \sup\limits_{\{y_1, \ldots, y_n\} \subset B_1(F)} \left| \sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x, y_k) \right| \quad \forall x \in E$;

б) $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ \sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x, y_k) = 0\ \ \forall x \in E \Rightarrow y_k = 0, \ \ k = \overline{1, n}$.

Доказательство. Определим $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\bar{b}_n(x, y) = \sum_{k=1}^{n} b_k(x, y) e_k, \quad x \in E, \quad y \in F.$$

Ясно, что $\overline{b}_n$ — непрерывный билинейный оператор, отображающий $E \times F$ в линейную оболочку (л.о.)$\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Предположим, что выполнено условие 1. Рассмотрим конечномерное подпространство $G_n =$ л.о.$\{e_1, \ldots, e_n\}$. Тогда $\forall A \in L(F, G_n) \subseteq K(F, G)\ \exists\,!\ x \in E$:

$$b(x, y) = \overline{b}_n(x, y) = Ay \quad \forall y \in F.$$

По теореме 4 для $n \in \mathbb{N}$ выполнены условия 2.

Обратно, пусть выполнено условие 2. Рассмотрим произвольный оператор $A \in K(F, G)$. Определим $\forall n \in \mathbb{N}$ оператор $A_n = P_n \circ A$, где P_n — стандартный проектор G на л.о.$\{e_1, \ldots, e_n\}$, т.е. $P_n g = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle e_k^*, g \rangle_{G^*, G}\, e_k$, $\{e_1^*, \ldots, e_n^*, \ldots\} \subseteq G^*$ — сопряженная система элементов.

По теореме 4 $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists\,!\ x_n \in E$: $A_n y = \overline{b}_n(x_n, y)\ \forall y \in F$.

Покажем, что построенная последовательность (x_n) ограничена в пространстве E. Из условия 2а следует $c_1 ||x_n||_E \le \sup\limits_{y \in B_1(F)} |b_1(x_n, y)|$.

Необходимо доказать, что $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \sup\limits_{y \in B_1(F)} |b_1(x_n, y)| < +\infty$.

Из сходимости $||A - A_n||_{L(F,G)} = ||A - P_n \circ A||_{L(F,G)} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ следует, что $e_1^* \circ P_n \circ A \to e_1^* \circ A$ равномерно на $B_1(F)$.

Имеем $\forall y \in B_1(F)$

$$|b_1(x_n, y)| = |\langle e_1^*, A_n y \rangle_{G^*, G}| \le |\langle e_1^*, A_n y \rangle_{G^*, G} - \langle e_1^*, Ay \rangle_{G^*, G}| + |\langle e_1^*, Ay \rangle_{G^*, G}|.$$

За счет указанной равномерной сходимости и ограниченности множества $B_1(F)$ получаем

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{y \in B_1(F)} |b_1(x_n, y)| \le \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{y \in B_1(F)} |\langle e_1^*, A_n y \rangle_{G^*, G} - \langle e_1^*, Ay \rangle_{G^*, G}| +$$

$$+ \sup_{y \in B_1(F)} |\langle e_1^*, Ay \rangle_{G^*, G}| < +\infty.$$

Можно считать, что $x_n \to x_0 \in E$ в топологии $\sigma(E, E^*)$.

Пусть $y \in F$. Поскольку $\forall k \in \mathbb{N}$: $E \ni x \mapsto b_k(x, y) \in E^*$, имеем

$$b_k(x_n, y) \xrightarrow[n \to \infty]{} b_k(x_0, y) \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

В то же время

$$\sum_{k=1}^{n} b_k(x_n, y) e_k = A_n y \xrightarrow[n \to \infty]{} Ay.$$

Тогда

$$b_k(x_n, y) \xrightarrow[n \to \infty]{} \langle e_k^*, Ay \rangle_{G^*, G} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, имеем

$$b_k(x_0, y) = \langle e_k^*, Ay \rangle_{G^*, G} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда получаем $Ay = b(x_0, y)\ \forall y \in F$.

Покажем единственность точки $x_0 \in E$. Пусть $\forall y \in F\ b(x, y) = 0$. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}$: $b_n(x, y) = 0\ \forall y \in F$. Из условия 2а следует, что $||x||_E = 0$, т.е. $x = 0$.

Теорема доказана.

В связи с доказанной теоремой возникает естественный вопрос.

Задача 1. Пусть $b: l_2 \times l_2 \to l_2$ — непрерывный билинейный оператор. Всегда ли существует оператор $A \in L(l_2, l_2)$, не представимый с помощью оператора b, т.е. $A \ne b(x, \cdot)\ \forall x \in l_2$?

Все изложенное обобщается на локально выпуклые линейные топологические пространства E, F и G определенного вида.

Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство (л.в.п.) с сопряженным E^*. Будем называть множество $A^* \subseteq E^*$ почти замкнутым, если $A^* \cap U^o$ $\sigma(E^*, E)$-замкнуто для каждой окрестности нуля U из E, где $U^o = \{y^* \in E^* : \sup_{x \in U} \langle y^*, x \rangle_{E^*, E} \le 1\}$ — поляра множества U.

Определение 1. Пространство E называется совершенно полным, если каждое почти замкнутое линейное подпространство в E^* $\sigma(E^*, E)$-замкнуто.

Замечание 2. Каждое пространство Фреше совершенно полно [10, с. 163]. Пространство E^*, сопряженное к банахову пространству E, наделенное топологией $\sigma(E^*, E)$, совершенно полно [10, с. 179]. Сильное сопряженное пространство к рефлексивному пространству Фреше совершенно полно [10, с. 180].

Напомним, что бочкой в л.в.п. называется всякое его выпуклое, уравновешенное, поглощающее и замкнутое подмножество. Каждое л.в.п. имеет фундаментальную систему окрестностей нуля, состоящую из бочек. Локально выпуклое пространство называется бочечным, если каждая бочка в нем является окрестностью нуля [10, с. 99].

Имеют место следующие факты [10, с. 170].

Теорема 6 (об открытом отображении). Непрерывное линейное отображение совершенно полного пространства на отделимое бочечное пространство открыто.

Следствие 1. Биективное непрерывное линейное отображение совершенно полного пространства на отделимое бочечное пространство является изоморфизмом.

Пусть V — фундаментальная система замкнутых, выпуклых и уравновешенных окрестностей нуля пространства E, B — фундаментальная система ограниченных подмножеств пространства F. Обозначим $x \mapsto \mu_O(x)$ функционал Минковского множества $O \subseteq E$.

Теорема 7. Пусть л.в.п. E совершенно полное и бочечное, а л.в.п. F полурефлексивно, b — непрерывная на $E \times F$ билинейная форма. Тогда эквивалентны следующие утверждения.

1. $\forall f \in F^* \quad \exists\, ! x \in E : b(x, y) = \langle f, y \rangle_{F^*, F} \quad \forall y \in F.$

2. а) $\forall O \in V \;\exists P \in B : \mu_O(x) \le \sup_{y \in P} |b(x, y)| \;\; \forall x \in E;$

   б) $b(x, y) = 0 \;\forall x \in E \Rightarrow y = 0.$

Доказательство. Рассуждаем, как при доказательстве теоремы 3. Введем линейный оператор $E \xrightarrow{T} F^*$, действующий по правилу $E \ni x \mapsto Tx = b(x, \cdot) \in F^*$.

Наделим пространство F^* сильнейшей топологией равномерной сходимости $\beta(F^*, F)$. Оператор $E \xrightarrow{T} F^*$ является непрерывным. Действительно, $\{P^o : P \in B\}$ — фундаментальная система выпуклых и уравновешенных окрестностей нуля в сильном сопряженном F^*. Пусть $P \in B$, тогда множество $T^{-1}(P^o)$ выпуклое, уравновешенное и поглощающее. Покажем, что $T^{-1}(P^o)$ замкнуто. Тогда из бочечности пространства E следует, что $T^{-1}(P^o)$ — окрестность нуля в E. Пусть $Tx = b(x, \cdot) \notin P^o$. Тогда $\sup_{y \in P} |b(x, y)| > 1$, т.е. $\exists y' \in P$: $|b(x, y')| > 1$. Из непрерывности формы b следует, что существует такая окрестность O точки $x \in E$, что $|b(x'', y')| > 1 \;\forall x'' \in O$, т.е. $Tx'' \notin P^o \;\; \forall x'' \in O$.

Предположим, что $R(T)=F^*$ и $N(T)=\{0\}$. Поскольку пространство E совершенно полное, а пространство F^* при наделении сильнейшей топологией равномерной сходимости $\beta(F^*, F)$ бочечное [11, с. 183, 184], оператор T является изоморфизмом (см. следствие 1) E и F^* с топологией $\beta(F^*, F)$. Условие 2б следует из сюръективности оператора T.

Докажем выполнение условия 2а. Пусть множество $O \in V$. Поскольку оператор T — изоморфизм E и F^* с топологией $\beta(F^*, F)$, существует такое $P \in B$, что $P^o \subseteq T(O)$. Из инъективности оператора T следует $T^{-1}(P^o) \subseteq O$. Очевидно, что $\mu_O(x) \le \mu_{T^{-1}(P^o)}(x)$ для любого $x \in E$. Покажем, что имеет место равенство

$$\mu_{T^{-1}(P^o)}(x) = \sup_{y \in P} |b(x, y)| \quad \forall x \in E, \tag{2}$$

что и доказывает требуемое.

Множество $P^o \subseteq F^*$ — выпуклая уравновешенная окрестность нуля в сильном сопряженном F^*. Множество $T^{-1}(P^o) \subseteq E$ — выпуклое, уравновешенное и поглощающее. Пусть $x \in E$. По определению $\mu_{T^{-1}(P^o)}(x) = \inf\{\lambda : \lambda > 0,$ $x \in \lambda T^{-1}(P^o)\}$. Если $Tx = b(x, \cdot) \in \lambda P^o$ при некотором $\lambda > 0$, то $|b(x, y)| \le \lambda \ \ \forall y \in P$. Следовательно, $\mu_{T^{-1}(P^o)}(x) \ge \sup_{y \in P} |b(x, y)|$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Имеем

$$\frac{1}{\sup_{y \in P} |b(x, y)| + \varepsilon} |b(x, y)| < 1 \quad \forall y \in P,$$

т.е. $Tx = b(x, \cdot) \in \left(\sup_{y \in P} |b(x, y)| + \varepsilon \right) P^o$.

Таким образом, $\mu_{T^{-1}(P^o)}(x) \le \sup_{y \in P} |b(x, y)| + \varepsilon$.

Учитывая произвольность $\varepsilon > 0$ и доказанное ранее неравенство, получаем равенство (2).

Обратно, предположим выполнение условий 2. Покажем, что $N(T) = \{0\}$. Пусть $Tx = 0$, т.е. $b(x, y) = 0 \ \forall y \in F$. Тогда $\forall O \in V$ имеем $\mu_O(x) = 0$. Следовательно, $\forall O \in V : x \in O$. В силу отделимости пространства E получаем, что $x = 0$, т.е. оператор T инъективен.

Из условия 2б следует тотальность $R(T)$ в F^*. Покажем, что $R(T)$ — замкнутое подпространство в сильном сопряженном пространстве F^*. Тогда из полурефлексивности пространства F следует $R(T) = F^*$.

Пусть $O \in V$ и $\widetilde{O} \in V$: $2\widetilde{O} \subseteq O$. По условию $\exists P \in B$: $\mu_{\widetilde{O}}(x) \le \sup_{y \in P} |b(x, y)| =$ $= \mu_{T^{-1}(P^o)}(x) \ \forall x \in E$. Отсюда $\forall x \in T^{-1}(P^o)$ получим, что $2\mu_O(x) \le \mu_{\widetilde{O}}(x) \le$ $\le \mu_{T^{-1}(P^o)}(x) \le 1$. Если $x \in T^{-1}(P^o)$, то $x \in O$, т.е. $T^{-1}(P^o) \subseteq O$. Таким образом, $R(T) \cap P^o \subseteq T(O)$. Следовательно, T — непрерывный открытый (относительно) и биективный линейный оператор, действующий из E на $R(T)$. Подпространство $R(T)$ с топологией, индуцированной $\beta(F^*, F)$, совершенно полное [10, с. 166], а значит, замкнуто в F^*.

Теорема доказана.

Рассуждая, как при доказательстве теоремы 4, получаем из теоремы 7 результат для операторов, действующих в конечномерное л.в.п.

Теорема 8. Пусть л.в.п. E совершенно полное и бочечное, а л.в.п. F полурефлексивно, G конечномерно ($\dim G = n$), $b: E \times F \to G$ — непрерывный билинейный оператор. Тогда эквивалентны следующие утверждения.

1. $\forall A \in L(F, G)\ \exists !\ x \in E$: $b(x, y) = Ay \quad \forall y \in F$.

2. а) $\forall O \in V\ \exists P \in B : \mu_O(x) \leq \sup\limits_{\{y_1, \ldots, y_n\} \subset P} \left| \sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x, y_k) \right| \quad \forall x \in E;$

б) $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x, y_k) = 0 \quad \forall x \in E \Rightarrow y_k = 0, \quad k = \overline{1, n}.$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.

Рассмотрим линейное топологическое пространство G с базисом Шаудера (e_n). Пусть $\{e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*, \ldots\} \subseteq G^*$ — сопряженная система элементов. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определен непрерывный линейный оператор

$$G \ni g \mapsto P_n g = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k^*, g \rangle_{G^*, G}\, e_k .$$

Оператор P_n проектирует все пространство G на л.о. $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Будем рассматривать такие базисы, для которых семейство проекторов $\{P_n\}$ равностепенно непрерывно в пространстве $L(G, G)$, т.е. для каждой окрестности нуля O_1 из G существует окрестность O_2 в G такая, что $P_n(O_2) \subseteq O_1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Такие базисы назовем равностепенно непрерывными.

Замечание 3. В банаховых пространствах и пространствах Фреше для базисов Шаудера семейство проекторов $\{P_n\}$ равностепенно непрерывно [12, 13].

Теорема 9. Пусть л.в.п. E рефлексивно и совершенно полное, а л.в.п. F полурефлексивно, G — линейное топологическое пространство с равностепенно непрерывным базисом Шаудера (e_n), $b: E \times F \to G$ — непрерывный билинейный оператор. Тогда эквивалентны следующие утверждения.

1. $\forall A \in K(F, G)\ \exists !\ x \in E : b(x, y) = Ay \quad \forall y \in F$.

2. а) $\forall n \in \mathbb{N}\ \ \forall O \in V\ \ \exists P \in B : \mu_O(x) \leq \sup\limits_{\{y_1, \ldots, y_n\} \subset P} \left| \sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x, y_k) \right| \quad \forall x \in E;$

б) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x, y_k) = 0 \quad \forall x \in E \Rightarrow y_k = 0, \quad k = \overline{1, n}.$

Доказательство. Импликация $1 \Rightarrow 2$ следует из теоремы 8.

Для доказательства $2 \Rightarrow 1$ возьмем произвольный оператор $A \in K(F, G)$ и рассмотрим последовательность операторов $A_n = P_n \circ A \in L(F, G_n)$, где $G_n =$ л.о. $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

Последовательность проекторов (P_n) равностепенно непрерывна и сходится поточечно к единичному оператору $I: G \to G$. Следовательно, (P_n) сходится к I равномерно на произвольном предкомпактном множестве вида $A(P)$, где $P \in B$. Таким образом, последовательность (A_n) сходится равномерно на произвольном множестве $P \in B$ к оператору A.

По теореме 8 $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists !\, x_n \in E$: $A_n y = \overline{b}_n(x_n, y) = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x_n, y) \quad \forall y \in F$.

Докажем ограниченность в E последовательности (x_n), т.е. $\forall O \in V$: $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \mu_O(x_n) < +\infty$.

Фиксируем окрестность $O \in V$. Из условия 2а вытекает существование такого множества $P \in B$, что $\mu_O(x_n) \leq \sup\limits_{y \in P} |b_1(x_n, y)| \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Следовательно, достаточно показать, что $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \sup\limits_{y\in P} |b_1(x_n, y)| < +\infty$, что можно сделать таким же образом, как в доказательстве теоремы 5.

Можно считать, что $x_n \to x_0 \in E$ в топологии $\sigma(E, E^*)$.

Далее, проведя рассуждения, идентичные использованным в доказательстве теоремы 5, получаем $Ay = b(x_0, y)$ $\forall y \in F$.

Покажем единственность точки $x_0 \in E$. Пусть $\forall y \in F$ $b(x, y) = 0$. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}$: $b_n(x, y) = 0$ $\forall y \in F$. Из условия 2а следует, что $\forall O \in V$: $\mu_O(x) = 0$, т.е. $x = 0$.

Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе получено ряд условий представимости семейств линейных функционалов и линейных операторов с помощью заданного билинейного оператора. Эти результаты могут использоваться специалистами в области теории уравнений с частными производными и теории управления. В теории управления задачи управляемости систем часто сводят к вопросу о представимости.

В операторных вариантах (теоремы 5 и 9) имеется важное условие рефлексивности пространства E. Возникает вопрос: к чему приведет отказ от этого условия? Представляет интерес построение теории обобщенных представлений операторов с помощью, например, элементов второго сопряженного E^{**}.

Операторные теоремы касались представлений вполне непрерывных операторов. Интересно также получить результаты о представлении произвольного оператора $L(F, G)$. Вопрос тривиален для ситуации, когда $L(F, G) = K(F, G)$. Последнее имеет место, например, в следующих случаях:

1) F — полурефлексивное л.в.п., G — пространство Фреше с базисом Шаудера (e_n), в котором совпадает сильная и слабая сходимость;

2) F — монтелевское пространство [10, с. 112], G — пространство Фреше с базисом Шаудера (e_n);

3) $F = l_q$, $G = l_p$, $1 \le p < q < +\infty$ (теорема Питта [14]).

Автор благодарен профессору Ю.И. Петунину за ряд замечаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иосида К. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967. — 624 с.
2. Вишик М.И. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений // Мат. сб. — 1951. — **29**. — С. 615–676.
3. Lax P.D., Milgram N. Parabolic equations. Contributions to the theory of partial differential equations // Ann. Math. Studies. — 1954. — **33**. — P. 167–190.
4. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. — М.: Наука, 1989. — 463 с.
5. Ляшко С.И. Обобщенное управление линейными системами. — Киев: Наук. думка, 1998. — 471 с.
6. Lions J.-L. Sur les problemes mixtes pour certains systemes paraboliques dans les ouverts non cylindriques // Ann. de l'institut Fourier. — 1957. — **7**. — P. 143–182.
7. Кислов Н.В. Проекционная теорема и ее приложение к неоднородным граничным задачам // ДАН СССР. — 1982. — **265**, № 1. — С. 31–34.
8. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. — М.: Мир, 1968. — 427 с.
9. Hayden T. Representation theorems in reflexive Banach spaces // Math. Z. — 1968. — **104**. — P. 405–406.
10. Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1967. — 257 с.
11. Шефер Х. Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1971. — 359 с.
12. Функциональный анализ (Сер.: «Справочная математическая библиотека») / Ред. С.Г. Крейн. — М.: Наука, 1972. — 544 с.
13. Пич А. Ядерные локально выпуклые пространства. — М.: Мир, 1967. — 266 с.
14. Pitt H.R. A note on bilinear forms // J. London Math. Soc. — 1936. — **11**. — P. 174–180.

Поступила 14.06.2007