УДК 517.977.8

Ю.В. АВЕРБУХ

О ЗАДАЧЕ НАВЕДЕНИЯ АВТОНОМНОЙ КОНФЛИКТНО-УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЕ МНОЖЕСТВО[1]

Ключевые слова: *дифференциальные игры, максимальный стабильный мост, задача «к моменту», метод программных итераций.*

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена изучению структуры решения дифференциальной игры наведения в случае, когда целевое множество имеет вид цилиндра в пространстве позиций. Задачи такого вида иногда называют задачами наведения «к моменту». Структура нелинейной игровой задачи наведения исчерпывающим образом характеризуется теоремой об альтернативе, доказанной Н.Н. Красовским и А.И. Субботиным [1, 2]; она утверждает существование седловой точки в классе соответствующих позиционных стратегий при выполнении условий информационной согласованности. В случае, если условие информационной согласованности не выполняется, седловая точка существует в классе пар контрстратегия/стратегия [2] (также установлено существование седловой точки в парах стратегия/контрстратегия и смешанная стратегия/смешанная стратегия [2]). Известен вид оптимальной стратегии в задаче наведения [2]: стратегия (в случае невыполнения условия информационной согласованности — контрстратегия) строится методом экстремального сдвига на некоторое множество; это множество является максимальным u-стабильным мостом в смысле Н.Н. Красовского. Таким образом, решение игровой задачи наведения сводится к задаче построения максимального u-стабильного моста. Если задача рассматривается в классах смешанная стратегия/смешанная стратегия, стратегия/контрстратегия, то соответствующее оптимальное управление может быть получено методом экстремального сдвига на максимальный $\widetilde{u}$-стабильный, u_*-стабильный мост соответственно [2].

Наряду с задачами наведения в теории дифференциальных игр рассматриваются игровые задачи минимизации функционала. Для этих задач на основе теоремы об альтернативе Н.Н. Красовским и А.И. Субботиным установлено существование функции цены [2].

Конкретное построение множества позиционного поглощения или функции цены удается провести на основе метода программных итераций, предложенного А.Г. Ченцовым [3–6] (см. также [7–9]). Из множества рассматриваемых в теории дифференциальных игр задач часто выделяют два важных класса: задачи «в момент» и задачи «к моменту». Игровая задача наведения называется задачей «в момент», если требуется привести систему на множество в фазовом пространстве в последний момент времени, и задачей «к моменту», если требуется привести систему на множество в фазовом пространстве в любой момент времени. В последнем случае целевое множество в игре имеет вид цилиндра в пространстве позиций. Аналогично игровая задача минимизации функционала называется задачей «в момент», если требуется минимизировать значение функционала в последний момент, и задачей «к моменту», если требуется минимизировать минимальное вдоль по траектории значение функционала. Игровые задачи минимизации функционала «в момент» и «к моменту» могут быть исследованы методами теорий обобщенных решений

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты № 06-01-00414, 07-01-96088-р.

уравнений Гамильтона–Якоби и минимаксных неравенств соответственно, развитых в работах [10, 11]. Для случая, обобщающего случай игр с простыми движениями, известны явные выражения функции цены как для задачи «в момент», так и для задачи «к моменту» [10]. Отметим, что впервые выражение функции цены в случае игры с простыми движениями получено в [12]. Также известно, что решение задачи «к моменту» для автономных систем может быть получено из решения уравнения Гамильтона–Якоби с преобразованным гамильтонианом, являющимся минимумом из гамильтониана исходной игры и нуля [12].

Решение целого ряда нерегулярных линейных задач «в момент» получено благодаря методу программных итераций [3], однако решение аналогичных задач «к моменту» представляется более сложным. Один из вариантов представления задачи «к моменту» в терминах задачи «в момент» без преобразования управляемой системы приведен в [3, с. 228–231].

В настоящей работе преобразование задач проводится путем своеобразного расширения управляемой системы. Доказано, что для случая автономной конфликтно-управляемой системы задача наведения «к моменту» эквивалентна задаче наведения расширенной системы «в момент». Эквивалентность рассмотренных задач следует из того, что совпадают итерации, построенные по одному из вариантов метода программных итераций для обеих задач. Рассмотренный способ преобразования задач может быть применен к игровым задачам минимизации функционала траектории. В частности, из доказанных в данной работе утверждений следует, что задача «к моменту» для конфликтно-управляемой линейной системы с постоянными коэффициентами эквивалентна задаче «в момент» для билинейной конфликтно-управляемой системы.

ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Рассматриваются задачи сближения/уклонения с множеством M автономных конфликтно-управляемых систем вида

$$\dot{x} = f(x,u,v), \quad u \in P, \quad v \in Q, \tag{1}$$

на промежутке времени $[0,\vartheta]$. Предполагается, что первый игрок, распоряжающийся управлением u, стремится привести систему на множество M, $M \subset [0,\vartheta]\times\mathbb{R}^n$, второй игрок, распоряжаясь управлением v, стремится не допустить этого.

Предполагается, что f непрерывна, локально липшицева по фазовой переменной и удовлетворяет условию подлинейного роста, $P \subset \mathbb{R}^p$, $Q \subset \mathbb{R}^q$, P и Q — компакты, M замкнуто. Получающуюся дифференциальную игру рассмотрим в классе контрстратегия/стратегия. Будем считать, что первый игрок (распоряжающийся управлением u) осуществляет управление в классе контрстратегий, а второй (распоряжающийся управлением v) — в классе чистых позиционных стратегий [2]. Дадим строгое определение контрстратегии, позиционной стратегии и движения для случая автономных игр, следуя определениям, введенным в [2] для общего случая.

Контрстратегией первого игрока называется любая функция U: $[0,\vartheta]\times\mathbb{R}^n\times Q \to P$, измеримая по третьему аргументу, позиционной стратегией второго игрока называется любая функция V: $[0,\vartheta]\times\mathbb{R}^n \to Q$. Движение, порожденное контрстратегией $U(t,x,v)$ на промежутке $[t_*,t^*]$, выходящее из точки x_*, следуя [2], определим как пределы ломаных Эйлера при стремлении мелкости разбиения к нулю. Ломаные Эйлера строятся следующим образом. Пусть $\Delta=\{\tau_k\}_{k=0}^{r}$ — разбиение отрезка $[t_*,t^*]$, $v(\cdot)$ — некоторое управление второго игрока, на каждом промежутке $[\tau_{k-1},\tau_k)$ $(k=\overline{1,r})$ определим ломаную Эйлера как решение уравнения

$$x_k[t]=x_{k-1}[\tau_{k-1}]+\int_{\tau_{k-1}}^{t} f(x_k[\theta],U(\tau_{k-1},x_{k-1}[\tau_{k-1}],v(\theta)),v(\theta))\,d\theta,\quad x_0[\tau_0]\triangleq x_*.$$

При этом второй игрок формирует свое управление по правилу: пусть $\Xi = \{\xi_j\}_{j=0}^m$ — некоторое разбиение отрезка $[t_*, t^*]$, он выбирает свое управление постоянным на промежутке $[\xi_{j-1}, \xi_j)$, $j = \overline{1, m}$, и равным $V(\xi_{j-1}, x_{j-1})$, где x_{j-1} — положение системы, реализовавшееся к моменту ξ_{j-1}.

В случае выполнения условия Айзекса (условия седловой точки в маленькой игре)

$$\forall s, x \in \mathbb{R}^n \quad \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle s, f(x,u,v) \rangle = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle s, f(x,u,v) \rangle$$

достаточно рассматривать дифференциальную игру в классе позиционных стратегий [2], тогда стратегии первого игрока зависят только от реализовавшейся позиции. По теореме об альтернативе [2, теорема 82.2] решение задачи сближения/уклонения полностью определяется множеством успешной разрешимости (максимальным u-стабильным мостом) $\mathfrak{W}$. При этом оптимальная контрстратегия $U(t,x,v)$ строится по правилу экстремального сдвига на $\mathfrak{W}$ [2].

Рассмотрим далее две дифференциальные игры на отрезке $[0, \vartheta]$ в $\mathbb{R}^n$:

$$\dot{x} = f_1(x,u,v), \quad u \in P_1, \quad v \in Q_1;$$
$$\dot{x} = f_2(x,u,v), \quad u \in P_2, \quad v \in Q_2.$$

Для каждой системы рассмотрим задачу наведения ее на множества M_1 и M_2 соответственно (множества M_i замкнуты). Будем считать, что задачи наведения i-й системы на множество M_i эквивалентны (в смысле Н.Н. Красовского и А.И. Субботина), если множества успешной разрешимости обеих задач $\mathfrak{W}_i$ совпадают.

Основным результатом настоящей работы является сопоставление некоторым дифференциальным играм «к моменту» эквивалентных им дифференциальных игр «в момент». Рассмотрим задачу наведения системы (1) на цилиндрическое множество $[0, \vartheta] \times F$, где F — замкнутое подмножество $\mathbb{R}^n$. Как уже отмечалось, предполагается, что $P \subset \mathbb{R}^p$, $Q \subset \mathbb{R}^q$, P и Q — компакты. Данная задача является задачей наведения на F «к моменту». На выбор функции $f(\cdot, \cdot, \cdot)$ наложены указанные условия.

Для того чтобы построить эквивалентную игру «в момент», расширяем возможности первого игрока, формирующего управление u, введя дополнительное управление u_0, принимающее значение 0 или 1. Рассмотрим конфликтно-управляемую систему

$$\dot{x} = u_0 f(x,u,v), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u_0 \in \{0,1\}, \quad u \in P, \quad v \in Q, \tag{2}$$

на промежутке $[0, \vartheta]$. В новой системе (2) первый игрок распоряжается управлениями u_0 и u, а второй, как и в системе (1), — управлением v. Аналогичные способы преобразования системы рассматривались ранее в классе программных управлений [13, 14]. Поставим задачу наведения на множество $\{\vartheta\} \times F$. Подобная задача является задачей наведения «в момент». Докажем, что рассматриваемые задачи эквивалентны. Более того, докажем, что совпадают последовательности, построенные по одному из методов программных итераций (итерации стабильности). Определим данный вариант метода программных итераций для рассматриваемых систем [15].

Далее будем придерживаться следующих обозначений:

$$P^{(1)} \triangleq P, \quad P^{(2)} \triangleq \{0, 1\} \times P,$$

$$M^{(1)} \triangleq [0, \vartheta] \times F, \quad M^{(2)} \triangleq \{\vartheta\} \times F;$$

для $x \in \mathbb{R}^n$, $v \in Q$, $u \in P^{(1)} = P$ положим

$$f^{(1)}(x,u,v) \triangleq f(x,u,v);$$

для $x \in \mathbb{R}^n$, $v \in Q$, $u \in P^{(2)}$, $u = (u_0, u')$, $u_0 \in \{0, 1\}$, $u' \in P$, положим

$$f^{(2)}(x,u,v) \triangleq u_0 f(x,u', v).$$

Обозначим $\mathfrak{W}^{(1)}$ множество успешной разрешимости задачи наведения системы (1) на $[0,\vartheta] \times F$, а $\mathfrak{W}^{(2)}$ — множество успешной разрешимости задачи наведения системы (2) на $\{\vartheta\} \times F$.

Для фиксированного $v \in Q$ рассмотрим управляемые v-системы:

$$\dot{x} = f_v^{(i)}(x,u) \triangleq f^{(i)}(x,u,v), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in P^{(i)},$$

на промежутке времени $[0,\vartheta]$ $(i = 1, 2)$. Введем, следуя [3, 15], множество всех обобщенных программных управлений первого игрока в i-й системе на промежутке времени $[t_*, \vartheta]$ — множество всех мер $[t_*, \vartheta] \times P^{(i)}$, согласованных с мерой Лебега на $[t_*, \vartheta]$. Обозначим это множество $\mathcal{R}_{t_*}^{(i)}$. Для каждого обобщенного программного управления $\mu^{(i)} \in \mathcal{R}_{t_*}^{(i)}$ и позиции (t_*, x_*) существует единственное решение уравнения

$$x(t) = x_* + \int\limits_{[t_*,\, t] \times P^{(i)}} f_v^{(i)}(x(\tau), u) \mu^{(i)}(d(\tau, u)).$$

Обозначим это решение $\varphi^{(i)}(\cdot, t_*, x_*, \mu^{(i)}, v)$.

Введем один из вариантов метода программных итераций [3, с. 233], [15]. Пусть $E \subset [0,\vartheta] \times \mathbb{R}^n$, E замкнуто, положим

$$A_v^{(i)}(E) \triangleq \{(t_*, x_*) \in E \colon \exists \mu^{(i)} \in \mathcal{R}_{t_*}^{(i)} \colon \ \exists \tau \in [t_*, \vartheta] \colon \ \varphi^{(i)}(\tau, t_*, x_*, \mu^{(i)}, v) \in M^{(i)}[\tau] \ \& \\ \forall t \in [t_*, \tau] \varphi^{(i)}(t, t_*, x_*, \mu^{(i)}, v) \in E[t]\}.$$

Здесь $E[t]$ обозначает сечение множества E, $E[t] \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n \colon (t, x) \in E\}$. Отметим, что $A_v^{(i)}(E)$ также замкнуто.

Положим

$$A^{(i)}(E) \triangleq \bigcap_{v \in Q} A_v^{(i)}(E).$$

Оператор $A^{(i)}$ называется оператором программного поглощения [3]. Построим последовательности множеств:

$$W_0^{(i)} \triangleq [0,\vartheta] \times \mathbb{R}^n, \quad W_k^{(i)} = A^{(i)}(W_{k-1}^{(i)}) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Известно [15], что

$$\mathfrak{W}^{(i)} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} W^{(i)}. \tag{3}$$

Теорема. Справедливы следующие утверждения:

1) $W_k^{(1)} = W_k^{(2)}$ для всех $k \in \mathbb{N}$;

2) задача наведения системы (1) на цилиндрическое множество $[0,\vartheta] \times F$ эквивалентна задаче наведения системы (2) на множество $\{\vartheta\} \times F$;

3) если система (1) удовлетворяет условию Айзекса, то и система (2) также удовлетворяет условию Айзекса.

Таким образом, даже линейная игра «к моменту» эквивалентна билинейной игре «в момент».

Понятие эквивалентности естественным образом распространяется на игры, в которых игроки стремятся минимизировать/максимизировать функционал платы. В этом случае будем называть две игры эквивалентными, если у них совпадают функции цены.

Следствие. Пусть динамика системы описывается уравнением (1) и первый (второй) игрок стремится минимизировать (максимизировать) функционал платы вида $\min_{t \in [0,\vartheta]} \omega(x(t))$ (предполагается, что функция ω непрерывна и удовлетворяет условию подлинейного роста). Тогда эта дифференциальная игра эквивалентна игре, в которой динамика системы описывается уравнением (2), с функционалом платы $\omega(x(\vartheta))$.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ ПРОГРАММНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ

Будем называть множество E невозрастающим по сечениям, если $E[t^*] \subset E[t_*]$ для всех t^*, $t_* \in [0,\vartheta]$ таких, что $t^* \geq t_*$.

Лемма 1. Если E — невозрастающее по сечениям замкнутое множество такое, что $[0,\vartheta] \times F \subset E$, то и $A^{(2)}(E)$ — невозрастающее по сечениям множество такое, что $[0,\vartheta] \times F \subset E$.

Доказательство. Пусть $(t^*, x_*) \in A^{(2)}(E)$. Докажем, что $(t_*, x_*) \in A^{(2)}(E)$ для $t_* \leq t^*$. Зафиксируем $v \in Q$. Существует $\mu \in \mathcal{R}_{t^*}^{(2)}$ такое, что $\varphi^{(2)}(\vartheta, t^*, x_*, \mu, v) \in F$ и для всех $t \in [t^*, \vartheta]$ $\varphi^{(2)}(t, t^*, x_*, \mu, v) \in E[t]$.

Определим обобщенное управление σ во второй системе, соответствующее обычному управлению $u_0 = 0$. Пусть $\hat{u} = (0, u_1, \ldots u_p)$, где $(u_1, \ldots u_p)$ — произвольный элемент P. Положим для каждого измеримого множества $R \subset [0,\vartheta] \times P$

$$\sigma(R) = \lambda\{t\colon (t, \hat{u}) \in R\}, \tag{4}$$

где λ — мера Лебега на $[0,\vartheta]$. Определим меру $\hat{\mu}$ на $[t_*, \vartheta] \times P^{(2)}$ по правилу: каждому измеримому $R \subset [t_*, \vartheta] \times P^{(2)}$ сопоставим

$$\hat{\mu}(R) \triangleq \sigma(R \cap ([t_*, t^*) \times P^{(2)})) + \mu(R \cap ([t^*, \vartheta] \times P^{(2)})).$$

Заметим, что $\varphi^{(2)}(t, t_*, x_*, \hat{\mu}, v) = x_*$ при $t \in [t_*, t^*]$ и $\varphi^{(2)}(t, t_*, x_*, \hat{\mu}, v) = \varphi^{(2)}(t, t^*, x_*, \mu, v)$ при $t \in [t^*, \vartheta]$. Следовательно,

$$\varphi^{(2)}(v, t_*, x_*, \hat{\mu}, v) = \varphi^{(2)}(v, t^*, x_*, \mu, v) \in F,$$

$$\varphi^{(2)}(t, t_*, x_*, \hat{\mu}, v) = \varphi^{(2)}(t, t^*, x_*, \mu, v) \in E[t] \quad \text{для } t \in [t^*, \vartheta],$$

$$\varphi^{(2)}(t, t_*, x_*, \hat{\mu}, v) = x_* \in E[t^*] \subset E[t] \text{ для } t \in [t_*, t^*],$$

поскольку E не возрастает по сечениям. Таким образом, $(t_*, x_*) \in A_v^{(2)}(E)$ для каждого $v \in Q$. Отсюда имеем $(t_*, x_*) \in A^{(2)}(E)$.

Также, если $[0,\vartheta] \times F \subset E$, то и $[0,\vartheta] \times F \subset E^{(2)}$. В самом деле, если $(t_*, x_*) \in [0,\vartheta] \times F$, то для любого $v \in Q$ $\varphi^{(2)}(t, t_*, x_*, \sigma, v) = x_* \in F \subset E[t]$. □

Кроме обобщенных управлений введем и программные управления в i-й v-системе на отрезке $[t_*, \vartheta]$ измеримые функции

$$\mathbf{u}^{(i)}\colon\ [t_*, \vartheta] \to P^{(i)}.$$

Для каждого программного управления $\mathbf{u}^{(i)}(\cdot)$ и позиции (t_*, x_*) существует единственное решение каждого из уравнений

$$\dot{x} = f_v^{(i)}(x, \mathbf{u}^{(i)}(\cdot))$$

с начальными данными $x(t_*) = x_*$. Обозначим это решение $x^{(i)}(\cdot, t_*, x_*, \mathbf{u}^{(i)}(\cdot), v)$. Заметим, что множество обычных программных управлений вкладывается во множество обобщенных программных управлений оператором, ставящим в соответствие $\mathbf{u}^{(i)}(\cdot)$ обобщенное управление $\mu^{(i)}_{\mathbf{u}^{(i)}(\cdot)}$ по правилу

$$\mu^{(i)}_{\mathbf{u}^{(i)}(\cdot)}(R) \triangleq \lambda\{t\colon (t, \mathbf{u}^{(i)}(t)) \in R\},$$

где λ — мера Лебега на $[0, \vartheta]$.

Из правила экстремального сдвига следует, что для всякого обобщенного управления $\mu^{(i)} \in \mathcal{R}^{(i)}_{t_*}$ и любой позиции (t_*, x_*) существует последовательность кусочно-постоянных непрерывных справа программных управлений $\mathbf{u}^{(i)}_k(\cdot)$ такая, что $x^{(i)}(\cdot, t_*, x_*, \mathbf{u}^{(i)}_k(\cdot), v)$ сходится к $\varphi^{(i)}(\cdot, t_*, x_*, \mu^{(i)}, v)$ равномерно на $[t_*, \vartheta]$ [16].

Пусть $u \in P^{(i)}$ $(i = 1, 2)$, $v \in Q$, $\tau \geq 0$, обозначим $S^{(i),\tau}_{u,v}(x)$ отображение сдвига за время τ по траектории, выходящей из позиции $(0, x)$, порожденной постоянными управлениями u и v в i-й системе,

$$S^{(i),\tau}_{u,v}(x) \triangleq x^{(i)}(\tau, 0, x, u, v).$$

Поскольку рассматриваемые системы автономны, имеем

$$S^{(i),\tau}_{u,v}(x) = x^{(i)}(\tau + t, t, x, u, v) \quad \forall t \in [0, +\infty).$$

Заметим, что для всех $v \in Q$, $\tau > 0$ справедливы следующие свойства:

1) если $u \in P^{(2)}$ и $u = (0, u_1, \ldots, u_p)$, то

$$S^{(2),\tau}_{u,v} = I,$$

где I — тождественное отображение на $\mathbb{R}^n$;

2) если $u \in P^{(2)}$ и $u = (1, u_1, \ldots, u_p)$, то

$$S^{(2),\tau}_{u,v} = S^{(1),\tau}_{u',v},$$

где $u' \triangleq (u_1, \ldots, u_p) \in P^{(1)}$.

Зафиксируем $v \in Q$. Пусть $\mathbf{u}^{(i)}(\cdot)$ — некоторое кусочно-постоянная, непрерывная справа функция из $[t_*, t^*]$ в $P^{(i)}$. Обозначим Δ набор положительных чисел $\{\delta^k\}_{k=1}^m$ таких, что если $\zeta^0 = t_*$, $\zeta^k = \zeta^{k-1} + \delta^k$, $k = \overline{1, m}$, $\zeta^m = t^*$, то значение $\mathbf{u}^{(i)}(\cdot)$ на $[\zeta^{k-1}, \zeta^k)$ постоянно и равно u^k. В этом случае для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ справедливо равенство

$$x^{(i)}(t^*, t_*, x_0, \mathbf{u}^{(i)}(\cdot), v) = S^{(i),\delta^m}_{u^m, v} \circ \ldots \circ S^{(i),\delta^1}_{u^1, v}(x_0). \tag{5}$$

Рассмотрим некоторое кусочно-постоянное, непрерывное справа управление во второй системе $\mathbf{u}^{(2)}(\cdot)$. Как и в общем случае, обозначим $\Delta = \{\delta^k\}_{k=1}^m$ набор положительных чисел таких, что если $\zeta^0 = t_*$, $\zeta^k = \zeta^{k-1} + \delta^k$, $k = \overline{1, m}$, и $\zeta^m = \vartheta$, то $\mathbf{u}^{(2)}(t) = u^k = (u^k_0, u^k_1, \ldots, u^k_p)$, $t \in [\zeta^{k-1}, \zeta^k)$, $k = \overline{1, m}$.

Построим управление по заданной функции $\mathbf{u}^{(2)}$ в первой системе следующим образом. Выберем те номера k_j, для которых $u^{k_j}_0 = 1$, в результате получим набор номеров

$$J \triangleq \{k \in \Delta\colon u^k_0 = 1\} = \{k_1, \ldots, k_r\}.$$

Пусть $\gamma^0 = t_*$, $\gamma^j = \gamma^{j-1} + \delta^{k_j}$, $j = \overline{1, r}$. Обозначим

$$\tau \triangleq \gamma^{j_r}. \tag{6}$$

Определим функцию

$$\mathbf{u}^{(1)}(t) \triangleq \begin{cases} (u_1^{k_j}, \ldots, u_p^{k_j}), & t \in [\gamma^{j-1}, \gamma^j), \\ \widetilde{u}, & t \in [\tau, \vartheta], \end{cases} \tag{7}$$

где $\widetilde{u}$ — произвольный элемент P. Обозначим $\kappa^j \triangleq (u_1^{k_j}, \ldots, u_p^{k_j})$.

Определим отображение $\theta(\cdot): [t_*, \tau] \to [t_*, \vartheta]$ по правилу

$$\theta(t) \triangleq \zeta^{k_j - 1} + (t - \gamma^{j-1}) \text{ при } t \in [\gamma^{j-1}, \gamma^j), \quad \theta(\tau) \triangleq \vartheta. \tag{8}$$

Отображение θ «добавляет» те промежутки времени, которые были вырезаны при определении $\mathbf{u}^{(1)}$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. Для всех $v \in Q$, $x_* \in \mathbb{R}^n$, $t_* \in [0, \vartheta]$ и кусочно-постоянных непрерывных справа функций $\mathbf{u}^{(2)}(\cdot): [t_*, \vartheta] \to P^{(2)}$ справедливо равенство

$$x^{(1)}(t, t_*, x_*, \mathbf{u}^{(1)}(\cdot), v) = x^{(2)}(\theta(t), t_*, x_*, \mathbf{u}^{(2)}(\cdot), v) \quad \forall t \in [t_*, \tau].$$

Здесь функция $\mathbf{u}^{(1)}(\cdot)$ определена в (7), функция $\theta(\cdot)$ — в (8).

Доказательство. Зафиксируем $t \in [t_*, \tau]$. Существует j такое, что $t \in [\gamma^{j-1}, \gamma^j)$. Следовательно (см. (8)), $\theta(t) \in [\zeta^{k_{j-1}}, \zeta^{k_j})$. Управление $\mathbf{u}^{(2)}(\cdot)$ постоянно на полуинтервалах $[\zeta^{l-1}, \zeta^l)$, $l = \overline{1, k_j - 1}$, и полуинтервале $[\zeta^{k_{j-1}}, \theta(t))$. Тогда имеем (см. (5) для $i = 2$)

$$x^{(2)}(\theta(t), t_*, x_*, \mathbf{u}^{(2)}(\cdot), v) = S^{(2), \theta(t) - \zeta^{k_{j-1}}}_{u^{k_j}, v} \circ S^{(2), \delta^{k_j - 1}}_{u^{k_j - 1}, v} \circ \ldots \circ S^{(2), \delta^1}_{u^1, v}(x_*).$$

Получаем (см. свойство 1) $S^{(2), \delta^l}_{u^l, v} = I$ для всех $l \notin J$. Отсюда имеем

$$x^{(2)}(\theta(t), t_*, x_*, \mathbf{u}^{(2)}(\cdot), v) = S^{(2), \theta(t) - \zeta^{k_{j-1}}}_{u^{k_j}, v} \circ S^{(2), \delta^{k_{j-1}}}_{u^{k_{j-1}}, v} \circ \ldots \circ S^{(2), \delta^{k_1}}_{u^{k_1}, v}(x_*).$$

Поскольку $u^{k_j} = (1, u_1^{k_j}, \ldots, u_p^{k_j})$, из свойства 2 следует

$$x^{(2)}(\theta(t), t_*, x_*, \mathbf{u}^{(2)}(\cdot), v) = S^{(1), t - \gamma^{j-1}}_{\kappa^j, v} \circ S^{(1), \delta^{k_{j-1}}}_{\kappa^{j-1}, v} \ldots \circ S^{(1), \delta^{k_1}}_{\kappa^1, v}(x_*).$$

Здесь воспользовались равенством $\theta(t) - \zeta^{k_{j-1}} = t - \gamma^{j-1}$ (см. (8)). Из (5) для $i = 1$ получаем

$$x^{(1)}(t, t_*, x_*, \mathbf{u}^{(1)}(\cdot), v) = S^{(1), t - \gamma^{j-1}}_{\kappa^j, v} \circ S^{(1), \delta^{k_{j-1}}}_{\kappa^{j-1}, v} \circ \ldots \circ S^{(1), \delta^{k_1}}_{\kappa^1, v}(x_*).$$

Отсюда следует утверждение леммы. □

Сравним образы двух рассматриваемых операторов программного поглощения.

Лемма 3. Пусть E — замкнутое множество, невозрастающее по сечениям, $[0, \vartheta] \times F \subset E$. Тогда $A^{(1)}(E) = A^{(2)}(E)$.

Доказательство. Докажем вначале вложение $A^{(1)}(E) \subset A^{(2)}(E)$. Пусть $(t_*, x_*) \in A^{(1)}(E)$. Тогда для каждого $v \in Q$ существует обобщенное управление

$\mu^{(1)} \in \mathcal{R}_{t_*}^{(1)}$ со свойством: существует $\tau \in [t_*, \vartheta]$ такое, что $\varphi^{(1)}(\tau, t_*, x_*, \mu^{(1)}, \upsilon) \in F$ и $\varphi^{(1)}(t, t_*, x_*, \mu^{(1)}, \upsilon) \in E[t]$, $t \in [t_*, \tau]$. Определим $\mu^{(2)} \in \Pi^{(2)}$ следующим образом: если $R \subset [t_*, \vartheta] \times P^{(2)} = [t_*, \vartheta] \times \{0,1\} \times P$, то

$$\mu^{(2)}(R) \triangleq \mu^{(1)}(\{(t, u'): \ t \in [t_*, \tau], \quad u' \in P, \quad (t, 1, u') \in R\}) + \sigma(R \cap ((\tau, \vartheta] \times \{0,1\} \times P)).$$

Мера σ определена в доказательстве леммы 1 (см. (4)).

Заметим, что

$$\varphi^{(2)}(t, t_*, x_*, \mu^{(2)}, \upsilon) = \varphi^{(1)}(t, t_*, x_*, \mu^{(1)}, \upsilon) \text{ при } t \in [t_*, \tau],$$

$$\varphi^{(2)}(t, t_*, x_*, \mu^{(2)}, \upsilon) = \varphi^{(2)}(\tau, t_*, x_*, \mu^{(2)}, \upsilon) \in F \quad \text{при} \quad t \in [\tau, \vartheta].$$

Следовательно, поскольку $F \subset E[t]$, $t \in [0, \vartheta]$, имеем $(t_*, x_*) \in A_\upsilon^{(2)}(E)$. В силу произвольности υ имеем $(t_*, x_*) \in A^{(2)}(E)$ для всех $(t_*, x_*) \in A^{(1)}(E)$.

Докажем обратное вложение. Пусть $(t_*, x_*) \in A^{(2)}(E)$. Следовательно, для каждого $\upsilon \in Q$ существует $\mu^{(2)} \in \mathcal{R}_{t_*}^{(2)}$ со свойством: $\varphi^{(2)}(\vartheta, t_*, x_*, \mu^{(2)}, \upsilon) \in F$ и $\varphi^{(2)}(t, t_*, x_*, \mu^{(2)}, \upsilon) \in E[t]$ для всех $t \in [t_*, \vartheta]$. Пусть $\{\mathbf{u}_k^{(2)}(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность кусочно-постоянных программных управлений такая, что последовательность траекторий $x^{(2)}(\cdot, t_*, x_*, \mathbf{u}^{(2)}(\cdot), \upsilon)$ сходится к $\varphi^{(2)}(\cdot, t_*, x_*, \mu^{(2)}, \upsilon)$. Для каждого k определены моменты τ_k и функции $\mathbf{u}_k^{(1)}(\cdot)$, $\theta_k(\cdot)$ (см. (6)–(8)). По определению функций $\theta_k(\cdot)$ и лемме 2

$$x^{(1)}(t, t_*, x_*, \mathbf{u}_k^{(1)}(\cdot), \upsilon) = x^{(2)}(\theta_k(t), t_*, x_*, \mathbf{u}_k^{(2)}(\cdot), \upsilon), \quad t \in [t_*, \tau_k], \tag{9}$$

при этом

$$\theta_k(\tau_k) = \vartheta. \tag{10}$$

Пусть

$$\varepsilon_k \triangleq \max_{t \in [t_*, \vartheta]} ||x^{(2)}(t, t_*, x_*, \mathbf{u}_k^{(2)}(\cdot), \upsilon) - \varphi^{(2)}(t, t_*, x_*, \mu^{(2)}, \upsilon)||. \tag{11}$$

Из (9) и (10) следует

$$\varepsilon_k \to 0, \quad k \to \infty. \tag{12}$$

Поскольку

$$\varphi^{(2)}(\vartheta, t_*, x_*, \mu^{(2)}, \upsilon) \in F,$$

$$\varphi^{(2)}(t, t_*, x_*, \mu^{(2)}, \upsilon) \in E[t] \quad \forall t \in [t_*, \vartheta],$$

E — множество, невозрастающее по сечениям, такое, что $F \subset E[t]$ для всех $t \in [0, \vartheta]$, имеем

$$d(x^{(1)}(\tau_k, t_*, x_*, \mathbf{u}_k^{(1)}(\cdot), \upsilon), F) \le \varepsilon_k, \tag{13}$$

$$d(x^{(1)}(t, t_*, x_*, \mathbf{u}_k^{(1)}(\cdot), \upsilon), E[t]) \le \varepsilon_k, \quad t \in [t_*, \tau_k]. \tag{14}$$

Здесь $d(x, A)$ — расстояние от точки $x \in \mathbb{R}^n$ до множества $A \subset \mathbb{R}^n$.

Существуют последовательность $\{k_l\}_{l=1}^{\infty}$ и $\hat{\tau} \in [t_*, \vartheta]$ такие, что $\{\tau_{k_l}\}$ сходится к $\hat{\tau}$. Без ограничения общности можно считать, что $\{\tau_k\}$ само сходится к $\hat{\tau}$. Обозначим

$\mu^{(1)}$ слабый предел некоторой подпоследовательности последовательности $\mu^{(1)}_{\mathbf{u}_k^{(1)}}$. Из (9), (11) (12), (13) и (14) получаем вложения:

$$\varphi^{(1)}(\hat{\tau}, t_*, x_*, \mu^{(1)}, v) \in F,$$

$$\varphi^{(1)}(\hat{\tau}, t_*, x_*, \mu^{(1)}, v) \in E[t], \quad t \in [t_*, \hat{\tau}].$$

Следовательно, $(t_*, x_*) \in A_v^{(1)}(E)$. Поскольку выбор $v \in Q$ был произвольным, имеем $(t_*, x_*) \in A^{(1)}(E)$ для всех $(t_*, x_*) \in A^{(2)}(E)$. □

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОГО УТВЕРЖДЕНИЯ

Утверждение 1 теоремы вытекает из лемм 1 и 3 в силу того, что $[0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ — множество, невозрастающее по сечениям. Утверждение 2 теоремы следует из предыдущего в силу (3).

Доказательство утверждения 3 теоремы. По условию для всех $s, x \in \mathbb{R}^n$

$$\max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle s, f(x,u,v) \rangle = \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle s, f(x,u,v) \rangle.$$

Докажем, что

$$\max_{v \in Q} \min_{u_0 \in \{0,1\}, u \in P} \langle s, u_0 f(x,u,v) \rangle = \min_{u_0 \in \{0,1\}, u \in P} \max_{v \in Q} \langle s, u_0 f(x,u,v) \rangle. \tag{15}$$

Вначале рассмотрим случай, когда $\max\limits_{v \in Q} \min\limits_{u \in P} \langle s, f(x,u,v) \rangle \le 0$, тогда для всех $v \in Q$ имеем $\min\limits_{u \in P} \langle s, f(x,u,v) \rangle \le 0$, откуда для всех $v \in Q$

$$\min_{u_0 \in \{0,1\},\, u \in P} \langle s, u_0 f(x,u,v) \rangle = \min_{u \in P} \langle s, f(x,u,v) \rangle.$$

Следовательно,

$$\max_{v \in Q} \min_{u_0 \in \{0,1\},\, u \in P} \langle s, u_0 f(x,u,v) \rangle = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle s, f(x,u,v) \rangle,$$

$$\max_{v \in Q} \langle s, u_0 f(x,u,v) \rangle = \begin{cases} 0, & u_0 = 0; \\ \max\limits_{v \in Q} \langle s, f(x,u,v) \rangle, & u_0 = 1. \end{cases} \tag{16}$$

С учетом условия отрицательности $\min\limits_{u \in P} \max\limits_{v \in Q} \langle s, f(x,u,v) \rangle$ получаем

$$\min_{u_0 \in \{0,1\},\, u \in P} \max_{v \in Q} \langle s, u_0 f(x,u,v) \rangle = \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle s, f(x,u,v) \rangle.$$

Следовательно, для случая $\max\limits_{v \in Q} \min\limits_{u \in P} \langle s, f(x,u,v) \rangle \le 0$ равенство (15) доказано.

Пусть теперь

$$\max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle s, f(x,u,v) \rangle \ge 0.$$

Для v, при которых $\min\limits_{u \in P} \langle s, f(x,u,v) \rangle \ge 0$, имеем

$$\min_{u_0 \in \{0,1\}, u \in P} \langle s, u_0 f(x,u,v) \rangle = 0.$$

Отсюда $\max\limits_{v \in Q} \min\limits_{u_0 \in \{0,1\},\, u \in P} \langle s, u_0 f(x,u,v) \rangle = 0$.

Также для всех $u \in P$ имеем $\max\limits_{v \in Q} \langle\!\langle s, f(x,u,v) \rangle\!\rangle \geq 0$. Из представления (16) получаем

$$\min_{u_0 \in \{0,1\},\, u \in P} \ \max_{v \in Q} \langle\!\langle s, u_0 f(x,u,v) \rangle\!\rangle = 0 = \max_{v \in Q} \ \min_{u_0 \in \{0,1\},\, u \in P} \langle\!\langle s, u_0 f(x,u,v) \rangle\!\rangle.$$

□

Доказательство следствия. Для каждого $c > 0$ рассмотрим множество $F_c \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n \colon \omega(x) \leq c\}$. Тогда для каждого $c > 0$ задача наведения системы (1) на множество $[0, \vartheta] \times F_c$ эквивалентна задаче наведения системы (2) на множество $\{\vartheta\} \times F_c$.

Зафиксируем позицию (t_0, x_0), существует $\gamma = \gamma(t_0, x_0)$ — нижняя грань тех c, при которых задача наведения (1) на $[0, \vartheta] \times F_c$ разрешима. Из эквивалентности задачи наведения системы (1) на множество $[0, \vartheta] \times F_c$ и задачи наведения системы (2) на множество $\{\vartheta\} \times F_c$ следует, что γ — нижняя грань тех c, при которых задача наведения (2) на $\{\vartheta\} \times F_c$ разрешима. Таким образом, функции цены в обеих задачах совпадают. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Альтернатива для игровой задачи движения // Прикл. математика и механика. — 1970. — **34**, № 6. — С. 1005–1022.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974. — 455 с.
3. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. — М.: Наука, 1981. — 288 с.
4. Ченцов А.Г. О структуре одной игровой задачи сближения // ДАН СССР. — 1975. — **224**, № 6. — С. 1272–1275.
5. Ченцов А.Г. Об игровой задаче сближения в заданный момент времени // Мат. сб. — 1976. — **99**, № 3. — С. 394–420.
6. Ченцов А.Г. К игровой задаче наведения // ДАН СССР. — 1976. — **226**, № 1. — С. 73–76.
7. Чистяков С.В. К решению игровых задач преследования // Прикл. математика и механика. — 1977 — **41**, № 5. — С. 825–832.
8. Меликян А.А. Цена игры в линейной дифференциальной игре сближения // ДАН СССР. — 1977. — **237**, № 3. — С. 521–524.
9. Ухоботов В.И. Построение стабильного моста для одного класса линейных игр // Прикл. математика и механика. — 1977. — **41**, № 2. — С. 358–364.
10. Субботин А.И. Обобщенные решения дифференциальных уравнений 1-го порядка. — Ижевск: РХД, 2003. — 336 с.
11. Субботин А.И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби. — М.: Наука, 1991. — 214 с.
12. Пшеничный Б.Н., Сагайдак М.И. О дифференциальных играх с фиксированным временем // Кибернетика. — 1970. — № 2. — С. 54–63.
13. Mitchel I.M., Bayen A.M., Tomlin C.J. A time-depend Hamilton-Jacobi formulation of reachable sets for continuous dynamic games // IEEE Trans. Autom. Control. — 2005. — **50**, N 7. — P. 947–957.
14. Аграчев А.А., Сачков Ю.Л. Геометрическая теория управления.— М.: Физматлит, 2005. — 392 с.
15. Ченцов А.Г. Метод программных итераций для дифференциальной игры сближения-уклонения. — Свердловск, 1973. — 103 с. — Деп. в ВИНИТИ, № 1933-79Деп.
16. Красовский Н.Н. Дифференциальная игра сближения-уклонения — I // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1973.— № 2. — С. 3–18.

Поступила 14.12.2006