

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В КОМПОЗИТНЫХ СРЕДАХ

Ключевые слова: компьютерное моделирование, динамические задачи, нелинейные колебания, многокомпонентные среды, композиты, межфазовое взаимодействие.

Широкий класс прикладных проблем в области физики, механики, техники и других наук связан с исследованием распространения волн в неоднородных средах. Результаты многочисленных экспериментов свидетельствуют о том, что развитие колебательных процессов в таких средах в значительной степени зависит от неоднородности исследуемого объекта. Эта неоднородность может быть обусловлена как конструктивными особенностями, так и наличием в среде посторонних включений, примесей, пустот и т.п. К таким средам относятся композитные материалы, состоящие из нескольких компонент с различными физико-механическими свойствами.

Важным направлением в современной механике является механика межфазного взаимодействия в композитных материалах. Механика межфазных слоев, как область механики композитов, достигла значительных результатов за последние тридцать лет. Первые работы зарубежных исследователей в этом направлении были проиллюстрированы значительными достижениями отечественного материаловедения и механики деформируемого твердого тела. Это касается прежде всего мало известных, однако достаточно оригинальных на сегодняшний день научных достижений по программе «Буран».

Обзор достижений механики межфазного взаимодействия последних трех десятилетий достаточно подробно изложен в [1]. Впервые построена модель взаимодействия между компонентами композитного материала, которая адекватна реальной технологической схеме. Эта модель учитывает наличие промежуточного (межфазного переходного) слоя достаточной малой толщины, образующегося в результате многостадийных (сложных) химических реакций, диффузии и растворения, которые возможны на границах раздела компонентов. Физико-механические характеристики такого межфазного образования значительно отличаются от характеристик контактирующих компонент композитного материала. Данный слой играет роль фактора передачи напряжений от одной фазы композитной системы к другой и обеспечивает прочность и монолитность материала в целом. Наличие указанного межфазного образования будет проявляться при протекании любых процессов в композитных материалах, в том числе и колебательных.

Большинство существующих на данный момент исследований колебаний композитных материалов выполняются в предположении отсутствия границы раздела фаз или ее нулевой толщине. В связи с этим возникает необходимость проведения исследований с учетом существования межфазного образования на границах раздела компонентов и изучения его влияния на развитие механических процессов в композитном материале. Для количественной оценки указанных процессов необходимо осуществить соответствующее математическое и компьютерное моделирование.

С учетом реальных условий создания и эксплуатации композитных материалов необходимо исследование и численная реализация соответствующих нелинейных моделей. Глубокое исследование таких задач невозможно осуществить, не используя методы функционального анализа и вычислительной математики. Ввиду чрезвычайной сложности неоднородных и нелинейных задач в большинстве случаев недостаточно ограничиться методами их теоретического математического исследования. Такие нелинейные нестационарные краевые задачи наиболее эффективно исследовать численными методами с использованием современных компьютерных технологий. Поскольку для нелинейных задач провести практические эксперименты достаточно сложно (а иногда и невозможно), то единственным средством расчета, прогнозирования поведения или уточнения начальной модели является численное моделирование.

На важность и возможность исследований нелинейных динамических задач впервые обратил внимание Ж.-Л. Лионс [2]. Он предложил достаточно общий подход с применением методов функционального анализа. В частности, рассматривается начально-краевая задача

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + a_1 \Delta^2 u_1 - [u_1, u_2] = f, \quad (1)$$

$$a_2 \Delta^2 u_2 - [u_1, u_1] = 0 \quad (2)$$

в области $\Omega \times [0, T]$ с граничными условиями

$$u_1, \frac{\partial u_1}{\partial n} = 0, \quad u_2, \frac{\partial u_2}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \quad (3)$$

и начальными условиями

$$u(x, 0) = u_{01}(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_{11}(x). \quad (4)$$

Эта плоская задача нелинейного изгиба мембраны представляет частный случай более общей задачи изгиба оболочки (пластины), т.е. неизвестной искомой функцией является $\Phi(u_1, u_2, w, t)$, где $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ — компоненты деформаций в направлении осей Ox_1 и Ox_2 соответственно; $w(x, t)$ — функция прогиба при рассмотрении задачи о колебании оболочки (пластины); $x = (x_1, x_2) \in \Omega$; Ω — область, занятая мембраной или пластиной; $\partial\Omega$ — границы этой области; $f(x, t) = f$ — функция внешних усилий; a_1, a_2 — положительные постоянные величины; u_{01}, u_{11} — наперед заданные функции; t и $[0, T]$ — время и интервал изменения времени; $[u_1, u_2] = D_1^2 u_1 \cdot D_2^2 u_2 + D_2^2 u_1 \cdot D_1^2 u_2 - 2D_1 D_2 u_1 \cdot D_1 D_2 u_2$ (где $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$) — оператор, определяющий нелинейность краевой задачи.

Для такой начально-краевой задачи сформулирована теорема о существовании и единственности решения в соболевских пространствах. Доказательство теоремы проводится путем построения приближенного решения с помощью метода Бубнова–Галеркина, получения априорных оценок и доказательства существования последовательности приближенных решений, сходящейся к точному решению задачи.

Необходимо заметить, что такой подход был ранее предложен И.И. Ворovichem [3] при рассмотрении задачи о нелинейных колебаниях полой оболочки. Нелинейные колебания тонких пластин исследовались также Н.Ф. Морозовым [4].

Очевидно, что все вышеупомянутые задачи рассматривались только для изотропных материалов. В рассмотренных моделях никакие неоднородности не учитывались. Поэтому для поставленной в начале настоящей статьи задачи все

подходы, рассмотренные в упомянутых литературных источниках, не могут быть использованы.

Новые дифференциальные математические модели динамического равновесия неоднородных сред с учетом произвольно ориентированных тонких включений впервые построены в [5]. Данные модели относятся к принципиально новому классу задач с разрывными решениями, в которых влияние тонких включений учитывается с помощью условий сопряжения. В частности, авторами [5] рассматривается неоднородная начально-краевая (но линейная) задача динамического равновесия двух областей: Ω_1 и Ω_2 , соединенных кривой разреза,

$$\begin{aligned} \mu_i \Delta u_1 + (\lambda_i + \mu_i) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + f_1(x, t) &= \rho_i \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\ \mu_i \Delta u_2 + (\lambda_i + \mu_i) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + f_2(x, t) &= \rho_i \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (5)$$

где μ_i, λ_i — упругие постоянные, ρ_i — плотность материала соответствующей области. Кроме традиционного задания краевых и начальных условий учитываются неоднородные условия сопряжения неидеального контакта.

Для операторной формы системы уравнений (5) в [5] строятся соответствующие интегральные соотношения, которые дополняются с учетом краевых и начальных условий. Вводится понятие обобщенного решения, устанавливается существование единственного разрывного решения начально-краевой задачи. На основе использования классов разрывных функций метода конечных элементов (МКЭ) разработаны вычислительные схемы повышенного порядка точности дискретизации указанной задачи.

Стремление к более полному моделированию колебаний композитных материалов и элементов конструкций из них, выявление и изучение трехмерных эффектов в таких телах приводит к необходимости исследования динамических задач в пространственной постановке. Решение таких задач математическими методами сопряжено со значительными трудностями, обусловленными неоднородностью материала, сложностью системы исходных дифференциальных уравнений в частных производных и краевых условий на граничных поверхностях. Поэтому актуальной является реализация трехмерных нестационарных задач с помощью численных методов, позволяющих получать решения таких задач с достаточно высокой степенью точности. Возможности современной компьютерной техники, развитие суперкомпьютерных вычислений [6] позволяют осуществлять моделирование сложных пространственных динамических задач, содержащих в себе большие объемы данных. Эффективность решения указанных задач часто достигается с помощью параллельных вычислений [6].

В работе [7] исследованы трехмерные динамические задачи современными математическими и компьютерными методами. Рассмотрены эффективные численные методы решения указанных задач. С помощью разработанных методов исследованы колебания анизотропных неоднородных упругих цилиндров с круговым и некруговым поперечным сечением.

Подход, описанный в [5, 7], по нашему мнению, является наиболее глубоким и современным. Новую теоретическую платформу информационных технологий исследования процессов в неоднородных средах составляют построенные новые математические модели с условиями сопряжения, описывающие процессы в многокомпонентных средах; полученные классические обобщенные задачи, определенные на классах разрывных функций; методика и вычислительные алгоритмы построения приближенных решений на основе МКЭ. Примером програм-

мною реализацией данной теоретической платформы является автоматизированная система НАДРА-3Д, предназначенная для моделирования процессов в трехмерных многокомпонентных телах с произвольно расположенными в пространстве тонкими включениями или трещинами [8]. В дальнейшем изложении будем придерживаться предложенной в работах [5, 7] схемы исследований.

В настоящей статье рассматривается нелинейная нестационарная начально-краевая задача для кусочно-неоднородной области $\Omega_T = \bigcup_{i=1}^n \Omega^{(i)} \times [0, T]$, где

$\Omega^{(i)}$ — неоднородные подобласти трехмерной (двумерной) области Ω ; $[0, T]$ — промежуток изменения времени колебаний t . Такие подобласти $\Omega^{(i)}$ будут трактоваться в дальнейшем как представительские элементы некоторой композитной системы, имеющей армирующую компоненту $F^{(j)}$, которая соединяется с матричным материалом $M^{(j)}$ посредством межфазного переходного слоя $S_{FM}^{(j)}$.

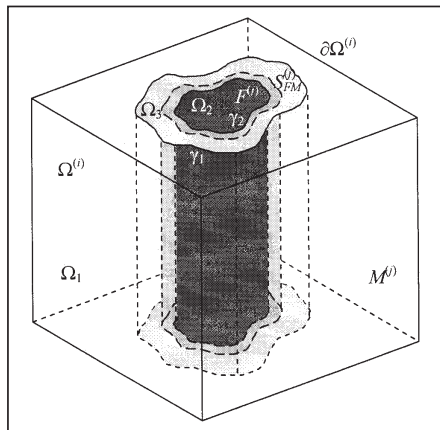


Рис. 1. Схема объемного представительского элемента композитной системы

Вся область Ω ограничена границей $\partial\Omega$, соответственно каждая подобласть имеет свою границу $\partial\Omega^{(i)}$. Заметим, что на каждой подобласти могут задаваться условия сопряжения, например, армирующей компоненты $F^{(j)}$ с межфазным образованием $S_{FM}^{(j)}$ и элемента матричного материала $M^{(j)}$ с $S_{FM}^{(j)}$ ($j=1, 2, \dots, m$) (рис. 1).

Следует отметить, что вследствие разбиения области Ω отдельные подобласти $\Omega^{(i)}$ будут иметь различные краевые условия. Это касается, в частности, подобластей, которые располагаются вдоль границы $\partial\Omega$ области Ω . Что касается подобластей, расположенных внутри области, то на их границах $\partial\Omega^{(i)}$ совершенно естественно задать краевые условия жесткого сцепления, например (3). Кроме того, выполненное разбиение может содержать подобласти, не имеющие в качестве включения армирующую компоненту F . Поэтому будем считать, что количество подобластей $\Omega^{(i)}$ ($i=1, 2, \dots, n$) не совпадает с числом межфазных слоев $S_{FM}^{(j)}$ ($j=1, 2, \dots, m$). Компьютерно-математическое моделирование в дальнейшем будет проводиться для подобластей, изображенных на рис. 1.

Таким образом, операторные уравнения описанных выше начально-краевых задач можно представить в виде [9]

$$Lu = (P^{(2)}u + \rho u_{tt}, l_1 u, l_2 u, Su, T_1 u, T_2 u) = (f, \varphi_1, \varphi_2, u_{01}, u_{11}) \quad (6)$$

или для оболочки (пластины)

$$Pw = (P^{(4)}w + \rho h w_{tt}, q_1 w, q_2 w, Sw, T_1 w, T_2 w) = (Nw, m_1 w, m_2 w, w_{01}, w_{11}). \quad (7)$$

В приведенных операторных уравнениях $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))$ — вектор перемещений, u_1, u_2, u_3 — его проекции на соответствующие координатные оси Ox_1, Ox_2, Ox_3 ; $w(x, t)$ — функция прогиба при рассмотрении задачи

о колебании оболочки (пластины); $P^{(2)}$ и $P^{(4)}$ — соответственно гармонический и бигармонический операторы; l_1, l_2, q_1, q_2 — операторы краевых условий; $\varphi_1, \varphi_2, m_1 w, m_2 w$ — значения этих операторов; T_1, T_2, w_{01}, w_{11} — операторы начальных условий и их значения; S — оператор условий сопряжения; f, Nw — линейный (для мембранной аналогии) и нелинейный (для оболочки (пластины)) операторы правых частей уравнений равновесия.

Все выкладки из [5] полностью переносятся на операторное уравнение (6). Это касается постановки обобщенной задачи, ее приближенного решения, сходимости таких приближенных решений, их оценок в терминах соболевских пространств и численной реализации МКЭ.

Построением интегрального тождества, которое соответствует операторному уравнению (7), вводится понятие обобщенного решения $w \in W_m^2(\Omega)$ для $\forall \eta \in W_m^2(\Omega)$ ($m \geq 2$). Дифференциальные свойства соответствующих краевых задач исследуются в соболевских пространствах $W_m^4(\Omega)$. Оценивая коэффициенты нелинейных составляющих операторного уравнения (7), можно получить соответствующие энергетические неравенства. Из этих неравенств будет вытекать корректность постановок исследуемых нелинейных нестационарных краевых задач в соболевских пространствах $W_m^{4+l}(\Omega)$ ($l \geq 0$).

Приведем результаты численной реализации поставленной выше нелинейной нестационарной начально-краевой задачи для представительского элемента композитной среды.

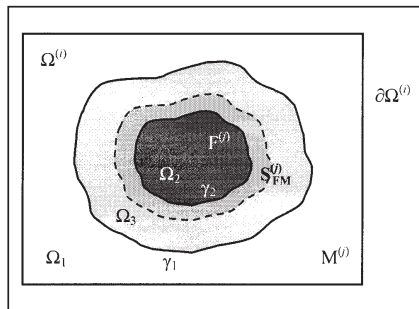


Рис. 2. Схема двумерного представительского элемента композитного материала

Численные исследования проводились для волокнистого композитного материала А1-В, представляющего собой алюминиевую матрицу, армированную волокнами бора. Значения механических характеристик для матрицы M и волокна F :

- модуль Юнга $E_M = 7 \cdot 10^{10}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu_M = 0,33$ для материала матрицы;
- модуль Юнга $E_F = 42 \cdot 10^{10}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu_F = 0,23$ для материала волокна.

Плотность алюминия составляла $\rho_M = 2700$ кг/м³, бора — $\rho_F = 2630$ кг/м³.

Для представительского элемента, изображенного на рис. 2, решалась начально-краевая задача

$$\begin{aligned} \mu_i \Delta u_1 + [u_1, u_2] + f_1(u_1, t) &= \rho_i \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\ \mu_i \Delta u_2 + [u_1, u_2] + f_2(u_2, t) &= \rho_i \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \quad i=1, 2, 3, \quad t \in [0, 1], \end{aligned} \quad (8)$$

где $[u_1, u_2]$ — оператор, определяющий нелинейность краевой задачи.

Безразмерные значения упругих констант и плотности матрицы, армирующей компоненты, и межфазного слоя принимались равными соответственно $\mu_1 = 0,26, \lambda_1 = 0,51, \rho_1 = 0,027, \mu_2 = 1,7, \lambda_2 = 1,45, \rho_2 = 0,0263, \mu_3 = 0,98, \lambda_3 = 0,98, \rho_3 = 0,02665$. Для межфазного слоя эти значения вычислялись по правилам теории смеси соответствующих значений матричного материала и волокна.

Краевые и начальные условия имеют вид

$$u|_{x_1, x_2 \in \partial\Omega^{(i)}} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, \quad (9)$$

где $\partial\Omega^{(i)}$ — граница рассматриваемого представительского элемента.

Кроме приведенных выше условий, на границах раздела межфазного слоя с матрицей и волокном задавались условия сопряжения неидеального контакта [5, 10]:

$$[u_n] = 0, \quad \sigma_n = -p, \\ [\tau_s] = 0, \quad \{\tau_s\}^{\pm} = R[u_s], \quad (x, t) \in \gamma_j, \quad (10)$$

где γ_j ($j=1, 2$) — поверхности контакта межфазной области с матрицей и волокном (см. рис. 2); $[u_n] = u_n^+ - u_n^-$, $[\tau_s] = \tau_s^+ - \tau_s^-$, $[u_s] = u_s^+ - u_s^-$; n — нормаль к $\partial\Omega_i$ ($i=1, 2, 3$); u_n, u_s (σ_n, τ_s) — соответственно нормальная и касательная составляющие вектора перемещений (напряжений); p — напряжение (давление) на поверхностях γ_j ; $R = \text{const} \geq 0$.

В настоящей статье проведено значительное количество численных экспериментов для различных характерных размеров армирующей компоненты F и межфазного образования S_{FM} . Исследуется также влияние наличия и ширины межфазного слоя на форму и динамику линейных и нелинейных колебаний композитной среды.

Рассмотрим результаты расчетов задачи колебаний (8)–(10) композитной системы А1-В с диаметром волокна $d=0,4$ для различных значений ширины h межфазного слоя.

Для возможности дальнейшего исследования и сравнения влияния нелинейности на форму и динамику колебательного процесса сначала находилось решение линейной начально-краевой задачи, а затем соответствующей нелинейной задачи.

Пусть на представительский элемент композитной среды действует внешняя вынуждающая сила $f_1 = e^{u_1 t}$, $f_2 = e^{u_2 t}$.

Решения соответствующих линейных и нелинейных начально-краевых задач для некоторых значений ширины межфазного слоя в различные моменты времени изображены на рис. 3. Поверхности решений приводятся только для функции u_1 , поскольку для u_2 они имеют аналогичный вид. Из рис. 3 видно, что при ширине межфазного слоя $h=0,1$ форма, амплитуда и динамика нелинейного колебательного процесса значительно отличаются от линейного случая. Так, при $t=0,4$ максимальное значение амплитуды линейных колебаний составляет 0,038, а нелинейных — 0,09, т.е. почти в три раза больше. При еще бо́льших значениях времени t различие состоит уже не только в значении амплитуды, но и в форме колебаний. В момент времени $t=0,8$ решение линейной задачи имеет максимальное значение в области волокна и примыкающего к нему межфазного слоя, приблизительно равное 0,15. В этот же момент времени решение соответствующей нелинейной задачи также максимально в области армирующей компоненты, но, кроме этого, имеет четыре симметричных локальных максимума в области матрицы. Наибольшее значение амплитуды в данном случае в два раза больше, чем соответствующее значение линейной задачи и составляет 0,3. В конечный момент времени $t=1$ при нелинейных колебаниях максимальные значения перемещений находятся в области матричного материала, вблизи от межфазного слоя, в отличие от линейной задачи, где максимум находится в области волокна. При этом значение решения нелинейной задачи почти в три раза меньше, чем при линейных колебаниях.

Численные эксперименты, проведенные для соотношения диаметра волокна и ширины межфазного образования $d/h=8$, показали, что в данном случае нелинейный колебательный процесс еще больше отличается от линейного, чем при

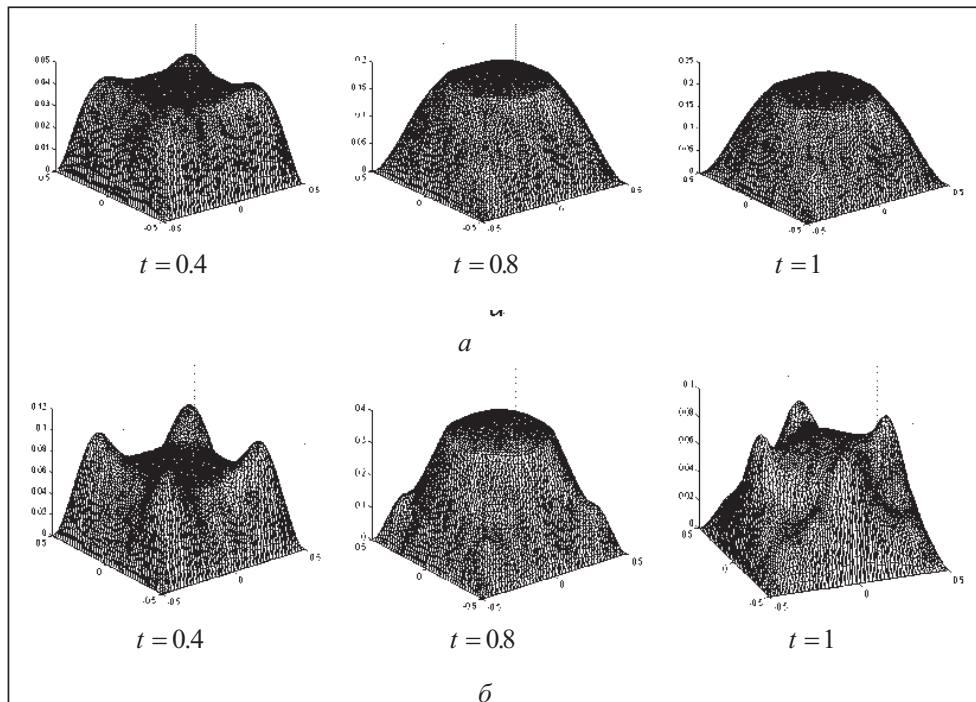


Рис. 3. Приближенное решение линейных (а) и нелинейных (б) задач для ширины межфазного слоя $h = 0,1$ в различные моменты времени

соотношении $d/h = 4$, рассмотренном выше (см. рис. 3). Для соотношения диаметра волокна и ширины межфазного слоя $d/h = 1$ нелинейные колебания практически ничем не отличаются от линейных. При этом одинаковы не только форма и динамика колебаний, но также и значение амплитуды перемещений. Отличие формы и амплитуды колебаний наблюдается только в единственный момент времени, когда $t = 0,8$. При этом решение линейной задачи имеет максимальное значение в областях армирующей компоненты и межфазного слоя и составляет 0,018. Соответствующее решение нелинейной задачи имеет четыре максимума, которые в данном случае расположены в области матрицы. Это значение составляет 0,038 и оказывается почти в два раза больше, чем значение при линейных колебаниях.

Кроме рассмотренных выше плоских задач продольных колебаний, нами была реализована следующая трехмерная задача динамического равновесия представительского элемента композитной среды (см. рис. 1):

$$\mu_i \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k^2} + (\lambda_i + \mu_i) \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_k} + F_j = \rho_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2},$$

$$i, j, k = 1, 2, 3, \quad t \in [0, 1]. \quad (11)$$

Данная система уравнений дополнялась соответствующими начальными и краевыми условиями, а также условиями сопряжения (10) на поверхностях межфазного образования.

Безразмерные значения упругих констант μ_i, λ_i, ρ_i выбирались для композитной пары Al-V такими же, как и в предыдущей задаче плоских колебаний. Один из результатов компьютерного моделирования трехмерной задачи динамического равновесия приведен на рис. 4.

Таким образом, проведенные компьютерные исследования свидетельствуют о том, что наличие нелинейных составляющих в уравнениях, описывающих колебательный процесс, значительно изменяет характер колебаний представите-

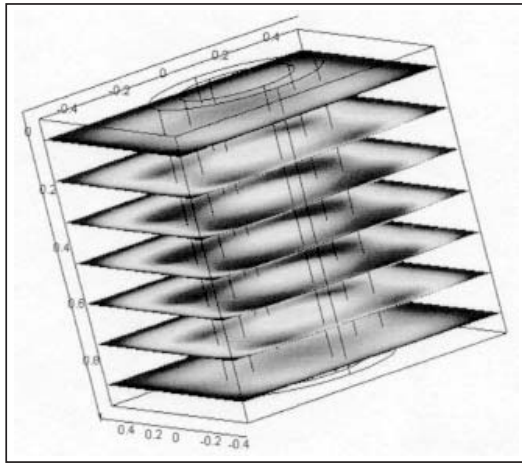


Рис. 4. Компьютерное решение задачи для компоненты u_1 в момент времени $t = 0,1$

Таким образом, ширина межфазного образования влияет не только на характер линейных колебаний, но и на форму и динамику нелинейных колебаний. При этом необходимо заметить, что в начальные моменты времени ($t = 0,1 - 0,3$) решения линейной и соответствующей нелинейной задач практически не различаются. Существенные отличия проявляются, начиная с $t = 0,4$ и до конечного момента времени.

Рассматривая полученные результаты, можно сделать вывод о влиянии характерных размеров армирующей компоненты и межфазного образования на нелинейные колебания композитной системы. Чем большее значение имеет соотношение диаметра волокна и ширины межфазного слоя d/h , тем больше проявляется влияние межфазного слоя на колебательный процесс, при соотношении $d/h = 1$ линейные и нелинейные колебания мало отличаются одно от другого.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каюк Я.Ф., Середенко В.М. Механіка міжфазової взаємодії в композитних матеріалах. — Черкаси: Осередок наукового т-ва ім. Т. Шевченка в Черкасах, 2005. — 172 с.
2. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972. — 588 с.
3. Ворovich И.И. О некоторых прямых методах в нелинейной теории колебаний пологих оболочек // Изв. АН СССР. Сер. математика. — 1957. — 21, № 6. — С. 747–784.
4. Морозов Н.Ф. Существование гладкого решения задачи о нелинейных колебаниях тонкой пластины // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1966. — 6, № 4. — С. 773–776.
5. Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Модели и методы решения задач в неоднородных средах. — К.: Наук. думка, 2001. — 606 с.
6. Перевозчикова О.Л., Тульчинский В.Г., Ющенко Р.А. Построение и оптимизация параллельных компьютеров для обработки больших объемов данных // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — 42, № 4. — С. 117–135.
7. Grigorenko A.Ya. Numerical analysis of stationary dynamic processes in anisotropic inhomogeneous cylinders // International Applied Mechanics. — 2005. — 41, N 8. — P. 831–866.
8. Сергиенко И.В., Дейнека В.С., Вещунов В.В. Информационная технология NADRA 3D исследования процессов многокомпонентных грунтовых сред // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — 42, № 6. — С. 157–174.
9. Середенко В., Коновалова О. Комп'ютерне моделювання задач динаміки композитів з міжфазовою взаємодією компонентів // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикладна математика та інформатика. — 2006. — Вип. 11. — С. 193–202.
10. Середенко В.М., Коновалова О.М. Комп'ютерно-математичне моделювання задач динаміки міжфазової взаємодії в композитах // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. — 2007. — Вип. 1. — С. 188–191.

Поступила 19.12.2007